

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

ԵՐԵՎԱՆ – 2009

547(075)

2-24

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ԳԱՍՏԱՏԱՐԱՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Ս. ՄԱՐԳԱՅՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

ՃԱՐՔԵՐ. ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2009

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՏԴ 51 (07)
ԳՄԴ 22.11 ց7
Ղ 249

Յրատարակության է Երաշխավորել ԵՊՀ
մաքենատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Յեղինակները հայտնում են իրենց խորին շնորհակալությունը
պրոֆեսորներ Մ.Գ. Գրիգորյանին և Ա.Ա.Կիտբայյանին օգտակար
դիտողությունների և խորհուրդների համար:

ԴԱԼՈՒՅՅԱՆ Ա.Գ., ՍԱՐԳՍՅԱՆ Ա.Ս.

Ղ 249

Մաքենատիկական անալիզ, դասախոսություններ,
երրորդ մաս. Շարքեր, բազմաչափ ինտեգրալներ: –
Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2009 թ., 130 էջ:

Զենոնարկում շարադրված են մաքենատիկական ա-
նալիզի հետևյալ կարևոր բաժինները՝ թվային և ֆունկցիո-
նալ շարքեր, բազմաչափ ինտեգրալներ՝ կորուգիծ, կրկնա-
կի, եռակի, մակերևությային: Այն հանդիսանում է Ա.Գ.Դա-
լույյանի «Մաքենատիկական անալիզ», 1-ին մաս և
Ա.Գ.Դալույյան, Ա.Ս.Սարգսյանի, «Մաքենատիկական ա-
նալիզ», 2-րդ մաս ծեռնարկների շարունակությունը, պահ-
պանված են նախորդների նշանակումները:

Զեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ-ի, նրա հջեանի
մասնաճյուղի, ինչպես նաև այլ ԲՈՒՀ-երի բնագիտական
ֆակուլտետների ուսանողների համար:

ԵՊՀ Գրադարան



SU0148132

ԳՄԴ 22.11 ց7

ISBN 978-5-8084-1188-3

- © Ա.Գ. Դալույյան,
Ա.Ս. Սարգսյան, 2009 թ.
- © ԵՊՀ հրատարակություն, 2009 թ.

I ԹՎԱՅԻՆ ԾԱՐՁԵՐ

1. ԾԱՐՁԻ ԳՈՒՄԱՐ, ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ԾԱՐՁԵՐԻ ԴԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ:

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, թվային հաջորդականությունը:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

սիմվոլը կոչվում է (թվային) շարք: Նկատենք, որ ուղղակիորեն, որպես անվերջ քանակով թվերի գումար (1)-ը հասկանալ չի լինի:

a_n -ը կոչվում է շարքի n -րդ կամ ընդհանուր անդամ, իսկ

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) կոչվում է մասնակի գումարների հաջորդականություն:

Սահմանում 2: (1) շարքի գումար (S) ասելով հասկանում ենք մասնակի գումարների հաջորդականության վերջավոր սահմանը, եթե n -ը ձգտում է անվերջի: Այսինքն՝ $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$: Այդ դեպքում ասում ենք, որ (1) շարքը զուգամետ է և շարքին վերագրում ենք նրա գումարը՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$: Դակառակ դեպքում, եթե նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, շարքը կոչվում է տարամետ:

Օրինակ 1: Տրված է $\sum_{n=1}^{\infty} C$ շարքը, որտեղ C -ն հաստատուն է:

Քանի որ $S_n = \sum_{k=1}^n C = n \cdot C$, ապա շարքը տարամետ է, եթե $C \neq 0$ և զուգամետ է, եթե $C = 0$ և այս դեպքում, պարզ է, որ $S = 0$:

Օրինակ 2: Դիցուք տրված է անվերջ, q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե $0 < |q| < 1$ (անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա) և հաշվենք այդ շարքի գումարը: Եթե

$q = 1$, ապա $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ը հաստատուն հաջորդականություն է՝
 $\forall n : a_n = a, \neq 0$ և, ուրեմն շարքը տարամետ է (տես օրինակ 1): Եթե
 $q \neq 1$, ապա $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$: Այն դեպքում, եթե $|q| > 1$ շարքը տարա-
 մետ է, քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$: Շարքը տարամետ է նաև եթե $q = -1$, քա-
 նի որ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$: Իսկ եթե $0 < |q| < 1$, ապա $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, ուրեմն շար-
 քը գուգամետ է և $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$:

Թեորեմ 1 (գուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը):

Որպեսզի (1) շարքը լինի գուգամետ անհրաժեշտ է, որ նրա ընդ-
 հանուր անդամը լինի անվերջ փոքր՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$:

Ապացուցում: Տրված է, որ (1) շարքը գուգամետ է, այսինքն գու-
 գամետ է նրա մասնակի գումարների $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջոր-
 դականությունը՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ ։ Բայց՝
 $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0$: ■

Օրինակ 3: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ շարքը տարամետ է, քանի որ նրա ընդհա-
 նուր անդամը անվերջ փոքր չէ ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$):

Դիտողություն 1: Թեորեմ 1-ը հակադարձելի չէ, այսինքն ընդհա-
 նուր անդամի անվերջ փոքր լինելուց չի հետևում շարքի գուգամի-
 տությունը (օրինակները տես ստորև):

Թեորեմ 2: Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը գուգամետ են, իսկ α -ն
 և β -ն հաստատուններ են, ապա գուգամետ է նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$$

շարքը և՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n :$$

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է շարքի գումարի սահմանումից և հաջորդականության սահմանի համապատասխան հատկություններից [1]:

Սահմանում 3: Տրված ($\sum_{k=l}^{\infty} a_k$) (1) շարքի միջոցով կազմված

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (2)$$

շարքը կոչվում է (1) շարքի n -մնացորդ շարք, կամ պարզապես (1)-ի «պոչ»:

Թեորեմ 3: (1) և (2) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են, կամ՝ տարամետ: Ընդ որում, (1) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ («պոչը» անվերջ փոքր է): ■

Ապացուցում: (1) շարքի m -մասնակի գումարը նշանակենք $A_m = \sum_{k=l}^m a_k$ ($m \in N$), իսկ (2) շարքինը՝ $B_m^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$:

Պարզ է, որ $A_{n+m} = A_n + B_m^{(n)}$: Եթե (1)-ը զուգամետ է $(\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \in R)$,

ապա $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} B_m^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{n+m} - \lim_{m \rightarrow \infty} A_n = A - A_n = B^{(n)}$ ($B^{(n)}$ -ը (2) շարքի գումարն է): և հակառակը, եթե զուգամետ է (2)-ը

$(\exists \lim_{m \rightarrow \infty} B_m^{(n)} = B^{(n)} \in R)$, ապա

$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} A_{n+m} = A_n + \lim_{m \rightarrow \infty} B_m^{(n)} = A_n + B^{(n)} = A$: Քանի, որ (1)-ի զուգամիտությունից հետևում է, որ $A - A_n = B^{(n)}$, ապա՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} B^{(n)} = A - A = 0$: ■

Դիտողություն 2: Այս թեորեմից հետևում է, որ շարքի զուգամիտության վրա նորա ցանկացած վերջավոր թվով անդամները չեն ազդում (համեմատեք առաջին սերի անիսկական ինտեգրալների համար համապատասխան փաստի հետ [2]): Ուրեմն շարքի զուգամիտության պայմանները կարելի են ձևակերպել սկսած ինչ-որ համարից:

Դիտողություն 3: Թվային $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի և $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ անհսկական ինտեգրալի միջև կա մեծ նմանություն, այն կայանում է հետևյալում՝

$$a_n \leftrightarrow f(x), \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leftrightarrow F(A) = \int_1^A f(x) dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = I = \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Այդ պատճառով շարքերի զուգամիտության շատ հայտանիշներ նման են 1-ին սերի անհսկական ինտեգրալների զուգամիտության համապատասխան հայտանիշներին, և անգամ որոշ պայմանների դեպքում, կա անմիջական կապ շարքերի և անհսկական ինտեգրալների զումիտության միջև (տես ստորև ինտեգրալային հայտանիշը):

2. ՈՉ ԲԱՑԱՍԿԱՆ ԱԼՂԱՄՄԵՐՈՎ ԾԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԴԱՏԱԽԱՀՆԵՐ

Թեորեմ 1: Դիցուք տրված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ոչ բացասական անդամներով շարքը ($a_n \geq 0$): Որպեսզի այն լինի զուգամետ անրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մասնակի գումարների $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) հաջորդականությունը լինի սահմանափակ վերևից:

Ապացուցում: Նախ նկատենք, որ A_n -ը սահմանափակ է ներքևից, $A_n \geq 0$: Քանի որ $\forall n : A_n - A_{n-1} = a_n \geq 0$, ապա՝ $A_n \geq A_{n-1}$: Այսինքն $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է: Ինչպես հայտնի է [1] մոնոտոն չնվազող հաջորդականությունը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն սահմանափակ է վերևից, հակառակ դեպքում $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$: Ընդ որում, եթե $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sup \{A_n, n \in N\} = A \in \mathbb{R}: \blacksquare$$

Դիտողություն 1: Որպեսզի պարզենք տվյալ (1) շարքի գուգամիտությունը՝ հաճախ հարմար է լինում այն համեմատել մեկ այլ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

շարքի գուգամիտության հետ: Որպես այդպիսի (2) շարք մեծ մասամբ հարմար է $b_n = \frac{1}{n^p}$ անդամներով շարքը: Ինչպես և անհսկական ինտեգրալների դեպքում ($\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$) այսպիսի տեսքի շարքը

գուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե $p > 1$: Այս փաստի ապացույցը հենվում է նշված ինտեգրալի հատկության վրա (ստորև տես ինտեգրալային հայտանիշը):

Այժմ համեմատենք (1), (2) շարքերը գուգամիտության (տարամիտության) առումով:

Բաղդատման հայտանիշներ

Հայտանիշ 1: Դիցուք տրված են (1), (2) ոչ բացասական անդամներով շարքերը և $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n$: Այս դեպքում, (2) շարքի գուգամիտությունից հետևում է (1)-ի գուգամիտությունը, կամ, որ նույն է՝ (1)-ի տարամիտությունից հետևում է (2)-ի տարամիտությունը:

Ապացուցում: Դիցուք՝

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n:$$

Եթե (2)-ը գուգամետ է, ապա՝ $\exists \sup \{B_n ; n \in N\} = B \in \mathbb{R}$ և, ուրեմն՝ $\forall n : B_n \leq B$:

Քանի որ՝ $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow A_n \leq B_n \leq B$, ապա՝

$\forall n : A_n \leq B$: Այսուղից հետևում է (1) շարքի գուգամիտությունը (տես թ. 1):

Եթե (1)-ը տարամետ է, ապա (2)-ը չի կարող է լինել գուգամետ (հակառակ դեպքում, ըստ ապացուցածի, (1)-ը կլինի գուգամետ): ■

Օրինակ 1: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(n^3)}{n^2 + 1}$ շարքի գուգամիտությունը:

Պարզ է, որ $0 \leq \frac{\sin^4(n^3)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ շարքը զուգամետ է:

Ուրեմն, ըստ հայտանիշ 1-ի զուգամետ է սկզբնական շարքը:

Օրինակ 2: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ շարքի զուգամիտությունը: Քանի որ $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ ($n \geq 3$), և $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է, ապա ըստ հայտանիշ (1)-ի քննարկվող շարքը տարամետ է:

Դայտանիշ 2: Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը և՝ $a_n \sim b_n$ (a_n -ը համարժեք է b_n -ին, այսինքն՝

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$): Այս պայմանների առկայությամբ (1) և (2) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ՝ տարամետ:

Ապացուցում: Դիցուք (2)-ը զուգամետ է: Քանի որ $a_n \sim b_n$, ապա $\exists N, \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < 2 \Rightarrow a_n < 2b_n$: Այստեղից, ըստ հայտանիշ (1)-ի ստանում ենք շարք (1)-ի զուգամիտությունը (տես նաև 1. դիտ. 2):

Այժմ, դիցուք (2)-ը տարամետ է: Քանի որ $a_n \sim b_n$, ապա $\exists N, \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2} \Rightarrow a_n > \frac{1}{2}b_n$: Այստեղից, ըստ հայտանիշ (1)-ի ստանում ենք շարք (1)-ի տարամիտությունը: ■

Դիտողություն 2: Դայտանիշ 2-ում, a_n -ը համարժեք է b_n -ին պայմանը կարելի է փոխարինել հետևյալ պայմանով՝ a_n -ը նույն կարգի անվերջ փոքր է, ինչ b_n -ը, այսիքան՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}, C > 0$:

Բայց դա նույնն է, ինչ՝ $a_n \sim C \cdot b_n$:

Օրինակ 3: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(n^2 + 1)^p}$ շարքի զուգամիտությունը:

Աղյուսակի որությունը՝ $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ և $n^2 + 1 = n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^2$.

ապա $\frac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(n^2 + 1\right)^p} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n^{2p}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{2p+1}}$: Ըստ հայտանիշ 2.-ի ստա-

Առում ենք, որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -ը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում,
եթե $2p+1 > 1$ ($p > 0$):

Այն դեպքերում, եթե $\forall p \in \mathbb{R}$ թվի համար a_n -ը նույն կարգի անվերջ փոքր չէ ինչ $\frac{1}{n^p}$ -ն, օգտակար են հետևյալ հայտանիշները:

Դայտանիշ Յ: Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը, և $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$: Այդ դեպքում (2)-ի զուգամիտությունից

հետևում է (1)-ի գործամիտությունը:

Ապացույցը հենվում է այն փաստի վրա, որ

$$\exists N, \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < I$$

Դայտանիշ 4: Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը, և՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$: Այդ դեպքում (2)-ի տարամիտությունից հետևում է (1)-ի տարամիտությունը:

Ապացույցը բիսում է հետևյալից՝ $\exists N, \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} > 1$:

Օրինակ 4: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot e^{-\sqrt{n}}$ շարքի զուգամիտությունը: Դի-
տարկենք զուգամետ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ շարքը: Պարզ t , որ
 $(n^p \cdot e^{-\sqrt{n}}) : \frac{1}{n^2} = n^{p+2} \cdot e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: Ուրեմն, ըստ հայտանիշ 3.-ի յուրա-
 քանչյուր $p \in \mathbb{R}$ -ի համար $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot e^{-\sqrt{n}}$ շարքը զուգամետ է:

Օրինակ 5: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1) \cdot \sqrt{n}}$ շարքի զուգամիտությունը: Դիտարկենք տարամետ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ ($\lambda < 1$): Պարզ է, որ

$$\left(\frac{1}{\ln(n+1) \cdot \sqrt{n}} \right) : \frac{1}{n^{\lambda}} = \frac{n^{1-0.5}}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty, \text{ եթե } \lambda > 0.5 \quad (0.5 < \lambda < 1):$$

Ուրեմն, ըստ հայտանիշ 4-ի $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1) \cdot \sqrt{n}}$ շարքը տարամետ է:

Թեորեմ 2 (Ռ'Ալամբերի՝ հայտանիշը):

Դիցուք տրված է դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0) \quad (3) \text{ շարքը և } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D:$$

Այդ դեպքում, եթե՝

1. $D < 1$, ապա (3) շարքը զուգամետ է,

2. $D > 1$ (D -ն կարող է լինել $+\infty$), ապա (3)-ը տարամետ է:

3. $D = 1$, ապա ոչինչ պնդել չենք կարող (կան և զուգամետ և տարամետ շարքերի օրինակներ):

Ապացուցում: Եթե $D < 1$, ապա որևէ $q \in (D; 1)$ թվի համար կու-

նենանք՝ $\exists N, \forall n \geq N : 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$:

Այստեղից՝ $\frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < q \quad (n > N)$:

Բազմապատկելով այս $n - N$ թվով անհավասարությունները,

կստանանք՝ $\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$: Ուրեմն՝ $a_n < \frac{a_N}{q^N} \cdot q^n \quad (n > N)$: Քանի որ

$\frac{a_N}{q^N} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$ շարքը զուգամետ է ($0 < q < 1$), ապա զուգամետ է նաև շարք (3)-ը (տես 1., դիտ. 2):

Եթե $D > 1$, ապա $\exists N, \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Ուրեմն

* Ռ'Ալամբեր Ժան Լերոն (1717-1783)՝ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$a_{n+1} > a_n > 0$ ($n \geq N$): Այստեղից հետևում է, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է, և, ուրեմն՝ $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: Որտեղից հետևում է (3) շարքի տարամիտությունը:

Ցույց տալու համար, որ $D = 1$ դեպքում ոչինչ պնդել չի լինի, բերենք երկու օրինակ:

Օրինակ 6: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n = \frac{1}{n^2}$: Այս շարքը զուգամետ է, և պարզ է,

որ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$:

Օրինակ 7: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n = \frac{1}{n}$: Այս շարքը տարամետ է, բայց եկի՝

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$: ■

Թեորեմ 2 (Կոչիի հայտանիշը):

Դիցուք տրված է ոչ բացասական անդմներով

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) (4) շարքը և $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K$: Այդ դեպքում, եթե՝

1. $K < 1$, ապա (4) շարքը զուգամետ է,
2. $K > 1$ (K -ն կարող է լինել $+\infty$), ապա (4)-ը տարամետ է:
3. $K = 1$, ապա ոչինչ պնդել չենք կարող (կան և զուգամետ և տարամետ շարքերի օրինակներ):

Ապացուցում: Եթե $K < 1$, ապա որևէ $q \in (K; 1)$ թվի համար կունենանք՝

$$\exists N, \forall n \geq N : 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < q < 1: \quad \text{Այստեղից}$$

$a_n < q^n, n \geq N$: Բանի որ $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ շարքը զուգամետ է ($0 < q < 1$), ապա զուգամետ է նաև (4) շարքը:

Եթե $K > 1$, ապա $\exists N, \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} > 1$, ուրեմն

$a_n > 1 (n \geq N)$: Այստեղից հետևում է, որ $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, որտեղից հետևում է (4) շարքի տարամիտությունը:

Ցույց տալու համար, որ $K = 1$ դեպքում ոչինչ պնդել չի լինի կարելի է քննարկել նախորդ երկու օրինակները, որոնցից յուրաքանչյուրում, ինչպես հեշտ է համոզվել, $K = 1$ (պետք է վերիիշել,

որ՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$): ■

Դիտողություն 3. Յնարավոր է, որ՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, այդ դեպքում Կոչիի հայտանիշում K -ի դերում հանդես է գալիս այդ արձատի վերին սահմանը՝ $K = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ (տես [3]):

Դիտողություն 4. Յայտնի է, որ եթե $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, ապա

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = D$ (տես [3],[12]): Այնպես, որ, եթե Γ -Ալամբերի հայտանիշը բացահայտում է զուգամիտությունը, ապա նույնը կարելի է ասել Կոչիի հայտանիշի մասին: Բայց կարող է լինել այնպես, որ՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, բայց՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1$: Այս իմաստով Կոչիի հայտանիշը ավելի «ուժեղ է»: Ասածը մեկնարանենք հետևյալ օրինակի միջոցով:

Օրինակ 8: Դիտարկենք

$$1 + a + a \cdot b + a^2 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + \dots + a^{n-1} \cdot b^{n-1} + a^n \cdot b^{n-1} + a^n \cdot b^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

շարքը, $0 < a < 1 < b$, $a \cdot b < 1$, օրինակ՝ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$: Պարզ է, որ

$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = b \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b > 1$, իսկ $\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}} = a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a < 1$: Այսպիսով, այստեղ

Γ -Ալամբերի հայտանիշը անօգուտ է:

Բայց $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = a \cdot b < 1$, ուրեմն, ըստ Կոչիի հայտանիշի, շարք

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ -ը զուգամետ է:

Թեորեմ 3 (Մակլորան-Կոչիի իմտեգրալային հայտանիշը):

Դիցուք $f \in C[1; +\infty)$, f -ը մոնոտոն չաճող է և՝ ոչ բացասական: Դիտարկենք

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \tag{5}$$

անիսկական իմտեգրալը և հետևյալ շարքը

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n = f(n)): \quad (6)$$

Նշված պայմանների առկայությամբ (5) անհսկական ինտեգրալը և (6) շարքը միաժամանակ զուգամետ են, կամ տարամետ:

Ապացուցում: Դիցուք $F(A) = \int_1^A f(t) dt$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$: Եթե $k \leq t \leq k+1$, ապա, շնորհիվ f ֆունկցիայի մոնոտոն չափող լինելու, ստանում ենք $a_{k+1} = f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$): Ինտեգրելով այս անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\int_k^{k+1} a_{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} a_k dt,$$

կամ $a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k$, $k = 1, \dots, n$: Գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} \leq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \dots + \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \\ \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n, \text{ կամ}$$

$$S_{n+1} - a_1 \leq F(n+1) \leq S_n: \quad (7)$$

Դիցուք (5)-ը զուգամետ է, այսինքն

$$\exists \lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \sup\{F(A)\} = I \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall A \geq 1 : F(A) \leq I: \quad (8)$$

(7), (8)-ից հետևում է, որ

$$\forall n : S_{n+1} \leq a_1 + F(n+1) \leq a_1 + I \Rightarrow S_{n+1} \leq a_1 + I:$$

Այսիքն $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևու և, ուրեմն (6) շարքը զուգամետ է:

Այն, որ (5)-ի տարամիտությունից հետևում է (6)-ի տարամիտությունը համարժեք է նրան, որ (6)-ի զուգամիտությունից հետևում է (5)-ի զուգամիտությունը: Դիցուք (6)-ը զուգամետ է, այսինքն՝

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup\{S_n\} = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n : S_n \leq S: \quad (9)$$

Պարզ է, որ $\forall A \geq 1, \exists n : A \leq n+1$: Բաշխի առնելով (7)-ը և (9)-ը ստանում ենք՝

$$\forall A \geq 1 : F(A) \leq F(n+1) \leq S_n \leq S \Rightarrow F(A) \leq S:$$

Այսինքն, $F(A)$ -ն սահմանափակ է վերևից, հետևաբար (5)-ը գուգամետ է: ■

Դիտողություն 5. Պարզ է, որ թեորեմը մնում է ուժի մեջ, եթե շարքի մեջ գումարը սկսվի ինչ-որ n_0 ($n_0 > 1$) համարից (այդ դեպքում ինտեգրալի ստորին սահմանը n_0 -ն է):

Օրինակ 9: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքի գուգամիտությունը կախված p պարամետրից: Պարզ է, որ $p \leq 0$ դեպքում շարքը տարամետ է, քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$:

Դիցուք $p > 0$ և $f(x) = \frac{1}{x^p}$: Այս ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին և, քանի որ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ անիսկական ինտեգրալը գուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե $p > 1$, ապա նույնը կարելի է ասել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ շարքի մասին:

Օրինակ 10: Պարզել $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p(n)}$ շարքի գուգամիտությունը:
Եթե $p \leq 0$, ապա $\frac{1}{n \cdot \ln^p(n)} \geq \frac{1}{n}$, $n \geq 3$, ուրեմն շարքը տարամետ է:
Եթե $p > 0$, ապա $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^p(x)}$, $x \geq 2$ ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին, իսկ

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^p(x)} = \int_2^{+\infty} \frac{d\ln(x)}{\ln^p(x)} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p} \quad (t = \ln x)$$

ինտեգրալը գուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե $p > 1$, ուրեմն նույնը կարելի է ասել շարքի մասին:

3. ՆԵԱՍԱՓՈԽ ԸԱՐՁԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Եթե շարքի անդամները (ինչ-որ համարից սկսած) ոչ դրական են, ապա բազմատկելով շարքի անդամները -1-ով (դա չի ազդի զուգամիտության վրա), կստանանք ոչ բացասական անդամներով շարք, որն արդեն ուսումնասիված է նախորդ բաժնում: Ուրեմն հետաքրքիրն այն դեպքն է, երբ շարքի անդամների մեջ կան անթիվ բազմությամբ թե դրական, թե բացասական անդամներ:

Դիցուք տրված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

շարքը և՝ $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, \dots)$:

Թեորեմ 1 (զուգամիտության սկզբունքը):

Որպեսզի (1) շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն բավարարի հետևյալ (Կոշիի) պայմանին՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in N : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon: \quad (2)$$

Ապացուցում: Շարքի զուգամիտությունը համարժեք է $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության զուգամիտությանը, որն իր հերթին համարժեք է Կոշիի պայմանի տեղի ունենալուն (ֆունդամենտալությանը): Այսինքն՝ $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in N : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$: Թանի որ

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k, \text{ ապա ստանում ենք (2)-ը:} \blacksquare$$

Սահմանում 1: (1) շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (3)$$

շարքը:

Թեորեմ 2: Բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է, այսինքն,

(3) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1)-ի զուգամիտությունը:

Ապացուցում: (3) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ այն բավարարում է Կոշիի (2) պայմանին, այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon :$$

Քանի որ $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$, ապա ստանում ենք, որ (1) շարքը նույնական է Կոշիի (2) պայմանին և, ուրեմն (1)-ը գուգամետ է: ■

Օրինակ1: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(n!)}{n^2 + n + 5}$ շարքի գուգամիտությունը:

Քանի որ $\left| \frac{\sin^3(n!)}{n^2 + n + 5} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ և $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ շարքը գուգամետ է, ապա

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(n!)}{n^2 + n + 5}$ շարքը բացարձակ գուգամետ է:

Դիտողություն 1: Թեորեմ 2-ը հակադարձելի չէ, այսինքն $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը կարող է լինել գուգամետ, բայց $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ շարքը՝ տարածելի: Այդպիսի շարքը կոչվում է ոչ բացարձակ, կամ պայմանական գուգամետ: Պայմանական գուգամետ շարքերի օրինակներ կրերենք ստորև:

Սահմանում 2: Շարքը կոչվում է նշանահաջորդող, եթե նրա անդամների նշանները մեկ ընդ մեջ փոփոխվում են:

Թեորեմ 3 (Լայբնիցի հայտանիշը):
Եթե տրված է նշանահաջորդող

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot c_n \quad (c_n \geq 0) \tag{4}$$

շարքը, որտեղ $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնուտոն չաճող է և $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, ապա (4) շարքը գուգամետ է:

Ապացուցում: Եթե $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$), ապա՝

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_{2m-1} - c_{2m}): \tag{5}$$

Դաշվի առնելով այս, որ (5)-ում փակագժերից յուրաքանչյուրը ոչ բացասական է ($\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնուտոն չաճող է)

ստանում ենք՝ $S_{2m+2} - S_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} \geq 0 \Rightarrow S_{2m+2} \geq S_{2m}$: Այսինքն,
 $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է: Ունենք նաև՝

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} \leq c_1 \Rightarrow S_{2m} \leq c_1: \quad (6)$$

Ուրեմն $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է վերևից: Այսպիսով ստացանք, որ $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S \in \mathbb{R}$: Մնում է ցույց տալ, որ $S_{2m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} S$: Քանի որ $\lim_{m \rightarrow \infty} c_{2m+1} = 0$ ($\{c_{2m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ -ը հանդիսանում է $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, անվերջ փոքր հաջորդականության ենթահաջորդականություն), ապա՝

$$S_{2m+1} = S_{2m} + c_{2m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} S \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S: \blacksquare$$

Լայբնիցի թեորեմի պայմաններին բավարարող շարքը ընդունված է անվանել լայբնիցյան շարք:

Դիտողություն 1: Նախ նկատենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n$ ($c_n \geq 0$) շարքը, եթե c_n -ը բավարարում է թեորեմի պայմաններին, նույնպես գուգամն է ((4) շարքի անդամները բազմապատկված են -1-ով): Այդ շարքը նույնպես կոչվում է լայբնիցյան:

Դիտողություն 2: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում (տես (6)) ստացված $S_{2m} \leq c_1$ անհավասարության մեջ անցնենք սահմանի, եթե m -ը գգտում է անվերջի, կստանանք $S \leq c_1$: Պարզ է, որ ընդհանուր տեսքի լայբնիցյան շարքերի համար (տես դիտողություն1) ճիշտ է $|S| \leq c_1$, անհավասարությունը: Ուրեմն, լայբնիցյան շարքի համար ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝

$$|S_n - S| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}| \left(a_n = (-1)^{n-1} c_n, c_n \geq 0 \right): \quad (7)$$

Ստացված (7) գնահատականը օգտակար է, օրինակ, լայբնիցյան շարքի գումարը ցանկացած, նախապես տրված ճշտությամբ, նոտավոր հաշվելու համար:

Արելի ծևափոխությունը:

Դիցուք տրված են $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, հաջորդականություններ

$(A_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i, B_n = \sum_{i=1}^n \beta_i, S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \beta_i) \quad (n \in N)$: ճիշտ է հետևյալ բանաձևը:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \beta_k = \beta_n \cdot A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) \cdot A_k. \quad (8)$$

((8)-ը մասերով ինտեգրման բանաձևի նմանակն է դիսկրետ դեպում):

Ապացուցում: Քանի, որ

$$\alpha_1 = A_1, \alpha_2 = A_2 - A_1, \dots, \alpha_n = A_n - A_{n-1}, \text{ ապա՝}$$

$$S_n = A_1 \cdot \beta_1 + (A_2 - A_1) \cdot \beta_2 + (A_3 - A_2) \cdot \beta_3 + \dots + (A_n - A_{n-1}) \cdot \beta_n = A_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) + A_2 \cdot (\beta_2 - \beta_3) + \dots + A_{n-1} \cdot (\beta_{n-1} - \beta_n) + A_n \cdot \beta_n = A_n \cdot \beta_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (\beta_{k+1} - \beta_k):$$

■

(8)-ից ստացվում է $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \beta_k$ գումարի համար հետևյալ գնահատականը՝

Արելի լեմմա.

Դիցուք $A_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ -ն սահմանափակ է

$$(\exists L \in \mathbb{R}, \forall n \in N : |A_n| \leq L).$$

իսկ β_n -ը մոնոտոն չածող է (β_n զնվազող է): Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \beta_k \right| \leq L(|\beta_1| + 2|\beta_n|): \quad (9)$$

Իրոք, քանի որ $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ հաջորդականությունը մոնոտոն է, այսիցն՝ $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$ -ի համար $\beta_{k+1} - \beta_k$ տարբերությունները ունեն միևնույն նշանը, ապա (8)-ից ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left| \beta_n \cdot A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) \cdot A_k \right| \leq |A_n| \cdot |\beta_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| \cdot |\beta_{k+1} - \beta_k| \leq \\ &\leq L(|\beta_n| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) \right|) \leq L(|\beta_n| + |\beta_n - \beta_1|) \leq L(2|\beta_n| + |\beta_1|): \end{aligned}$$

Դիտողություն 3. Աբելի լեմնայում գումարը կարող է սկսվել մեկից մեծ բնական թվից:

Թեորեմ 4 (Աբելի հայտանիշը):

Դիցուք տրված է շարք,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n, \quad (10)$$

որտեղ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ b_n -ը մոնոտոն է և սահմանափակ ($\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq C$): Այս պայմանների առկայությամբ (10) շարքը զուգամետ է:

Ապացուցում: Դիցուք $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k$: Օգտվենք շարքի զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից (տես 3, թեորեմ1): Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{3C} :$$

Օգտվելով նաև Աբելի լեմնայից (տես (9)), ստանում ենք՝

$$|S_{n+m} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3C} (|b_{n+1}| + 2|b_{n+m}|)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3C} 3C = \varepsilon \Rightarrow |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon, m \in \mathbb{N}).$$

որն էլ նշանակում է, որ (10) շարքը զուգամետ է: ■

Թեորեմ 5 (Դիրիխլեի հայտանիշը):

Դիցուք տրված է (10) շարքը, որի $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է ($\exists L, \forall n : |A_n| \leq L$), իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ը մոնոտոն չաճող է և $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$:

Այս պայմանների առկայությամբ շարք (10)-ը զուգամետ է:
Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $b_n \geq 0$:

$$(9)\text{-ից, ստանում ենք} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k \right| \leq L(b_{n+1} + 2b_{n+m}) \leq 3Lb_{n+1}:$$

Քանի որ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, ապա՝ $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon : |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{3L}$: Այսպի-

սով՝ $\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k \right| \leq \varepsilon (n \geq n_\varepsilon)$: ■

Խնդիր1: Ապացուցել, որ եթե

$$A_n = \sum_{k=1}^n \sin(ka), \quad B_n = \sum_{k=1}^n \cos(ka), \quad \alpha \neq 2\pi m (m \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{ապա՝ } |A_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}, \quad |B_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}:$$

Ցուցում. բազմապատկել A_n -ը և B_n -ը $2\sin \frac{\alpha}{2}$ -ով:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը գուգամիտ է:

Կիրառենք Դիրիխլեի հայտանիշը, վերցնելով որպես $a_n = \sin(n)$ ($\left| \sum_{k=1}^n \sin(k) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$, տես խնդիր1), իսկ $b_n = \frac{1}{n}$ (այն մո-

նույն նվազելով ձգտում է զրոյի):

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը գուգամետ է:

Կիրառենք Աբելի հայտանիշը, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը գուգամետ է, իսկ

$e^{-\frac{1}{n}}$ -ը մոնուտոն աճող է և սահմանափակ ($0 < e^{-\frac{1}{n}} < 1$):

4. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ԸՐԳԵՐԻ ԴԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է շարք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

և $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($n_0 = 0, n_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots$) ոչ բացասական ամբողջ թվերի

մոնոտոն աճող հաջորդականություն: Կազմենք նոր շարք

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad (2)$$

որտեղ $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$): Այսինքն (2) շարքը առաջանում է նույն շարք (1)-ից, եթե առանց փոխելու գումարման հերթականությունը շարքի անդամները ինչ-որ քանակությամբ ներառվում են փակագծերի մեջ

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots : \quad (2')$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k (n \in N), \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A:$$

Թեորեմ 1 (Շարքի գուգամենությունը):

Եթե զուգամետ է (1) շարքը, ապա զուգամետ է նաև (2)-ը և այն ունի նույն գումարը ինչ (1)-ը:

Ապացուցում: Պարզ է, որ՝

$$B_m = \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^m (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) = a_1 + \dots + a_{n_m} = A_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A:$$

(A_{n_m} -ը A_n զուգամետ հաջորդականության ենթահաջորդականությունն է) ■

Դիտողություն 1: Այս թեորեմը հակադարձելի չէ: Այսինքն (2) (փակագծերով շարքը) կարող է լինել զուգամետ, իսկ (1) շարքը՝ տարամետ: Իրոք, դիտարկենք հետևյալ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \dots$

տարամետ շարքը: Այդ շարքի օգնությամբ կազմենք նոր $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$, ակնհայտորեն զուգամետ շարքը:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ եթե տրված է զուգամետ (2') տեսքի շարք $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k})$ և, յուրաքանչյուր փակագծի միջի անդամ-

ները ունեն միևնույն նշանը (մի փակագծի մյուսին անցնելիս շարքի անդամների նշանները կարող են փոփոխվել), ապա առանց փակագծերի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը ևս կլինի զուգամետ և կունենա նույն գումարը ինչ նախնական (փակագծերով) շարքը (տես օրինակ [3]):

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է (1) ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) շարքը և ունենք փոխմիարժեք արտապատկերում՝ $n_k : N \rightarrow N$: Կազմենք նոր շարք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}, \quad (3)$$

որը նույնն է ինչ (1)-ը, միայն փոխված է գումարման հերթականությունը: (3)շարքը կանվանենք (1)-ի տեղափոխված շարք:

Թեորեմ 2 (բացարձակ գուգամետ շարքի տեղափոխական հատկությունը):

Եթե (1) շարքը բացարձակ գուգամետ է, այսինքն գուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (4)$$

շարքը, ապա գուգամետ է նաև տեղափոխված (2) շարքը և այն ունի նույն գումարը ինչ (1)-ը:

Ապացուցում: Դիցուք՝

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_m = \sum_{k=1}^m a_{n_k}, A_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^* \in \mathbb{R}:$$

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ (1)-ի անդամները ոչ բացարձակ են ($a_n \geq 0$):

Այս դեպքում $A_n = A_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^* = A = \sup \{A_n\}$, ($A_n \leq A$) և, եթե $\max\{n_k; k = 1, \dots, m\} = p_m$, ապա

$$B_m \leq \sum_{k=1}^{p_m} a_k = A_{p_m} \leq A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k:$$

Դա նշանակում է, որ մոնուոն չնվազող B_m հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և, ուրեմն ունի սահման՝ $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = B \leq A$: Մյուս կողմից (1)-ը հանդիսանում է (2)-ի տեղափոխված շարք, ուրեմն նաև՝ $A \leq B$: Այսպիսով ստանում ենք, որ տեղափոխված շարքի գումարը չի փոխվում՝ $A = B$:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ (1) շարքը ունի անվերջ քանակությամբ դրական և բացասական անդամներ: (1)-ի հերթականությամբ հանդիպող դրական անդամները նշանակենք

$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, իսկ բացասական անդամների բացարձակ արժեքները՝ $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$: Այսպիսով առաջանում են երկու դրական անդամներով շարքեր

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k, \quad (6)$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k, Q_n = \sum_{k=1}^n q_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Այդ դեպքում՝ $A_n = P_m - Q_k$, $A_n^* = P_m + Q_k$ ($n = m+k$): Ուրեմն՝

$$P_m = \frac{1}{2}(A_n^* + A_n), Q_k = \frac{1}{2}(A_n^* - A_n), \quad (7)$$

որտեղից հետևում է (5), (6) դրական անդամներով շարքերի գուգամիտությունը:

Եթե այժմ (1) շարքից անցնենք նրա տեղափոխված (3) շարքին, ապա դա կնշանակի (5) և (6) շարքերից անցնել նրանց որոշակի տեղափոխված շարքերին: Դանաձայն վերը ապացուցածի, դրանից չի խախտվի (5), (6) շարքերի գուգամիտությունը և չի փոխվի նրանց գումարը և, ուրեմն նույնը կարելի է ասել նաև (1)-ի տեղափոխված (3) շարքի մասին: ■

Պայմանական գուգամետ շարքերը օժտված չեն տեղափոխական հանկությամբ: Ենիշտ է հետևյալ թեորեմը:

Ոիմանի թեորեմը:

Եթե տրված է պայմանական գուգամետ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ապա

1° ինչպիսի B թիվ էլ վերցնենք, կգտնվի (1)-ի այնպիսի տեղափոխված շարք, որ նրա գումարը հավասար լինի B -ի,

2° գոյություն ունի տեղափոխված շարք, որի գումարն է $+\infty$ $(-\infty, \infty)$:

3° գոյություն ունի նաև տեղափոխված շարք, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունը չունի ոչ վերջավոր ոչ էլ անվերջ սահման:

Ապացուցում: Այստեղ կօգտագործենք թեորեմ 2-ի նշանակումները: Ունենք՝ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* = +\infty$, ուրեմն, համաձայն (7)-ի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = +\infty:$$

Այստեղից հետևում է, որ ցանկացած ոչ բացասական n ամբողջ թվի համար

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m p_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m q_k = +\infty: \quad (8)$$

Նախ ապացուցենք 1'-ը: Ըստ (8)-ի կարող ենք ընտրել (5) շարքի առաջին (փոքրագույն) n_1 , քանակով անդամներ, որ $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > B$: Այնուհետև կարող ենք ընտրել փոքրագույն n_2 քանակով (6) շարքի q_1, q_2, \dots, q_{n_2} , անդամներ այնպես, որ առաջին անգամ տեղի ունենա $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n_2}) < B$ անհավասարությունը: Նույն սկզբունքով Է՛ռ, այնպիսին, որ,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n_2}) + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \dots + p_{n_3}) > B,$$

Է՛ռ, այնպիսին, որ՝

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n_2}) + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \dots + p_{n_3}) - (q_{n_3+1} + q_{n_3+2} + \dots + q_{n_4}) < B:$$

Այս պրոցեսը անվերջ շարունակենք ամեն անգամ գումարելով (հանելով) մինիմալ քանակով p_k (q_k)-եր այնպես, որ ստացված S_n գումարի և B -ի տարրերության մոդուլը չգերազանցի վերջին (n -րդ) գումարելիին: Այսպիսով, տեղափոխված շարքի S_n մասնակի գումարը բացարձակ մեծությանը տարբերվում է B -ից իր n -րդ անդամով ($(n=1, 2, \dots)$), որն անվերջ փոքր է, քանի որ (1) շարքը գուգամետ է: Ուրեմն, ստացված շարքի գումարը B -ն է: Դաշվի առնելով խնդիր 1.-ը, և վերացնելով փակագժերը, կստանանք (1)-ի տեղափոխված շարքը, որի գումարը նույնական է:

Այժմ ցույց տանք, որ գոյություն ունի (1)-ի այնպիսի տեղափոխություն, որի գումարը $+\infty$ -ն է: Պարզ է, որ Է՛ռ, այնպիսին որ՝ $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > I$: Ստացվածին գումարենք մեկ բացասական ան-

դամ $(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_i}) + (-q_i)$ (դա հարկավոր է միայն նրա համար որ ստացվի տեղափոխական շարք): Այնուհետ, $\exists n_2$ այնպիսին որ՝

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_i}) + (-q_i) + (p_{n_i+1} + p_{n_i+2} + \dots + p_{n_2}) > 2:$$

k -րդ քայլին կունենանք՝

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_i}) + (-q_i) + \dots + (p_{n_{k-1}+1} + \dots + p_{n_k}) > k \quad (k = 1, 2, \dots):$$

Պարզ է, որ ստացված տեղափոխված շարքի գումարն է $+\infty$: Նույն կերպ ապացուցվում են թեորեմի մյուս պնդումները, դա թող-նենք ընթերցողին իբրուրույն աշխատանքի համար: ■

Օրինակ 1: Դիտարկենք պայմանական գուգամետ տեղափոխված շարքը՝

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots : \quad (9)$$

Եթե $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ը (9) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է, ապա՝

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{2} = S: \end{aligned}$$

Դաշվի առնելով այն, որ (9) շարքի a_n ընդհանուր անդամը ան-վերջ փոքր է, ստանում ենք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n} + a_{3n+1}) = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n+1} + a_{3n+2}) = S:$$

Ուրեմն՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{2} \cdot \ln 2$: Այսպիսով, այս տեղափոխությունը երկու անգամ փոքրացրեց շարքի գումարը:

II ՖՈՒՆԿԻՈՆԱԼ ԴԱՏՈՂԱԿԱՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԾԱՐՔԵՐ

1. ՀԱՎԱՍԱՐԱՎԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

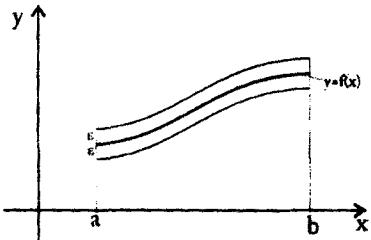
Սահմանում 1: Դիցուք տրված են $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ ֆունկիաների հաջորդականություն (ֆունկցիոնալ հաջորդականություն), որոշված միևնույն X բազմության վրա և ցանկացած $x_0 \in X$ -ի համար $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ թվային եաջորդականությունը գուգամիտում է վերջավոր թվի: Այսպիսով ծնվում է ֆունկցիա (սահմանային ֆունկցիա), որոշված X -ում՝ $\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$: Դա նշանակում է՝

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon}(x) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}(x) : r_n(x) < \varepsilon.$$

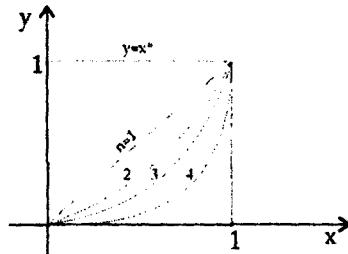
$$(r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|):$$

Այս փաստը կոչվում է կետ առ կետ գուգամիտություն: Իսկ եթե բոլոր x -երի համար գտնվում է ընդհանուր համար, ապա ասում են, որ առկա է հավասարաչափ գուգամիտություն X բազմության վրա: Այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall x \in X : r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon: \quad (1)$$



Ակ. 1



Ակ. 2

Հավասարաչափ գուգամիտությունը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ և $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տեղաշարժենք ε չափով վերև և ներքև, նրանցով սահմանափակված պատկերը անվանենք գրաֆիկի ε շերտ: Այն, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ գու-

գամիտում է $f(x)$ -ին նշանակում է, որ ինչ-որ համարից սկսած հաջորդականության բոլոր անդամների գրաֆիկները հայտնվում են այդ ε շերտում (տես նկ.1):

Փորձելով կիրառել այս մեկնաբանությունը $f_n(x) = x^n, x \in [0;1]$

ֆունկցիոնալ հաջորդականության նկատմամբ (տես նկ.2), անմիջապես ստանում ենք, որ այն ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$ ում, քանի որ սահմանային ֆունկցիան խզվող է

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(տես նաև ստորև օրինակ 5):

Բերենք հավասարաչափ և ոչ հավասարաչափ զուգամիտության որոշ հայտանիշներ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ X -ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշիի պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N},$$

$$\forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon: \quad (2)$$

Ապացուցում: **Անհրաժեշտություն:** Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է X -ում:

$$\text{Ուրեմն} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}: \quad \text{Այստեղից} \quad \text{ստանում} \quad \text{ենք՝}$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{այսինքն}$$

տեղի ունի Կոշիի պայմանը:

Բավարարություն: Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը բավարարում է Կոշիի պայմանին: Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ և օգտվենք (2)-ից: Դա կմշանակի, որ $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և, ուրեմն՝ զուգամետ [1]: Այսպիսով $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -ը կետ առ կետ զուգամիտում է սահմանային $f(x)$ ֆունկցիային: Այժմ (տես (2))

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon, p \in N, x \in X)$$

պայմանի մեջ անցնենք սահմանի, եթե p -ն ծգուում է անվերջի, կստանանք՝

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon, x \in X):$$

Ուրեմն, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: ■

Թեորեմ 2: Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ X -ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\sup_x r_n(x) \rightarrow 0: \quad (3)$$

Ապացուցում: **Անհրաժեշտություն:** Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է X -ում: Այսինքն, ճշնարիտ է (1)-ը, որտեղից հետևում է, որ $\sup_x r_n(x) \leq \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon)$, ուրեմն՝ $\sup_x r_n(x) \rightarrow 0$:

Բավարարություն: Տրված է, որ $\sup_x r_n(x) \rightarrow 0$:

Այսինքն $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N, \forall n \geq n_\varepsilon : \sup_x r_n(x) < \varepsilon$, որտեղից՝

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X : r_n(x) \leq \sup_x r_n(x) < \varepsilon$:

Ուրեմն $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է X -ում: ■

Միշտ չէ, որ հնարավոր է, կամ հարմար է օգտվել թեորեմ 2-ից: Երբեմն ավելի հարմար են այլ հայտանիշներ:

Թեորեմ 3: (հավասարաչափ զուգամիտության բավարար պայմանը)

Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ X -ում բավարար է որ գոյություն ունենա այնպիսի թվային $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ անվերջ փոքր հաջորդականություն որ՝

$$\forall n \in N, \forall x \in X : r_n(x) \leq c_n \left(c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \right):$$

Ապացուցում: Քանի որ $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ապա՝

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : c_n < \varepsilon :$$

Այստեղից, ստանում ենք՝

$$\forall x \in X, \forall n \geq n_\varepsilon : r_n(x) \leq c_n \leq \varepsilon \Rightarrow r_n(x) \leq \varepsilon (n \geq n_\varepsilon).$$

որն էլ նշանակում է $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -ի հավասարաչափ զուգամիտությունը X -ում: ■

Թեորեմ 4 (ոչ հավասարաչափ զուգամիտության բավարար պայմանը):

Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ X -ում կետ առ կետ զուգամետ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի ոչ հավասարաչափ զուգամետ X -ում բավարար է, որ $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X : r_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ ($\alpha > 0$) (α -ն կարող է լինել և $+\infty$):

Ապացուցում: Այն, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ X -ում նշանակում է՝

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N, \exists x \in X : r_n(x) \geq \varepsilon : \quad (4)$$

Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : r_n(x_n) > \frac{\alpha}{2} = \varepsilon$$

(եթե $\alpha = +\infty$, ապա որպես ε կարելի վերցնել ցանկացած դրական թիվ): Վերցնենք $\forall N$ և ընտրենք $n > \max\{N, N_1\}$: Այդ դեպքում՝ $r_n(x_n) > \varepsilon$ և մենք հանգում ենք (4)-ին: ■

Բնարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Դիցուք $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$: Ակնհայտ է, որ սահմանային ֆունկցիան՝ $f(x) \equiv 0$: Գտնենք կրիտիկական կետերը

$$r_n(x) = f_n(x), r'_n(x) = f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} - 2n \cdot x^{2n-1} =$$

$$= n \cdot x^{n-1} \cdot (1 - 2x^n) = 0, \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[2n]{2}} :$$

Քանի որ $f_n(0) = f_n(1) = 0, f_n(\frac{1}{\sqrt[2n]{2}}) = \frac{1}{4}$, ապա

$\sup_{[0, 1]} r_n(x) = \frac{1}{4} \not\rightarrow 0$: Ուրեմն, այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը

ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$ -ում:

Օրինակ 2: Դիցուք $f_n(x) = \frac{\sin(xn!)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbf{R}$: Ակնհայտ է, որ սահմանային ֆունկցիան՝ $f(x) \equiv 0$ և $r_n(x) \equiv f_n(x)$: Ըստ թեորեմ 3.-ի այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է \mathbf{R} -ում, քանի որ $\forall n, \forall x \in \mathbf{R} : r_n(x) = \frac{|\sin(xn!)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

Օրինակ 3: $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x \geq \delta > 0$: սահմանային ֆունկցիան է $f(x) \equiv 1$: Ուրեմն $r_n(x) = \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+n \cdot \delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: Ըստ թեորեմ 3.-ի այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $[\delta; +\infty)$ -ում:

Օրինակ 4: $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x > 0$ ($f(x) \equiv 0, r_n(x) \equiv \frac{1}{1+nx}$): Այս տեղ նախորդ գնահատականը չի անցնի, քանի որ x -ը որքան ասես մոտ կարող է լինել զրոյին: Օգտվենք թեորեմ 4.-ից, վերցնելով որպես x_n զրոյի ծգտող հաջորդականություն, օրինակ $x_n = \frac{1}{n}$:
 $r_n(x_n) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: Այսպիսով, այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $(0;+\infty)$ -ում:

Օրինակ 5: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$: սահմանային ֆունկցիան է $f(x) = 0$ ($x \in [0;1]$), $f(1) = 1$: Այն խզվող է:

Դավասարաչափ զուգամիտության սահմանումից պարզ է, որ եթե առկա է հավասարաչափ զուգամիտություն ինչ-որ X միջակայքում, ապա դա այդպես է ցանկացած X , ($X \subset X$) միջակայքում: Ուրեմն, եթե ինչ-որ միջակայքում չկա հավասարաչափ զուգամիտություն, ապա դա չկա նաև ավելի լայնի վրա: Ցույց տանք, որ տվյալ դեպքում չկա հավասարաչափ զուգամիտություն $[0;1]$ -ում: Իրոք,

դիցուք $x_n = 1 - \frac{1}{n}$:

Այդ դեպքում՝ $r_n(x_n) = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} > 0$: Հետևաբար

դիտարկվող հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է գուգամետ $[0;1]$ -ում: Նկատենք, որ տվյալ դեպքում f_n ֆունկցիաները անընդհատ են ($\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C[0;1]$), բայց սահմանային ֆունկցիան՝ f -ը՝ խզվող:

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ֆունկցիոնալ հաջորդականություն, որոշված X միջակայքում:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (5)$$

շարքը կոչվում է ֆունկցիոնալ շարք, որոշված X միջակայքում:

Եթե $\forall x \in X$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ -ը որպես թվային շարք գուգամետ է, այ-

սինքն շարքի $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) մասնակի գումարների

ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը գուգամետ է (գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$), ապա կասենք, որ (5) շարքը կետ առ կետ գոգամետ է X -ում, իսկ $S(x)$ -ը կանվանենք ֆունկցիոնալ շարքի գումար: Իսկ եթե $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ է գուգամետ X -ում, ապա կասենք, որ (5) ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է X -ում:

Դիտողություն 1: ճշնարիտ է նաև հակառակը՝ յուրաքանչյուր $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($x \in X$) ֆունկցիոնալ հաջորդականությանը կարելի է համապատասխանեցնել հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքը՝

$f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + \dots + (f_n(x) - f_{n-1}(x)) + \dots$, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է՝

$$S_n(x) \equiv f_n(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}) :$$

Այդ պատճառով ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և ֆունկցիոնալ շարքերի հատկությունների, մասնավորապես հավասարաչափ գուգագամիտության հայտանիշների միջև կա մեծ նմանություն:

Դիտողություն 2: $\sum_{k=l}^{\infty} u_k(x)$ ֆուկցիոնալ շարքը և $\int_a^{\infty} f(x, \xi) d\xi$

պարամետրից կախված անհսկական ինտեգրալը, զուգամիտության իմաստով չափազանց նման են իրար: Այդ պատճառով ֆունկցիոնալ շարքերը գրեթե օժտված են բոլոր այն հատկություններով, ինչ պարամետրից կախված անհսկական ինտեգրալները:

Դիտողություն 3: Եթե $\sum_{k=l}^{\infty} u_k(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը կետ առ կետ զուգամետ է X -ում, ապա այդպիսին է նաև n -մնացորդ շարքը $(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x))$ և նրա գումարն է՝ $S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$: Ուրեմն

$\sum_{k=l}^{\infty} u_k(x)$ շարքի հավասարափափ զուգամիտությունը, ըստ սահմանման, համարժեք է $r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right|$ ֆունկցիոնալ

հաջորդականության հավասարաչափ զրոյի ձգտելուն:

Բերենք ֆունկցիոնալ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ:

Թեորեմ 5: Որպեսզի (5) ֆունկցիոնալ շարքը լինի հավասարաչափ զուգամետ X միջակայքում անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշիի պայմանը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall x \in X, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon: \quad (6)$$

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է թեորեմ 1.-ից, եթե որպես ֆունկցիոնալ հաջորդականություն դիտարկենք

$$S_n(x) = \sum_{k=l}^n u_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

Թեորեմ 6 (Կայերշտրասի մաժրամտ հայտանիշը):

Եթե գոյություն ունի այնպիսի $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականություն, որ շարք $\sum_{n=l}^{\infty} c_n$ -ը զուգամետ է և՝

$$\forall n, \forall x \in X : |u_n(x)| \leq c_n \quad (c_n \geq 0),$$

ապա (5) ֆունկցիոնալ շարքը կինի հավասարաչափ գուգամետ X միջակայքում (c_n -ը կոչվում է $u_n(x)$ -ի մաժորանտ):

Ապացուցում: Քանի որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ -ը գուգամետ է, ապա նրա համար ճշմարիտ է Կոշիի գուգամիտության սկզբունքը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon :$$

Այստեղից և թեորեմի պայմաններից ստանում ենք՝

$$\forall n \geq n_{\varepsilon}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon :$$

$$\text{Ուրեմն: } \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon \quad (n \geq n_{\varepsilon}, p \in \mathbb{N}, x \in X)$$

Որն էլ նշանակում է (5) ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ գուգամիտությունը X միջակայքում: ■

Դիտողություն 4: Կարող է $u_n(x)$ -ը չունենա մաժորանտ, բայց շարքը լինի հավասարաչափ գուգամետ, օրինակ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ ($x \in [\delta; \pi - \delta]$, $\delta \in (0; \pi)$) (տես ստորև օրինակ 8.)

Օրինակ 6: Դիտարկենք հետևյալ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n \cdot n!)}{n^2 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$) շարքը: ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը $\left| \frac{\cos(x^n \cdot n!)}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2}$:

Իսկ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ գուգամետ է: Ուրեմն, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, դիտարկվող ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է \mathbb{R} -ում:

Թեորեմ 7: Որպեսզի (5) ֆունկցիոնալ շարքը լինի հավասարաչափ գուգամետ X միջակայքում անհրաժեշտ է, որ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ ծգտի զրոյի:

Ապացուցում:Տրված է, որ (5) ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է X միջակայքում և, ուրեմն նրա համար տեղի ունի կոչիի պայմանը (տես (6)): Վերցնելով (6)-ում մասնավորապես $p=1$, կստանանք՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X : |u_{n+1}(x)| < \varepsilon :$$

Այստեղից հետևում է, որ $u_n(x)$ -ը հավասարաչափ ծգուում է զրոյի X -ում: ■

Դիտողություն 5: Թեորեմից հետևում է, որ եթե $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -ը հավասարաչափ չի ծգուում զրոյի X -ում, ապա (5) ֆունկցիոնալ շարքը հասարաչափ գուգամետ չէ X -ում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \left(u_n(x) = \frac{x^n}{n!} \right)$ շարքը (ստորև)

կտեսնենք, որ այս շարքի գումարն է՝ e^x): Այն կետ առ կետ գուգամետ է թվային ուղղի վրա ($\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 < 1$): Քանի որ $\frac{x^n}{n!}$ -ը

ոչ հավասարաչափ է ծգուում զրոյի ($x_n = n!$, $u_n(x_n) = (n!)^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$), ուստի նշված շարքը ոչ հավասարաչափ է գուգամետ \mathbb{R} -ում:

Թեորեմ 8 (Արելի հայտանիշը):

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ -շարքը հավասարաչափ գուգամետ է X -ում, իսկ

$\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը $\forall x (x \in X)$ -ի համար, ըստ n -ի մոնոտոն է և՝ հավասարաչափ սահմանափակ՝

$$\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : |v_n(x)| \leq C.$$

ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$ շարքը հասարաչափ գուգամետ է X -ում:

Ապացուցում: Քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - շարքը հավասարաչափ գուգամետ է X -ում, ապա՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C} :$$

Օգտվելով թվային շարքերի համար Աբելի լեմմայից (տես 1, 3, (9)), կստանանք՝

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \cdot v_n(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \cdot (|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|) < \\ < \frac{\varepsilon}{3C} (C + 2C) = \varepsilon :$$

Ուրեմն՝ (տես թեորեմ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$ շարքը հավասարաչափ

գուգամետ է X -ում: ■

Թեորեմ 9 (Դիրիխլեի հայտանիշը):

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ -շարքի նաևնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է՝

$$\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq C,$$

իսկ $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճելով կամ չնվազելով հավասարաչափ ծգություն է գրոյի X -ում, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է X -ում:

Թեորեմի ապացույցը, ըստ եռեյան չի տարրելվում թվային շարքերի համար Դիրիխլեի հայտանիշի ապացույցից, միայն պետք է հաշվի առնել այստեղ առկա լրացուցիչ պայմանները, օրինակ՝ $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -ի հավասարաչափ գրոյի ծգութելը: Այդ ռեաքտում թեորեմ 5.-ի պայմանները տեղի կունենան:

Օրինակ 8: Դիրիխլեի նիտարկենք $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos kx, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kx$

($x \in [\delta; \pi - \delta]$, $\delta \in (0; \pi)$). $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ -ն ու $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ -ն անվերջ փոքր, մոնոտոն չաճող թվային հաջորդականություններ են: Քանի որ $\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$, ապա ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի դիտարկվող շարքերը հավասարաչափ գուգամետ են նշված միջակայքում:

Օրինակ 9: Դիտարկենք

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{x}{k}} \cdot a_k \cdot \cos(kx), \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{x}{k}} \cdot b_k \cdot \sin(kx)$$

շարքերը ($x \in [\delta; \pi - \delta]$, $\delta \in (0; \pi)$), որտեղ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, ու $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները բավարարում են նախորդ օրինակի պայմաններին: Քանի որ $e^{-\frac{x}{k}}$ հաջորդականությունը ըստ k -ի մոնուտոն աճող է և հավասարաչափ սահմանափակ՝ $e^{-\frac{x}{k}} < 1$, $x \in [\delta; \pi - \delta]$, ապա, ըստ Աբելի հայտանիշի դիտարկվող շարքերը հավասարաչափ գուգամետ են $x \in [\delta; \pi - \delta]$ -ում:

2. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԱՅՈՐԴԱՎԱՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԸԱՐՁԵՐԻ ԴԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Մենք արդեն գիտենք, որ եթե ֆունկցիոնալ հաջորդականության անդամները անընդհատ են, ապա պարտադիր չեն, որ սահմանային ֆունկցիան և լինի անընդհատ (տես II.1, օրինակ 5): Նույն իրավիճակն է նաև ֆունցիոնալ շարքերի հանար:

$$\text{Օրինակ 1: Դիտարկենք հետևյալ շարքը } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2 + 1)^n} \quad (x \in [0; 1]):$$

Նրա անդամները $x \in (0; 1]$ դեպքում կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա $q = \frac{1}{x^2 + 1}$ ($0 < q < 1$) հայտարարով:

Շարքի գումարն է՝ $S(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} = 1$, $x \in (0; 1]$, իսկ

$S(0) = 0$: Շարքի անդամները անընդհատ են, բայց նրա գումարը՝ խզվող: Քեզտ է տեսնել, որ շարքը ոչ հավասարաչափ է գուգամետ $[0; 1]$ -ում: Իրոք՝

$$r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^k} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^n},$$

$$\text{իսկ } r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1} > 0 \text{ (տես II, 1, թեորեմ 4):}$$

Այս օրինակները ցույց են տալիս հավասարաչափ գուգամիտության կարևորությունը:

Եշմարիս են հետևյալ թեորեմները ֆունկցիոնալ շարքերի մասին: (Փունկցիոնալ հաջորդականությունների մասին համապատասխան թեորեմները կարելի է ապացուցել նույն կերպ, կամ կարելի է բերել ֆունկցիոնալ շարքերի):

Թեորեմ 1 (սահմանային անցման մասին):

Դիցուք տրված է $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը, որը որոշված է և հավասարաչափ գուգամետ է X -ում: Եթե $\forall k : u_k \in C(X)$, ապա շարքի գումարը՝ $S \in C(X)$: Այսինքն, անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված հավասարաչափ գուգամետ շարքի գումարը ևս անընդհատ ֆունկցիա է:

Ապացուցում: Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ և ապացուցենք, որ S -ը անընդհատ է x_0 -ում: Շարքի հավասարաչափ գուգամիտությունից հետևում է՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X : |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} :$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} & |S(x) - S(x_0)| = \\ & = |(S(x) - S_{n_\varepsilon}(x)) + (S_{n_\varepsilon}(x) - S_{n_\varepsilon}(x_0)) + (S_{n_\varepsilon}(x_0) - S(x_0))| \leq \\ & \leq |S(x) - S_{n_\varepsilon}(x)| + |S(x_0) - S_{n_\varepsilon}(x_0)| + |S_{n_\varepsilon}(x_0) - S(x_0)| < \\ & < \frac{2\varepsilon}{3} + |S_{n_\varepsilon}(x) - S_{n_\varepsilon}(x_0)| : \end{aligned}$$

Քանի որ $S_{n_\varepsilon}(x)$ -ը անընդհատ ֆունկցիաների վերջավոր գումար է, ուրեմն այն անընդհատ է x_0 -ում: Այսինքն՝

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |S_{n_\varepsilon}(x) - S_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} :$$

Որտեղից՝ $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$ ($|x - x_0| < \delta$):

Այսպիսով՝ S -ը անընդհատ է կամայական կետում, ուրեմն $S \in C(X)$: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմ 1.-ի պայմանները բույլ են տալիս անցնել սահմանի շարքի գումարի նշանի տակ: Իրոք՝

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0}} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0}} u_n(x): \quad (1)$$

Թեորեմ 2 (շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրման մասին):

Դիցուք տրված է $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը, որը որոշված է և հավասարաչափ գուգամետ է $[a; b]$ -ում և $\forall k \in N : u_k \in C[a; b]$ (ըստ թեորեմ 1-ի, $S \in C[a; b]$): Այդ դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ -շարքը գուգամետ է և, տրված ֆունկցիոնալ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել, այսինքն՝

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx: \quad (2)$$

Ապացուցում: Քանի որ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է $[a; b]$ -ում, ապա՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in [a; b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

որտեղ՝ $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ ($\Rightarrow r_n \in C[a; b]$):

$$\begin{aligned} \text{Ուրեմն՝ } S(x) &= S_n(x) + r_n(x) \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \quad (n \geq n_\varepsilon): \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \quad (n \geq n_\varepsilon):$$

Դա նշանակում է, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ -շարքը զուգամետ է և, նրա գումարը կ' $\int_a^b S(x) dx$ -ը: ■

Թեորեմ 3 (շարքի անդամ առ անդամ ածանցելու մասին):

Դիցուք $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը կետ առ կետ զուգամետ է $[a; b]$ -ում և՝ $\forall k \in \mathbb{N} : u_k \in C^1[a; b]$: Ենթադրենք նաև որ $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = S'(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[a; b]$ -ում:

Այդ դեպքում՝ $\forall x \in X, \exists S'(x)$ և այն ստացվում է, անդամ առ անդամ ածանցելով $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը՝

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}: \quad (3)$$

Ապացուցում: Թեորեմ 1-ի համաձայն

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x): \quad (4)$$

շարքի գումարը $S'(x)$ -ը անընդհատ է $[a; b]$ -ում:

Վերցնենք կամայական $x \in [a; b]$ և օգտվելով թեորեմ 2.-ից, ինտեգրենք (4)-ը ($S'(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t), t \in [a; b]$) a -ից x սահմաններում, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \int_a^x S'(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a): \end{aligned} \quad (5)$$

(5)-ի ծախ մասը, $S'(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնոր-

իիվ, ունի ածանցյալ $\exists \frac{d}{dx} \int_a^x S^*(t) dt = S^*(x)$, ուրեմն (5)-ի աջ մասը

ևս ունի ածանցյալ, հավասար $S'(x)$ -ի: Այսպիսով՝ $S^*(x) \equiv S'(x)$, այսինքն ստացանք (3)-ը: ■

Դիտողություն 2: Թեորեմ 3.-ի պայմանները կարելի են «քուլացնել», օրինակ բավական է պահանջել, որ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը

լինի զուգամետ $[a; b]$ -ի որևէ կետում: Թեորեմի մնացած պայմաններից հետևում է այդ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը $[a; b]$ -ում:

Ինքնուրույն լուծելու համար առաջարկենք հետևյալ օրինակ-ները:

Օրինակ 2: Ապացուցել, որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(1+x^2)^n}$)-ը

հավասարաչափ զուգամետ է \mathbb{R} -ում, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ շարքը զուգա-

մետ է կետ առ կետ, բայց ոչ հավասարաչափ \mathbb{R} -ում:

Օրինակ 3: Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \quad (u_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2})$$

շարքի գումարը՝ $S(x) \equiv 0$ $[0; 1]$ -ում (այն անընդհատ ֆունկցիա է),

բայց շարքը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0; 1]$ -ում: Այս օրինակը

ցույց է տալիս, որ թեորեմ 1.-ում հավասարաչափ զուգամիտության պայմանը բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ շարքի գումարի անընդհատության համար:

Օրինակ 4: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ $[0; 1]$ -ում (կիրառել հավասարաչափ զուգամիտության Աբելի հայտանիշը): Անցնելով սահմանի շարքի գումարի նշանի տակ, եթե $x \rightarrow 1-0$ -ի (տես թեորեմ 1), ցույց տալ, որ

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

3. ԱՍՏԻճԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՁԵՐ

Ֆունկցիոնալ շարքի կարևոր մասնավոր դեպք է հանդիսանում աստիճանային շարքը

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n : \quad (1)$$

Այն, $x - x_0 = t$ նշանակում է բերվում t $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ տեսքի: Ուստի, բավական է ուսումնասիրել այդ տեսքի աստիճանային շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \quad (2)$$

Այն x կետերի բազմությունը, որտեղ գուգամետ է (2) շարքը կոչվում է նրա գուգամիտության տիրույթ (X): Պարզ է, որ $0 \in X$: Գոյություն ունեն աստիճանային շարքեր, որոնք գուգամետ են միայն զրո կետում, օրինակ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{n+1} x^n$ շարքը: Եթե $x \neq 0$, ապա այդ շարքի n -րդ անդամը չի ծգում զրոյի: Կան շարքեր, որոնց գուգամիտության տիրույթը \mathbb{R} -ն է: Օրինակ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: Եթե $x \neq 0$, ապա ըստ

Դ'Ալամբերի հայտանիշի շարքը բացարձակ գուգամետ է ցանկացած կետում:

Աստիճանային շարքի գուգամիտության տիրույթի կառուցվացքի մասին շատ բան է ասում հետևյալ լեննան:

Աբելի լեմմա:

Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ աստիճանային շարքը գուգամետ է $x_0 \neq 0$ կետում, ապա այն բացարձակ գուգամետ է ցանկացած $|x| < |x_0|$ պայմանին բավարարող x կետում:

Ապացուցում: Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ շարքը գուգամետ է, ապա $a_n x_0^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, որտեղից հետևում է այդ հաջորդականության սահմանափակությունը՝ $\exists C > 0, \forall n : |a_n x_0^n| \leq C$: Այժմ դիտարկենք

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը ($|x| < |x_0|$):

$$\text{Ունենք՝ } |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq C \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \left(\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \right): \text{ և, քանի որ}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \text{ շարքը զուգամետ է, ապա այստեղից ստանում ենք } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

շարքի բացարձակ զուգամիտությունը: ■

Դետևանք 1: Այս լեմնայից ստացվում է, որ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը «խոռոչներ» ունենալ չի կարող՝ եթե շարքը զրոյից տարբեր կետում զուգամետ է, ապա այն զուգամետ է զրոյի նկատմամբ համաչափ միջակայթում (ծայրակետերում այդ համաչափությունը կարող է խախտվել):

Դետևանք 2: Աբելի լեմնայից հետևում է նաև, որ եթե զուգամիտության տիրույթը նի կետանի չէ, ապա այն պարունակում է դրական թվեր:

Թեորեմ 1 (զուգամիտության տիրույթի մասին):

$$\text{Դիցուք } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ շարքի զուգամիտության (} X \text{) տիրույթը պարունակում է զրոյից տարբեր քայլությունն է:}$$

Նակում է զրոյից տարբեր x' կետեր և $X' = \{|x'|\}$ այդպիսի կետերի բացարձակ արժեքների բազմությունն է:

1. Եթե X' -ը սահմանափակ չէ վերևից, ապա շարքը զուգամետ է ամենուր ($X = \mathbb{R}$):

2. Եթե X' -ը սահմանափակ է վերևից և, ուրեմն $\exists sup X' = R > 0$ ($R \in \mathbb{R}$), ապա ցանկացած, $|x| < R$ պայմանին բավարարող x կետում շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x| > R$ պայմանին բավարարող x կետում՝ տարամետ:

Ապացուցում: Նախ, եթե X' -ը սահմանափակ չէ վերևից, ապա $\forall x \in \mathbb{R} \exists |x'| \in X' : |x| < |x'|$: Այստեղից, ըստ Աբելի լեմնայի

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, ուրեմն $X = \mathbb{R}$:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ X' -ը սահմանափակ է վերևից և դիցուք՝ $\exists sup X' = R > 0$ ($R \in \mathbb{R}$): Վերցնենք $\forall x, |x| < R$:

R -ի սահմանումից հետևում է, որ $\exists |x'_0| \in X' : |x| < |x'_0| \leq R$: Ըստ

Աբելի լեմմայի, x կետում շարքը բացարձակ գուգամետ է:

Դիցուք, այժմ x կետը այնպիսին է, որ՝ $|x| > R$: Այստեղից հետևում է, որ $|x| \notin X'$, այսինքն x կետում շարքը տարամետ է: ■

$R = \sup X'$ կոչվում է գուգամիտության շառավիղ: Եթե X' -ը անսահմանափակ է վերևից, ապա (\sup սահմանման)՝ $R = +\infty$: Ըստ թեորեմի, դա նշանակում է, որ (2) շարքը գուգամետ է ամենուր՝ $X = \mathbb{R}$: Այն դեպքում եթե գուգամիտության տիրույթը բաղկացած է նիստի մեկ կետից (զրոյից), ապա, ըստ սահմանման՝ $R = 0$:

Դիտողություն 1: Այն դեպքում, եթե աստիճանային շարքի R գուգամիտության շառավիղը դրական թիվ է, ապա այդ շարքի գուգամիտության տիրույթը $\langle -R; R \rangle$ միջակայքը (այն կարող է լինել բաց, փակ, կիսաբաց): Ծայրակետերում գուգամիտության հարցը, ընդհանրապես ասած, յուրաքանչյուր կոնկրետ օրինակում ունի հատուկ քննարկման կարիք:

Ստացված արդյունքը ցույց է տալիս գուգամիտության շառավիղի գունեներու կարևորությունը: Այս հարցի պատասխանը պատկանում է Կոշիին և Յադամարին: Զևակերպենք համապատասխան թեորեմը առանց ապացույցի (ապացույցը տես [3]):

Թեորեմ 2: Եթե $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ապա՝

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l > 0, (l \in \mathbb{R}) \\ 0, & l = +\infty \\ +\infty, & l = 0 \end{cases} : \quad (3)$$

(3)-ը կոչվում է Կոշի-Յադամարի բանաձև:

Դիտողություն 2: Եթե գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ սահման՝ $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, ապա գոյություն ունի նաև $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = d$:

$$\text{Ուրեմն՝ } R = d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| :$$

* Յադամար Ժակ (1865-1963)-ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Օրինակ 1:Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n = \left(\frac{(3+(-1)^n 2)^n}{5^n + 1} \right)^n$) շարքի գումարը:

գամիտության տիրույթը: Օգտվենք (3) բանաձևից:

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+(-1)^n 2)^n}{5^n + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5^{2k}}{5^{2k} + 1} = 1:$$

Ուրեմն՝ $R = 1$: Այժմ ուսումնասինք $(-1; 1)$ միջակայքի ծայրակետերում շարքի գուգամիտության հարցը: Եթե $n = 2k$, ունենք

$$\begin{aligned} |a_{2k} \cdot (\pm 1)^{2k}| &= \left(\frac{5^{2k}}{5^{2k} + 1} \right)^{2k} = (1 + 5^{-2k})^{-2k} = \\ &= \left((1 + 5^{-2k})^{5^{2k}} \right)^{-2k \cdot 5^{-2k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} e^0 = 1 \neq 0: \end{aligned}$$

Այսպիսով, տվյալ շարքի գուգամիտության տիրույթն է $(-1; 1)$ բաց միջակայքը:

Օրինակ 2: Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n = \frac{n!}{(2n)!}$) շարքի գուգամիտության տիրույթը: Ունենք՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty = R: \quad \text{Այսպիսով,}$$

շարքի գուգամիտության տիրույթն է R -ը:

Ուսումնասիրենք աստիճանային շարքերի հատկությունները:

Թեորեմ 3: Դիցուք (2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ շարքի գուգամիտության

շառավիղը՝ R -ը դրական թիվ է: Այդ դեպքում, ցանկացած r ($0 < r < R$) թվի համար (2) աստիճանային շարքը հավասարաչափ գուգամետ է $[-r; r]$ հատվածում:

Եթե $R = +\infty$, ապա այդ աստիճանային շարքը հավասարաչափ գուգամետ է ցանկացած $[-r; r]$ ($r > 0$) հատվածում:

Ապացուցում: Բանի որ $x = r$ կետում շարքը բացարձակ գուգամետ է, ապա, հաշվի առնելով $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ ($x \in [-r; r]$) զնահատականը և օգտվելով շարքի հավասարաչափ գուգամիտության Վա-

յերշտրասի հայտանիշից (տես II.1, թ. 6), կստանանք (2) շարքի հավասարաչափ գուգամիտությունը $[-r; r]$ -ում: ■

Դիտողություն 3: Թեորեմի պնդումը, ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ $(-R; R)$ -ում: Իրոք՝ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ շարքի գուգամիտության շառավիղը հավասար է մեկի, բայց այն հավասարաչափ գուգամետ չէ $(-1; 1)$ -ում, քանի որ $r_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}$ -ը չի ձգտում հավասարաչափ գրոյի $(-1; 1)$ -ում՝

$$\left| r_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \quad \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{e}\right)$$

(տես II, թ.4.):

Թեորեմ 4: Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ շարքի գուգամիտության շառավիղը՝ R -ը դրական թիվ է, ապա շարքի գումարը $S(x)$ -ը անընդհատ է $(-R; R)$ -ում: Իսկ, եթե $R = +\infty$, ապա $S(x)$ -ը անընդհատ է \mathbb{R} -ում:

Ապացուցում: Եթե R -ը դրական թիվ է, ապա՝ $\forall x \in (-R; R) \exists r \in (0; R) : x \in [-r; r]$: Քանի որ աստիճանային շարքը հավասարաչափ գուգամետ է $[-r; r]$ -ում և, շարքի անդամները անընդհատ են այդտեղ, ապա շարքի գումարը ևս կլինի անընդհատ $[-r; r]$ -ում (տես II, 2, թ1), ուրեմն նաև x կետում: Եթե $R = +\infty$, ապա որպես r կարելի է վերցնել ցանկացած դրական թիվ: ■

Թեորեմ 5: Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ շարքի գուգամիտության շառավիղը՝ R -ը դրական թիվ է և $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \right)$ շարքը գուգամետ է թեկուզ ոչ բացարձակ, ապա տվյալ շարքը հավասարաչափ գուգամետ է $[0; R]$ ($[-R; 0]$)-ում:

Ապացուցում: Դիցուք, որոշակիության համար գուգամետ է

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ շարքը: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$ և օգտվենք հավասարաչափ զուգամիտության Աբելի հայտանիշից: Ծարք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ զուգամետ է (հավասարաչափ), իսկ $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է, և՝ հավասարաչափ սահմանափակ՝ $\left|\frac{x}{R}\right|^n \leq 1$: ■

Թեորեմ 6 (Աբելի):

Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքը զուգամետ է նաև $x=R$ կետում, ապա շարքի գումարը անընդհատ է այդ կետում (իհարկե ծախսից) $\lim_{x \rightarrow R-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$:

Թեորեմի ապացույցը անհիշապես հետևում է նախորդ թեորեմից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկությունից (տես 2, թ.1):

Թեորեմ 7: Եթե երկու $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ և $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքերը ունեն միևնույն գումարը, զոր պարունակող ինչոր միջակայքում, ապա նրանց գործակիցները այդտեղ նույնաբար համընկնում են:

Ապացուցում: Նշված միջակայքում ունենք՝

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Աերցնելով այս նույնության մեջ $x=0$, կստանանք՝ $a_0 = b_0$: Դաշվի առնելով ստացվածը, բաժանելով x -ի վրա և անցնելով սահմանի երբ x -ը ծգտում է զրոյի, կստանանք՝ $a_1 = b_1$: Պրոցեսը այդպես շարունակելով կստանանք թեորեմի պնդումը: ■

Խնդիր 1: Օգտվելով թեորեմ 7.-ից ապացուցել, որ եթե զույգ (կենտ) ֆունկցիան է վերլուծվում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ տեսքի աստիճանային

շարքի, ապա նրա վերլուծության մեջ մասնակցում են x -ի միայն զույգ (կենտ) աստիճաններ:

Թեորեմ 8 (աստիճանային շարքի ինտեգրման մասին):

Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստածանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$ (այն կարող է լինել և անվերջ): Այդ դեպքում շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել՝

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < R): \quad (4)$$

Ընդ որում, եթե $(-R; R)$ միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը զուգամետ է, ապա (4)-ը ճշնարիտ է նաև այդ կետում:

Թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է թեորեմներ 3, 5-ից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկություններ:

Թեորեմ 9 (աստիճանային շարքի ածանցման մասին):

Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստածանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$: Այն կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել $(-R; R)$ -ում՝

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}: \quad (5)$$

Ընդ որում, եթե $(-R; R)$ միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում ածանցված շարքը զուգամետ է, ապա (5)-ը ճշնարիտ է նաև այդ կետում:

Թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է թեորեմներ 3, 5-ից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկություններ (հաշվի առնենք նաև այն, որ $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ուրեմն ըստ Կոշի-Աղամարի բանաձևի

(5)-ի զուգամիտության շառավիղը նույնպես R է):

Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 10: Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքի գուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$, ապա այն կարելի է ցանկացած անգամ անդամ առ անդամ ինտեգրել (ածանցել) $(-R; R)$ -ում, ընդորում, դրանից չի փոխվում գուգամիտության շառավիղը:

4. ԹԵՅԼՈՐԻ ԸԱՐՁԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է $x_0 \in X$ կետում (f -ը ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ x_0 -ում): Այդ դեպքում իմաստ ունի դիտարկել հետևյալ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ ($x, x_0 \in X$) աստիճանային շարքը: Այն կոչվում է f ֆունկցիաի Թեյլորի շարք:

Հարց է առաջանում՝ ինչպիսի՞ն լինի f ֆունկցիան, որ այն վերլուծվի իր Թեյլորի շարքի: Նկատենք (տես [1]), որ վերը նշված պայմանների առկայությամբ f ֆունկցիան ներկայացվում է Թեյլորի բանաձևով՝ $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x, x_0)$ ($n = 1, 2, \dots$), որ-

տեղ $r_n(x, x_0)$ -ն Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամն է:

Նկատենք նաև, որ Թեյլորի բազմանդամը

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

հանդիսանում է Թեյլորի շարքի n -րդ մասնակի գումարը:

Թեորեմ 1: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է $x_0 \in X$ կետում: Որպեսզի f ֆունկցիան $x \in X$ կետում վերլուծվի իր Թեյլորի շարքի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը լինի անվերջ փոքր՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, x_0) = 0$:

Ապացուցում: f ֆունկցիաի վերլուծվելը իր Թեյլորի շարքի համարժեք է նրան, որ $f(x) - P_n(x, x_0) = r_n(x, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: ■

Թեորեմ 2: Որպեսզի f ֆունկցիան, որը որոշված է X միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր $x \in X$ կետում վերլուծվի իր թեյլորի շարքի, բավարար է, որ նրա ածանցյալները X միջակայքում լինեն հավասարաչափ սահմանափակ՝ $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : |f^{(n)}(x)| \leq C$:

Ապացուցում: Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը ներկայացնենք Լագրանժի տեսքով՝

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} (\xi \in (x_0; x)):$$

Դաշվի առնելով նաև թեորեմի պայմանները, կստանանք՝

$$|r_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq C \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0:$$

Որտեղից, ըստ թեորեմ 1-ի, f ֆունկցիան վերլուծվում է իր թեյլորի շարքի: ■

Այժմ զբաղվենք տարրական ֆունկցիաների թեյլորի շարքի վերլուծության հարցերով: Ընդ որում, կրիտարկենք մասնավոր, բայց կարևոր $x_0 = 0$ դեպքը (Մակլորանի շարք) և հիմք կընդունենք համապատասխան վերլությունները ըստ Մակլորանի բանաձևի [1]:

1° $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$: Կերցնենք կամայական $x \in \mathbb{R}$ և ընտրենք $a > 0$ այնպես, որ՝ $|x| \leq a$: Դաշվի առնելով, որ $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^a$ ($n = 0, 1, \dots$), թեորեմ 2.-ից ստանում ենք, որ $f(x) = e^x$ ֆունկցիան վերլուծվում է հետևյալ Մակլորանի շարքի ցանկացած $[-a; a]$ միջակայքում և, ուրեմն \mathbb{R} -ում՝

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(1)

2° $f(x) = \sin x, (x \in \mathbb{R})$: Բանի որ այս ֆունկցիայի ցանկացած կարգի ածանցյալը հավասար է կամ $\pm \sin x$, կամ $\pm \cos x$, ապա այն սահմանափակ է, ուրեմն, ըստ թեորեմ 2.-ի (տես նաև [1]), $f(x) = \sin x$ ֆունկցիան վերլուծվում է հետևյալ Մակլորանի շարքի \mathbb{R} -ում՝

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})} \quad (2)$$

3° $f(x) = \cos x$, ($x \in \mathbb{R}$): Օգտվելով նախորդ բաժնի թեորեմ

9.-ից, ածանցենք (2)-ը, կստանանք՝

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

Այսպիսով՝

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})} \quad (3)$$

4° $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$): Ըստ անվերջ նվազող երկրաչափական

պրոցեսիայի գումարի բանաձևի, ունենք՝

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1; 1))} \quad (4)$$

(4)-ից, կոխարինելով x -ը- x -ով ստանում ենք՝

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (x \in (-1; 1))} \quad (5)$$

Ինտեգրելով (5)-ը (տես նախորդ բաժնի թեորեմ 8-ը), ստանում ենք՝

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1; 1)):$$

Դաշվի առնելով այն, որ գրված շարքը զուգամետ է նաև $x = 1$ կետում (Լայբնիցյան շարք t) և օգտվելով նախորդ բաժնի թեորեմ 6.-ից, կստանանք՝

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1; 1])} \quad (6)$$

Մասնավորապես, վերցնելով $x = 1$, ստանում ենք՝

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2} \quad (7)$$

5° $f(x) = \arctg x$ ($x \in (-1; 1)$): (5)-ի մեջ x -ը փոխարինենք x^2 -ով, կստանանք՝

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1): \quad (8)$$

Ինտեգրելով (8)-ը, կստանանք՝ $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$: Կ, քանի որ այս շարքը գուգամետ է նաև $x = \pm 1$ կետում, ապա՝

$$\boxed{\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in [-1; 1])}: \quad (9)$$

(9) – ում ինտեգրման հաստատումը բացակայում է, քանի որ (9) - ի ծախս մասը և աջ մասի շարքի գումարը $x = 0$ կետում հավասար են զրոյի:

Մասնավորապես, վերցնելով (9)-ում $x = 1$, ստանում ենք՝

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}: \quad (10)$$

6° $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($|x| < 1$) (Երկանդամային վերլուծություն, α -ն կամայական թիվ է): Այս դեպքում, Մակլորանի բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը (տես [1]):

$$f(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x), \quad (11)$$

որտեղ մնացորդային անդամը հարմար է ներկայացնել Կոշիի տեսքով՝

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1): \quad (12)$$

(11)-ին համապատասխան Մակլորանի շարքն է՝

$$1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (13)$$

$$\text{որտեղ } a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a_0 = 1:$$

(13) շարքի գուգամիտության շառավիղը՝

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n! |\alpha - n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1 :$$

Քանի որ $f^{(n+1)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n)(1+x)^{\alpha-n-1}$, ապա ծևափոխելուց հետո, (12)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$r_n(x) = \frac{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - 1 - n + 1)}{n!} x^n \cdot \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \quad (|x| < 1) : \quad (14)$$

(14)-ի առաջին $\frac{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - 1 - n + 1)}{n!} x^n$ արտադրիչը համովանում է (13) զուգամետ շարքի n -րդ անդամը, $(\alpha - n$ փոխարինված $\alpha - 1$ -ով), ուրեմն, այն անվերջ փոքր է:

Քանի որ $1 - |x| \leq |1 + \theta x| \leq 1 + |x|$, ապա $\alpha x (1 + \theta x)^{\alpha-1}$ արտադրիչը սահմանափակ է, այն բացարձակ մեծությամբ փոփոխվում է $|\alpha x| (1 - |x|)^{\alpha-1}$, $|\alpha x| (1 + |x|)^{\alpha-1}$ արտահայտությունների միջև։

Պարզ է, որ $x > -1$ պայմանից հետևում է $1 + \theta \cdot x > 1 - \theta > 0$ և, ուրեմն $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ ։ Ուստի՝ $0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n < 1$ ։

Այսպիսով $r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ($|x| < 1$) և, ուրեմն $f(x) = (1+x)^\alpha$ -ը վերլուծվում է (13) Մակլորանի շարքի՝

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (|x| < 1) : \quad (15)$$

Խնդիր: Օգտվելով (15) վերլուծությունից (վերցնել $\alpha = -0,5$ և x -ը փոխարինել $-x^2$ -ով), ստանալ վերլություն $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիայի համար։ Ինտեգրելով ստացվածը, ստանալ $f(x) = \arcsin x$ ֆունկցիայի վերլուծությունը Մակլորանի շարքի։

III ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՁԵՐ

1. ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՁ, ՖՈՒՐԻԵԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐ

Սահմանում 1: $[a; b]$ իատվածում որոշված և քառակուսով (թեկուզ անխական իմաստով) ինտեգրելի f և g ֆունկցիաները կոչվում են օրթոգոնալ ($f \perp g$), եթե՝

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0 \quad (1)$$

(այստեղ պետք է հաշվի առնել այն, որ՝
 $2|f(x) \cdot g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x)$ անհավասարությունից հետևում է
(1) ինտեգրալի բացարձակ գուգամիտությունը):

Սահմանում 2: $[a; b]$ իատվածի վրա տրված $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների համակարգը կոչվում է օրթոգոնալ եթե՝

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \lambda_n \cdot \delta_{mn} \quad (\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n > 0), \quad (2)$$

որտեղ $\delta_{mn} = 0$, եթե $m \neq n$ և $\delta_{mm} = 1$: Այն կոչվում է Կրոնեկերի սիմվոլ:

Սահմանում 3: $[a; b]$ իատվածի վրա տրված քառակուսով ինտեգրելի $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների համակարգը կոչվում է օրթոնորմալ եթե՝

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

Նկատենք, որ օրթոգոնալ համակարգը ծնում է $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգ:

* Ֆուրիեի ժամանակակից Ժան Բատիստ Շողեֆ (1768-1830)-ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

* Կրոնեկեր Լեոպոլդ (1823-1891)-գերմանացի մաթեմատիկոս:

Օրթոնորմալ համակարգի դասական օրինակ է հանդիսանում $[-\pi; \pi]$ հատվածի վրա տրված եռանկյունաչափական համակարգը՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (3)$$

(ստուգել ինքնուրույն, որ՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(mx) dx = 0 \quad (k \neq m),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(mx) dx = 0 \quad (k \neq m), \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \sin(mx) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(mx) dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(mx) dx = 0 :$$

Դիցուք f ֆունկցիան վերլուծվում է ըստ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոգոնալ համակարգի հավասարաշափ զուգամետ շարքի (Ֆուրիեի ընդհանուրացված շարք)՝

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots : \quad (4)$$

Բազմապատկելով այդ հավասարության երկու մասերը $\varphi_k(x)$ -ով ($k = 1, 2, \dots$) և ինտեգրելով (շարքի հավասարաշափ զուգամիտությունը թույլ է տալիս այն անդամ առ անդամ ինտեգրել),

$$\text{կստանանք: } \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \delta_{nk} = c_k \lambda_k :$$

Այսպիսով՝

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx : \quad (5)$$

(5)-ով որոշված գործակիցները կոչվում են f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ:

Մասնավորապես, եթե f ֆունկցիան վերլուծվում է ըստ եռանկյունաչափական համակարգի հավասարաշափ զուգամետ շարքի (Ֆուրիեի շարք)՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (6)$$

ապա Ֆուրիեի գործակիցներն են՝

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (7)$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ՝

$$\lambda_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

2. ՖՈՒՐԻԵԻ ԸԱՐԳԻ ՎԵՐԱՌԾՈՒԹՅԱՆ ԽՆՏԻՐԸ, ԴԻՐԻԼԵԼԻ ԻՆՏԵԳՐԱԸ

Այսուհետ, առանց ամեն անզամ հատուկ շեշտելու, կենթադրենք, որ f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, ունի 2π պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi; \pi]$ հատվածում, թեկուզ անհակական իմաստով (վերջին դեպքում կհամարենք, որ f -ը բացարձակ ինտեգրելի է): Այդ դեպքում (7)-ով որոշվող Ֆուրիեի գործակիցները իմաստ ունեն, քանի որ, օրինակ՝ $|f(x) \cdot \cos(nx)| \leq |f(x)|$: Այս ֆունկցիային համապատասխանեցնենք նրա Ֆուրիեի շարքը՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx); \quad (8)$$

Այժմ, ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի f ֆունկցիան, որպեսզի նրա Ֆուրիեի շարքը լինի զուգամետ և շարքի գումարն էլ հավասարվի $f(x)$ -ին: Որպեսզի ուսումնասիրենք (8) շարքի վարքը որոշակի $x = x_0$ կետում, կազմենք այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

և a_k, b_k գործակիցների փոխարեն գրենք նրանց (7) ինտեգրալային արտահայտությունները, կստանանք՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos(kx_0) \cos(ku) + \sin(kx_0) \sin(ku)) du = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(u - x_0)) \right) du:$$

Յաշվենք $A = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$ ($t = u - x_0$): Ունենք՝

$$2 \sin \frac{t}{2} \cdot A = 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt \right) = \\ = \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{5t}{2} - \dots + \\ + \sin \frac{(2n+1)t}{2} - \sin \frac{(2n-1)t}{2} = \sin \frac{(2n+1)t}{2}.$$

Ուրեմն՝

$$A = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2\pi m): \quad (9)$$

(9)-ից հետևում է, որ

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(u - x_0) du, \quad (10)$$

որտեղ՝ $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$ և, $t \neq 2\pi m$ ($m \in Z$) դեպքում ունենք՝

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}: \quad (11)$$

$D_n(t)$ -ն կոչվում է Դիրիխլեի կորիզ, իսկ (10) ինտեգրալը՝ Դիրիխլեի ինտեգրալ: Պարզ է, որ Դիրիխլեի կորիզը որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, անընդհատ է, զույգ է և ունի 2π պարբերություն:

(10)-ինտեգրալուն կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$x - x_0 = t$, կստանանք՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x_0+t) D_n(t) dt : \quad (10')$$

Նկատենք, որ եթե ունենք ամբողջ առանցքի վրա որոշված, 2π պարբերությամբ $g(x)$ ֆունկցիա, որը ինտեգրելի է $[-\pi; \pi]$ հատվածում (թեկուզ անիսկական իմաստով), ապա՝

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt :$$

$$\text{Իրոք, } \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t) dt = \int_{x_0-\pi}^{-\pi} g(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \int_{\pi}^{x_0+\pi} g(t) dt : \text{Վերջին ին-}$$

տեղաբարում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t = \tau + 2\pi$ և հաշվի առնենք, որ $g(x)$ ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն, կստանանք՝ $\int_{-\pi}^{x_0+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{x_0-\pi} g(\tau + 2\pi) d\tau = - \int_{x_0-\pi}^{-\pi} g(t) dt$: Այսպիսով, ստանում ենք՝ $\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$: Ուրեմն, $(10')$ -ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t) dt : \quad (12)$$

(12) -ը բաժանենք երկու մասի, առաջինում t -ն փոխարինենք $-t$ -ով, կստանանք՝

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0+t) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0+t) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t)) D_n(t) dt : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t)) D_n(t) dt : \quad (13)$$

Դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ $f(x) \equiv 1$: Այդ դեպքում՝ $S_n(x_0) = 1$ ($n \geq 1$) և, ուրեմն (13)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2D_n(t) dt$: Որտեղից, կամայական S_0 (S_0 -ն $S_n(x_0)$ -ի հիպոտետիկ սահմանն է) բվի համար ունենք՝

$$S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2S_0 \cdot D_n(t) dt: \quad (14)$$

Դանելով (13)-ից (14)-ը, կստանան

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0] \cdot D_n(t) dt: \quad (15)$$

Այսպիսով, խնդիրը հանգել է հետևյալին՝ ինչպիսի՞ն լինի S_0 -ն և f -ը, որպեսզի (15)-ի ձախ մասը (ուրեմն նաև աջ մասը) ծգտի զրոյի, երբ n -ը ծգտում է անվերջի: Այս խնդիրը լուծելու համար նախապես հարկավոր է հետևյալ լենման:

3. ԼՈԿԱԼԻԶԱՑԻԱՅԻ (ՏԵՂԱՅՆԱԹՍԱՆ) ՍԿՐԱՊՈՒՄԸ

ՈՒԽԱՆԻ ԼԵՄՄԱ: Դիցուք g ֆունկցիան սովորական իմաստով ինտեգրելի է ($g \in R[a; b]$), կամ անհսկական իմաստով բացարձակ ինտեգրելի է $[a; b]$ -ում: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(px) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cdot \sin(px) dx = 0: \quad (16)$$

Ապացուցում: Նախ ենթադրենք, որ $g \in R[a; b]$: Դիտարկենք $[a; b]$ հատվածի որևէ տրոհում $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ և, դիցուք $M_k = \sup_{[x_{k-1}; x_k]} g$, $m_k = \inf_{[x_{k-1}; x_k]} g$, $\omega_k = M_k - m_k$: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \cos(px) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g(x) - m_k] \cdot \cos(px) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos(px) dx = A_p + B_p: \end{aligned} \quad (17)$$

Բայց, քանի որ $g \in R[a; b]$, ապա՝

$$|A_p| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [M_k - m_k] \cdot |\cos(px)| dx \leq \sum_{k=1}^n \omega_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

(λ -ն տրոհման տրամագիծն է): Ուրեմն (տես [2]):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = \{x_k\}_{k=0}^n : \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |A_p| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Այժմ, հաստատագրելով այդ տրոհումը (այդ դեպքում $\sum_{k=1}^n m_k$ -ն որոշակի թիվ է), կստանանք՝

$$|B_p| = \left| \sum_{k=1}^n m_k \cdot \left| \frac{\sin(px)}{p} \right| \right|_{x_k}^{x_k} \leq \left| \sum_{k=1}^n m_k \right| \cdot \frac{2}{|p|} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0:$$

Ուրեմն՝ $\exists \delta > 0 \forall p (|p| > \delta) : |B_p| < \frac{\varepsilon}{2}$: Այսպիսով՝

$$\left| \int_a^b g(x) \cos(px) dx \right| < \varepsilon (|p| > \delta) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(px) dx = 0:$$

Մյուս ինտեգրալի զրոյի ծգտելը ապացուցվում է նույն կերպ:
Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ g -ն բացարձակ ինտեգրելի է

$[a; b]$ -ում և b -ն միակ եզակի կետն է: Ըստ սահմաննան՝

$$\int_a^b |g(x)| dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} |g(x)| dx, \text{ որն էլ համարժեք է հետևյալին՝}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{b-\eta}^b |g(x)| dx = 0:$$

Ըստ որում, $\int_a^{b-\eta} g(x) dx$ Ոինանի ինտեգրալի համար ճշմարիտ է

վերը ապացուցվածը՝

$$\int_a^{b-\eta} g(x) \cdot \cos(px) dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall p (|p| > \delta) : \left| \int_a^{b-\eta} g(x) \cdot \cos(px) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Ըստ թեորեմի պայմանի՝

$$\exists \gamma > 0, \forall \eta \in (0; \gamma) : \int_{b-\eta}^b |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Այսպիսով՝

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) \cdot \cos(px) dx \right| &\leq \left| \int_a^{b-\eta} g(x) \cdot \cos(px) dx \right| + \left| \int_{b-\eta}^b g(x) dx \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\eta \in (0; \gamma), |p| > \delta): \end{aligned}$$

$$\text{Ուրեմն, } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(px) dx = 0: \quad \text{Մյուս ինտեգրալի զրոյի}$$

ձգտելը ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Դետևանք 1: f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները ձգտում են զրոյի՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = 0$$

Դետևանք 2 (լոկալիզացիայի (տեղայնացման) սկզբունք):

f ֆունկցիայի x_0 կետում Ֆուրիեի շարքի գուգամիտությունը և շարքի գումարը կախված են միայն x_0 կետի որքան ասես փոքր շրջակայքում այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից:

$$\text{Իրոք, } S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_n(t) dt \quad \text{ինտեգրալը}$$

տրոհենք երկու ինտեգրալների

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^h (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_n(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_h^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_n(t) dt, \end{aligned} \quad (18)$$

որտեղ h -ը որքան ասես փոքր դրական թիվ է ($h \in (0; \pi)$): Այստեղ երկրորդ ինտեգրալն է՝

$$\frac{1}{\pi} \int_h^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_h^\pi g(t) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt,$$

$$\text{որտեղ՝ } g(t) = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2\sin \frac{t}{2}} \quad (t \in [h; \pi]):$$

Քանի որ $\frac{1}{2\sin \left(\frac{t}{2} \right)}$ ($t \in [h; \pi]$) ֆունկցիան սահմանափակ է,

ապա $g(t)$ ֆունկցիան բավարարում է Ոիմանի լեմմայի պայմաններին, ուստի՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_h^\pi (f(x_0+t) + f(x_0-t)) \cdot D_n(t) dt = 0:$$

Այսպիսով, $S_n(x_0)$ -ի սահմանի գոյությունը և արժեքը կախված է միայն (18)-ի առաջին ինտեգրալից, որն իր հերթին կախված է f ֆունկցիայի արժեքներից $[x_0 - h; x_0 + h]$ միջակայքում:

4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՖՈՒՐԻԵԻ ԸԱՐԳԻ ՎԵՐԱՊԼՇՈՒԹՅԱՆ ԴԱՅԱՐՄԱՆ ՀԱՅՈՒԹՅՈՒՆ

Դիմիի հայտանիշը:

Դիցուք գոյություն ունի h ($h \in (0; \pi)$) այնպիսին, որ զուգամետ է $\int_0^h |f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0| dt$ ինտեգրալը: Այդ դեպքում $f(x)$

ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է x_0 կետում և շարքի գումարը հավասար է S_0 -ի:

Ապացուցում: (15) ինտեգրալը ձևափոխենք հետևյալ կերպ

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0] \cdot D_n(t) dt = A(n) + B(n),$$

որտեղ

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{t} \cdot \frac{t}{2\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \cdot \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt,$$

* Դիմի Ուլիսս (1845-1918)-իտալացի մաթեմատիկոս:

$$\text{իսկ } B(n) = \frac{1}{\pi} \int_h^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt :$$

Պարզ է, որ $\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ ($t \in [h; \pi]$) ֆունկցիան սահմանափակ է

$$(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1), \text{ իսկ } f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0 \text{ ֆունկցիան ըստ}$$

պայմանի բացարձակ ինտեգրելի է: Ուրեմն, ըստ Ոիմանի լեմմայի՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = 0$: Երկրորդ ինտեգրալում, Ոիմանի լեմմայի $g(t)$ -ի դե-

$$\text{րում է } \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ ֆունկցիան: Այսպիսով, ունենք նաև:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n) = 0: \text{Որտեղից հետևում է՝ } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S_0 : ■$$

Սահմանում 1: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է x_0 -կետի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում և x_0 -ում ունի միակողմանի սահմաններ՝ $\exists f(x_0 \pm 0)$: Կասենք, որ f ֆունկցիան բավարարում է Լիաշիցի պայմանին x_0 կետում, եթե՝ $\exists L > 0, \exists \gamma \in (0; \delta), \forall h \in (0; \gamma)$ ճիշտ են

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h} \right| < L \text{ և } \left| \frac{f(x_0-h) - f(x_0-0)}{h} \right| < L \text{ պայմանները:}$$

Սահմանում 2: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է x_0 -կետի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում և x_0 -ում ունի միակողմանի սահմաններ՝ $\exists f(x_0 \pm 0)$: Կասենք, որ f -ը x_0 -ում ունի աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ, եթե՝

$$\exists \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

* Լիաշից Ռուդոլֆ. (1832-1903)՝գերմանացի մաթեմատիկոս:

$$(\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}):$$

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ f ֆունկցիայի միակողմանի ածանցյալների գոյությունից հետևում է Լիպշչիցի պայմանը):

Լիպշչիցի հայտանիշը:

Եթե f ֆունկցիան բավարարում է Լիպշչիցի պայմանին x_0 կետում, ապա այդ կետում f -ի Ֆուրիեի շարքը գուգամետ է և նրա գումարը հավասար է $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = S_0$:

Ապացուցում: Քանի որ՝ $\exists h > 0, \forall t \in (0; h)$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0}{t} \right| = \\ & = \frac{\left| [f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)] + [f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)] \right|}{t} \leq \\ & \leq \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{|t|} + \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{|-t|} \leq 2L, \end{aligned}$$

ապա այստեղից հետևում է Դինիի հայտանիշի պայմանը: ■

Սահմանում 3: Կասենք, որ f ֆունկցիան, որոշված $[a; b]$ հատվածում, կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է, եթե գոյություն ունի $[a; b]$ հատվածի այնպիսի $T = \{t_k\}_{k=0}^n$ տրոհում, որ յուրաքանչյուր բաց $(t_{k-1}; t_k)$ միջակայքում f -ը դիֆերենցելի է, իսկ ծայրակետերում գոյություն ունեն միակողմանի սահմաններ և՝ ածանցյալներ $f'_+(x_k)$: Դասկանալի է, որ ա կետում կա միայն աջակողմյան, իսկ b -ում՝ միայն ձախակողմյան ածանցյալներ:

Դիմական թեորեմ (Ֆուրիեի շարքի վերլուծելու մասին):

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, ունի 2π պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi; \pi]$ հատվածում թեկուզ անհսկական իմաստով (Վերջին դեպքում կհամարենք, որ f -ը բացարձակ ինտեգրելի է): Կենթաղրենք նաև, որ f ֆունկցիան կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է $[-\pi; \pi]$ հատվածում:

Այս պայմանների առկայությամբ f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը գուգամնետ է յուրաքանչյուր x_0 կետում և շարքի գումարը հավասար է՝ $S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ($S_0 = f(x_0)$, եթե x_0 -ն անընդհատության կետ է):

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է Լիպշիցի պայմանը x_0 կետում (տես խնդիր 1): Պարզ է, որ այն կետերում, որտեղ ֆունկցիան դիֆերենցելի է նույնպես տեղի ունի Լիպշիցի պայմանը: Այստեղից հետևում է թեորեմի պնդումը: ■

Խնդիր 2: Ապացուցել որ զույգ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը պարունակում է միայն կոսինուսներ՝

$$b_n = 0 \quad (n=1,2,\dots), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (n=0,1,\dots), \quad (19)$$

իսկ կենտ ֆունկցիայի դեպքում՝ միայն սինուսներ՝

$$a_n = 0 \quad (n=0,1,\dots), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (n=1,2,\dots): \quad (20)$$

5. ՈՉ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔԸ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[-\pi; \pi]$ հատվածում և այդ տեղ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է: Ներմուծենք $f^*(x)$ օժանդակ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$f^*(x) = f(x) \quad (x \in (-\pi; \pi]), \quad f^*(-\pi) = f(\pi):$$

Այնուհետև, այդ ֆունկցիան պարբերական (2π պարբերությամբ) կերպ շարունակենք ամբողջ առանցքի վրա: Ստացված պարբերական $f^*(x)$ ֆունկցիան բավարարում է նախորդ բաժնի հիմնական թեորեմի բոլոր պայմաններին, ուստի նրա Ֆուրիեի շարքը գուգամնետ է ամենուրեք, մասնավորապես $(-\pi; \pi)$ բաց միջակայքում, որտեղ $f^*(x) \equiv f(x)$:

Ծայրակետում ($x_0 = \pi$) Ֆուրիեի շարքի գումարը կլինի

$$\frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2},$$

Բայց՝ $f^*(\pi+0) = f^*(-\pi+0) = f(-\pi+0)$, $f^*(\pi-0) = f(\pi-0)$:
 Նույն արդյուքն է ստացվում $x_0 = -\pi$ ծայրակետում: Այսպիսով,
 $-\pi, \pi$ ծայրակետերում ֆուրիեի շարքի գումարը կլինի՝
 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

6. ԿԱՍՏԵԱԿԱՍ ՄԻՋԱԿԱՅՁԻ ԴԵՊՔԸ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[-l; l]$ հատվածում և այդտեղ
 կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է: Կատարենք փոփոխականի
 $y = \frac{\pi}{l}x$ ($x = \frac{l}{\pi}y$) փոփոխարինում:

Պարզ է, որ $g(y) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right)$ բարդ ֆունկցիան որոշված է
 $[-\pi; \pi]$ հատվածում և այդտեղ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է:
 Կրկնելով նախորդ բաժնի դատողությունները, օրինակ, անընդհա-
 տության յ կետում կունենանք՝

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny) + b_n \sin(ny),$$

որտեղ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \cos(ny) dy \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \sin(ny) dy \quad (n = 1, 2, \dots):$$

Անցնելով նորից x փոփոխականի և ինտեգրալներում կատա-
 րելով $y = \frac{\pi}{l}x$ փոփոխականի փոխարինում, կստանանք f ֆունկ-
 ցիայի $x = \frac{l}{\pi}y$ անընդհատության կետում՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (21)$$

որտեղ՝

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx: \quad (22)$$

Ընդունում, ընդհանուր դեպքում $x_0 \in (-l; l)$ կետերում ֆուրիեի շարքի գումարն է $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, իսկ $x = \pm l$ ծայրակետերում $\frac{f(l - 0) + f(l + 0)}{2}$:

Զույգ ֆունկցիայի դեպքում ունենք (տես 4. խնդ. 2)

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots): \quad (23)$$

Իսկ կենտ ֆունկցիայի դեպքում՝

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots): \quad (24)$$

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Վերլուծել $f(x) = |\sin(\pi x)|$ ֆունկցիան ֆուրիեի շարքի:

Դաշվի առնելով, որ այս ֆունկցիան պարբերական է (իհմնական պարբերությունն է՝ $T = 1$) և զույգ է, կունենանք (տես (21),(23), $l = \frac{1}{2}$):

$$a_0 = 4 \int_0^{0.5} \sin(\pi x) dx = -\frac{4}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^{0.5} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = 4 \int_0^{0.5} \sin(\pi x) \cdot \cos(2\pi nx) dx = 2 \int_0^{0.5} \sin(\pi(2n+1)x) dx -$$

$$-2 \int_0^{0.5} \sin(\pi(2n-1)x) dx = -\frac{2}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi x) \Big|_0^{0.5} +$$

$$+\frac{2}{(2n-1)\pi} \cos((2n-1)\pi x) \Big|_0^{0.5} = -\frac{4}{(4n^2 - 1)\pi}:$$

$$\text{Այսպիսով՝ } | \sin(\pi x) | = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{4n^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R}):$$

Օրինակ 2: Վերլուծել $f(x) = \arcsin(\sin(\pi x))$ ֆունկցիան ֆուրիեի շարքի: Պարզ է, որ $f \in C(\mathbb{R})$: Քանի որ այս ֆունկցիան պարբերական է (իմնական պարբերությունն է՝ $T = 2$) և կենտ է, ապա հարմար է նախ այն դիտարկել $[-1; 1]$ հատվածի վրա ($l = 1$):

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(\pi nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots):$$

Եթե $x \in [0; 0,5]$, ապա $f(x) = \pi x$, իսկ եթե $x \in [0,5; 1]$, ապա $f(x) = \pi(1-x)$:

Ուրեմն՝ $b_n = 2\pi \int_0^{0,5} x \sin(\pi nx) dx + 2\pi \int_{0,5}^1 (1-x) \sin(\pi nx) dx$: Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, ստանում ենք՝

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2}:$$

$$\text{Այստեղից՝} \quad b_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad b_{2k+1} = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} \quad (k = 0, 1, \dots):$$

Այսպիսով՝

$$\boxed{\arcsin(\sin(\pi x)) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^2} \quad (x \in \mathbb{R})}:$$

Մասնավորապես, տեղադրելով այստեղ $x = 0,5$ ստանում ենք հետևյալ թվային շարքի գումարը՝ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}:$

Օրինակ 3: Վերլուծել $f(x) = x$ ($x \in [0; l]$) ֆունկցիան ֆուրիեի շարքի միայն ըստ կոսինուսների: Դրա համար հարկավոր է նախ շարունակել այս ֆունկցիան զույգ կերպ $[-l; 0]$ միջակայքում և այնուհետև՝ պարբերաբար ($2l$ պարբերությամբ) $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում (ստացված ֆունկցիան ամենուր աընդհատ է): Այսպիսով՝

$$\begin{aligned}
 b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} \int_0^l x \cdot d \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{2}{\pi n} x \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{2}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\
 &= \frac{2l}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l = \frac{2l((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \quad (n = 1, 2, \dots):
 \end{aligned}$$

Ի վերջո՞՝ $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = -\frac{4l}{\pi^2(2k+1)^2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$): Ուրեմն՝

$$x = \frac{l}{2} \cdot \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \cos \frac{\pi(2k+1)x}{l} \quad (x \in [0; l]):$$

Օրինակ 4: Վերլուծել $f(x) = \cos(\pi x)$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի $(0; 1)$ միջակայքում միայն ըստ $\sin(\pi n x)$ -ի: Ծարունակելով տրված ֆունկցիան $(-1; 0)$ միջակայքում կենտ կերպ, կստանանք՝

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = 2 \int_0^l \cos(\pi x) \sin(\pi n x) dx \quad (n = 1, 2, \dots):$$

$$\text{Զևսիոնելով: } b_n = \int_0^l [\sin(\pi(n+1)x) + \sin(\pi(n-1)x)] dx \quad \text{և}$$

հաշվելով ինտեգրալները, ստանում ենք՝

$$b_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \left(1 - (-1)^{n+1} \right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \left(1 - (-1)^{n-1} \right):$$

$$\text{Քետևաբար: } b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \quad (k = 1, 2, \dots):$$

$$\text{Այսպիսով: } \cos(\pi x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2\pi kx) \quad (x \in (0; 1)): \boxed{\cos(\pi x)}$$

7. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՆՈԱՍԵՐՈՎ

Միևնույն $[a; b]$ հատվածում որոշված f և g ֆունկցիաների իրար մոտ լինելը (այն, որ մեկը մյուսի մոտարկումն է) կարելի է հասկանալ տարբեր կերպ: f և g ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտիկությունը որոշվում է $\sup_{[a;b]} |f(x) - g(x)|$ մեծությամբ (ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաները սահմանապակ են $[a; b]$ -ում): Միջին քառակուսային մոտիկությունը, կամ միջին քառակուսային շեղումը որոշվում է $\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ մեծությամբ (եթե, իհարկ է գրված ինտեգրալը իմաստ ունի): ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1 (Կայերշտրասի):

Եթե $f \in C[-\pi; \pi]$ և $f(-\pi) = f(\pi)$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $T(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամ՝ $T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx))$ այնպիսին, որ

$$\forall x \in [-\pi; \pi] : |f(x) - T(x)| < \varepsilon \text{ պայմանը:}$$

Թեորեմի ապացույցը տես, օրինակ, [3] ում:

8. ՆՎԱԶԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՄԱՅԻՆ ԸԵՂԱՍՍ ԽՆԴԻՐԸ:

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԴԱՏԱՎՐՈՒԹԻՒՆ
ՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք տրված է $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $[a; b]$ -ում քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգը: Ենթադրենք f -ը այդ միջակայքում որոշված, նույնպես քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիա է, և n -ը հաստատագրված բնական թիվ է: Դնենք մեր արջեն հետևյալ խնդիրը: Գտնել այնպիսի հաստատուն γ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) գործակիցներ, որ՝

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \varphi_k(x) \tag{25}$$

ֆունկցիան միջին քառակուսային շեղման իմաստով իրականացնի
 f ֆունկցիային լավագույն մոտարկումը, այսինքն՝

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$$

միջին քառակուսային շեղումը լինի ամենափոքրը: Տեղադրելով
 $\sigma_n(x)$ -ի արտահայտությունը, բացելով փակագիծը և հաշվի
 առնելով (5)-ը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n \gamma_k \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx + \sum_{k=0}^n \gamma_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx + \\ & + 2 \sum_{k < m} \gamma_k \gamma_m \int_a^b \varphi_k(x) \cdot \varphi_m(x) dx: \end{aligned}$$

Կամ՝

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k \gamma_k + \sum_{k=0}^n \lambda_k \gamma_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k^2 + \\ & + \sum_{k=0}^n \lambda_k (\gamma_k - c_k)^2: \end{aligned}$$

Այժմ պարզ է, որ Δ_n -ը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, եթե
 $\gamma_k = c_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$): Այսպիսով (25) տեսքի բոլոր հնարավոր
 գումարներից ըստ $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ համակարգի ֆուրիեի շարքի

$S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ մասնակի գումարն է հաղորդում Δ_n -ին փոքրագույն արժեք, այսինքն՝ միջին քառակուսային շեղման իմաստով լավագույնն է մոտարկում f ֆունկցիային: Ընդ որում, Δ_n -ի փոքրագույն արժեքն է՝

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k^2 \quad (\Delta_n \geq 0): \quad (26)$$

(26)-ը կոչվում է Բեսսելի՝ նույնություն: Դրանից ստացվում է

*Բեսսել Ֆրիդրիխ Վիլհելմ (1784-1846)-գերմանացի աստղաֆիզիկոս:

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad (n=0,1,\dots):$$

Այստեղից հետևում է $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2$ դրական անդամներով շարքի գուգամիտությունը, ինչպես նաև

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad (27)$$

անհավասարությունը, որը կոչվում է Բեսսելի անհավասարություն:

(26)-ից հետևում է, որ Δ_n -ը մոնուտոն նվազող է (n -ի աճման հետ (26)-ում ավելանում են նոր բացասական անդամներ):

Դարց է առաջանում՝ արդյո՞ք $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է: Եթե դա տեղի ունի, ապա ասում են, որ $S_n(x)$ -ը գուգամիտում է $f(x)$ -ին միջին քառակուսային իմաստով, (դա չի նշանակում, որ $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ սովորական իմաստով): Բեսսելի (26) նույնությունից հետևում է, որ $\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե ճիշտ է հետևյալ պայման՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx : \quad (28)$$

(28) հավասարությունը կոչվում է «Պարսեվալ-Լյապունովի» կամ փակության հավասարում:

Սահմանում 4: $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $[a; b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է փակ, եթե $[a; b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի յուրաքանչյուր f ֆունկցիայի համար տեղի ունի փակության հավասարումը:

Եռանկյունաչափան համակարգի դեպքում (26)-ը (Բեսսելի նույնությունը) ընդունում է հետևյալ տեսքը:

*Պարսեվալ Մ. – Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Լյապունով Ալեքսեյ Անդրեևիչ (1857-1918) – ռուս մաթեմատիկոս:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - (2\pi \frac{a_0^2}{4} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right):\end{aligned}$$

Իսկ բեսաթի անհավասարությունը (տես (27)) կը նպաստի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx:$$

Թեորեմ 2: Եռանկյունաչափական համակարգը փակ է: Այսինքն, $[-\pi; \pi]$ հատվածի վրա ցանկացած քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիայի համար ճշմարիտ $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$, կամ որ նույն է, ճշմարիտ է փակության

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (29)$$

հավասարումը:

Ապացուցում: Թեորեմը կապացուցենք այն մասնավոր դեպքում, եթե $f \in C[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$: Ընդհանուր դեպքը տես [3]-ում: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի (տես 7., թ. 1), կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի եռանկյունաչափական

$$S_{n_e}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

բազմանդամ, որ՝

$$|f(x) - S_{n_e}(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\Delta_{n_e} = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n_e}(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon:$$

Քանի որ Δ_{n_e} -ը մոնուտոն չափող է, ապա՝

$$\forall n \geq n_e : \Delta_n \leq \Delta_{n_e} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0: \blacksquare$$

Այժմ ընդհանրացնենք փակության հավասարումը: Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ -ը $[a; b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկ-

ցիաների օրթոգոնալ փակ համակարգ է: Ուրեմն, եթե f -ը և g -ն այդ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի են, ապա նրանց համար ճշմարիտ է փակության հավասարությունը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n d_n^2 = \int_a^b g^2(x) dx, \quad (30)$$

որտեղ c_n -ը և d_n -ը համապատասխանաբար f և g ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են:

Քանի որ $(f(x) + g(x))^2 \leq 2(f^2(x) + g^2(x))$, ապա $f + g$ ֆունկցիայի համար ևս ճշմարիտ է (30)-ը:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (c_n + d_n)^2 = \int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx:$$

Դաշվի առնելով (30)-ը, ստանում ենք փակության ընդհանրացված հավասարությունը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot c_n \cdot d_n = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx: \quad (31)$$

Քանի որ $\lambda_n d_n = \int_a^b g(x) dx$, ապա (31)-ից կստանանք՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n \cdot \varphi_n(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \quad (32)$$

Քանի որ եռանկյունաչափական համակարգը փակ է $[-\pi; \pi]$ հատվածի վրա, ապա (32)-ը ճշմարիտ է և այն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cdot g(x) dx = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx: \end{aligned} \quad (32')$$

Թեորեմ 3 (Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրման մասին):

Դիցուք f ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[-\pi; \pi]$ հատվածի վրա և նրա Ֆուրիեի շարքն է՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx):$$

Այդ դեպքում՝

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx \\ (-\pi \leq \alpha \leq \beta \leq \pi): \quad (33)$$

Նկատենք, որ f ֆունկցիան կարող է և չվերլուծվել իր Ֆուրիեի շարքի:

Ապացուցում: Ըստարկենք մասնավոր դեպք, եթե f ֆունկցիան քառակուսով է ինտեգրելի (ընդհանուր դեպքը տես [3], [11]): Օգտվենք (32)-ից, ընտրելով g ֆունկցիան նույնաբար հավասար $1 \cdot 1$ $[\alpha; \beta]$ -ում և հավասար զրոյի այդ հատվածից դուրս: Կստանաք (33)-ը: ■

Սահմանում 5: $[a, b]$ հատվածում անընդհատ $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է լրիվ, եթե այդ հատվածում չկա նույնաբար զրոյից տարբեր անընդհատ ֆունկիա, որն օրթոգոնալ է $f_n(x)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրին: Այսինքն, եթե անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներից յուրաքանչյուրը հավասար է զրոյի, ապա այդ ֆունկցիան նույնաբար զրո է:

Այլ կերպ, լրիվությունը նշանակում է, որ, եթե երկու անընդհատ ֆունկիաները ունեն միևնույն Ֆուրիեի գործակիցներ, ապա այդ ֆունկիաները նույնաբար հավասար են:

Թեորեմ 4: Եռանկյունաչափական համակարգը լրիվ է:

Ապացուցում: Ըստ թեորեմի պայմանների $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի: Կիրառենք (33)-ը, վերցնելով $\alpha = 0, \beta = x$ ($x \in [-\pi; \pi]$), կստանանք՝

$$\int_0^x f(t) dt = 0 \quad (x \in [-\pi; \pi]):$$

Ածանցելով ստացվածը, կունենանք՝ $f(x) \equiv 0$: ■

Քննարկենք վերը շարադրածը մեկնաբանող մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 5: Վերլուծել $f(x) = x$ ($x \in (-\pi; \pi)$) ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի: Քանի որ $f(x) = x$ ֆունկցիան կենտ է, ապա $a_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$), իսկ $x \cdot \sin(nx)$ -ը զրոյի է, և ուրեմն՝

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi x \cdot d\cos(nx) = -\frac{2}{\pi n} x \cdot \cos(nx) \Big|_0^\pi + \\ + \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_0^\pi = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ուրեմն՝
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \quad (-\pi < x < \pi); \quad (34)$$

Օրինակ 6: Օգտվելով նախորդ վերլուծությունից ստանալ x^2, x^3 ($x \in (-\pi; \pi)$) ֆունկցիաների վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի: Անդամ առ անդամ ինտեգրելով ստացված շարքը (տես թեորեմ 3), կստանանք՝ $f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + \frac{a_0}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), որ-

տեղ $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$ (նկատենք, որ նշված վերլությունը ճշնարիտ է նաև $\pm\pi$ ծայրակետերում, քանի որ $f(-\pi+0) = f(\pi-0) = \pi^2$): Ուրեմն՝

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi); \quad (35)$$

Վերցնելով այստեղ $x = 0$, կստանանք $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$:

Իսկ $x = \pi$ արժեքի դեպքում (35)-ից ստանում ենք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \text{Ինտեգրելով (35)-ը, կստանանք}$$

$x^3 = \pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{12}{n^3} \sin(nx) \quad (-\pi < x < \pi)$ (ակնհայտ է, որ ինտեգրման հաստատումը այստեղ հավասար է զրոյի):

Օգտվելով (34) վերլուծությունից, կստանանք՝

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{12}{n^3} \sin(nx) \quad (-\pi < x < \pi); \quad (36)$$

Այսպես շարունակելուվ, կարելի ստանալ ցանկացած x^n ($n = 4, 5, \dots$) տեսքի ֆունկցիայի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի:

IV ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով

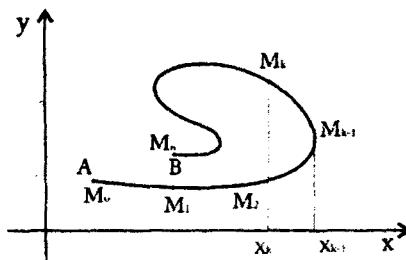
$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (x, y \in C[\alpha; \beta])$$

անընդհատ, պարզ (իբր իրեն չհատող) $\cup AB$ կորը, որի ծայրակետերն են՝ $A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta))$ (տես նկ. 3) և այդ կորի վրա որոշված է $z = f(x, y)$ ֆունկցիա:

Դիտարկենք $[\alpha; \beta]$ հատվածի որևէ տրոհում $T = \{t_k\}_{k=0}^n$: Այն կառաջացնի (փոխմիարժեքորեն) $\cup AB$ կորի որոշակի տրոհում

$$M_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (M_0 = A, M_n = B):$$

Յուրաքանչյուր $\cup M_{k-1}, M_k$ աղեղից վերցնենք պատահական M'_k կետ և կազմենք $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M'_k) \cdot |\cup M_{k-1}, M_k|$ ինտեգրալային գումարը ($|\cup M_{k-1}, M_k|$ -ով նշանակված է $\cup M_{k-1}, M_k$ աղեղի երկարությունը):



նկ. 3

Սահմանում 1: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման՝ $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma$, $(\lambda_T = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k)$, որը կախված չէ ոչ տրոհումներից և ոչ

էլ M'_k կետերի ընտրությունից (տես Ոիմանի ինտեգրալի սահմանումները [2]) ապա այն կոչվում է առաջին սերի կորագիծ ինտեգրալ և գրվում է՝ $\int_{(A,B)} f ds$ ($\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma = \int_{(A,B)} f ds$):

Թեորեմ 1: Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (x, y \in C^1[\alpha; \beta] \quad (\alpha < \beta)), \quad \text{պարզ} \quad \cup AB$$

կորը $(A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta)))$ և նրա վրա որոշված $z = f(x, y)$ անընդհատ ֆունկցիա: Այս պայմանների առկայությամբ

$$\exists \int_{(A,B)} f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt: \quad (1)$$

Ապացուցում: Նախ դիտարկենք $\cup AB$ կորի պարամետրական ներկայացումը, երբ պարամետրի դերում $\cup AM$ աղեղի երկարությունն է՝ $s = |\cup AM|$ (M -ը $\cup AB$ կորի պատահական կետ է, $M(x(s), y(s))$): Պարզ է, որ $s \in [0; S]$, $S = |\cup AB|$: Դիտարկենք $[0; S]$ հատվածի որևէ $T = \{s_k\}_{k=0}^n$ տրոհում: Այն առաջացնում է $\cup AB$ կորի տրոհում $M_k(x(s_k), y(s_k))$ ($s_k = |\cup A, M_k|$), ընդ որում $M'_k(x(s'_k), y(s'_k))$, ($s'_k \in [s_{k-1}; s_k]$): Այդ դեպքում

$$|\cup M_{k-1}, M_k| = |\cup A, M_k| - |\cup A, M_{k-1}| = s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$$

և, ուրեմն՝

$$\begin{aligned} \sigma = \sum_{k=1}^n f(M'_k) \cdot |\cup M_{k-1}, M_k| &= \sum_{k=1}^n f(x(s'_k), y(s'_k)) \cdot \Delta s_k \\ &\xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} \int_0^S f(x(s), y(s)) ds: \end{aligned}$$

Այսպիսով, երբ պարամետրը s - ն է ունենք՝

$$\int_{(A,B)} f ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) ds: \quad (2)$$

Անցնենք ընդհանուր դեպքին, երբ կորը տրված է $x = x(t), y = y(t)$ ($x, y \in C^1[\alpha; \beta]$), պարամետրական տեսքով: Կորի նույն $M(x(s), y(s))$ կետը բնորոշվում է նաև պարամետրի t արժեքով: Գտնենք կապը այդ երկու պարամետրերի միջև՝ $s = s(t)$, պարզ է, որ $x(s(t)) = x(t), y(s(t)) = y(t)$ (այստեղ, օրինակ $x(s(t))$ բարդ ֆունկցիան, պարզության համար նորից նշանակված է $x(t)$):

Օգտվելով կորի երկարության բանաձևից (տես [2]), ունեն՝ $s(t) = |\cup_{\alpha} AM| = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$: Այստեղից, հաշվի առնելով որ նշված արմատը անընդհատ ֆունկցիա է $[\alpha; \beta]$ հատվածում, կստանանք՝

$$\exists s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}: \quad (3)$$

Պարզ է, որ $s = s(t)$ ֆունկցիան ստեղծում է փոխմիարժեք համապատասխանություն $[\alpha; \beta]$ և $[0; S]$ հատվածների միջև: (2)-ի մեջ անցնելով նոր՝ t ($s = s(t)$) փոփոխականի, կստանանք (1)-ը: ■

Դիտողություն 1: (3)-ից հետևում է, որ եթե $t = s$, ապա $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$: Եթե $\cup AB$ կորով շարժվելիս (A -ից դեպի B) շոշափողը, որպես ճառագայթ ուղղենք շարժման ուղղությամբ, ապա հեշտ է նկատել, որ այն կազմում է (α) սուր անկյունը x առանցքի դրական ուղղության հետ, եթե $x(s)$ -ը աճող է և բութ անկյուն հակառակ դեպքում: Ուրեմն $x'(s)$ -ը և $\cos\alpha$ -ն ունեն միևնույն նշանը:

Մյուս կողմից $\operatorname{tg}\alpha = y'(x) = \frac{y'(s)}{x'(s)}$, ուրեմն

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{x'(s)^2 + y'(s)^2}{x'(s)^2} = \frac{1}{x'(s)^2}:$$

Այսպիսով՝

$$\cos\alpha = x'(s), \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = x'(s) \cdot \frac{y'(s)}{x'(s)} = y'(s): \quad (4)$$

Դիտողություն 2: Եթե $\cup AB$ պարզ կորը տրված է եռաչափ տարածության մեջ

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (x, y, z \in C'[\alpha; \beta] (\alpha < \beta))$$

տեսքով, ապա առաջին սեռի կորագիծ իմտեգրալը սահմանվում է նույն կերպ և, եթե նրա վրա որոշված է $f(x, y, z)$ անընդհատ ֆունկցիա, ապա նախորդի նման ապացուցվում է, որ

$$\exists \int_{(AB)}^b f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt:$$

Օրինակ 1: Նաշվել $I = \int_{(l)} x \cdot y \, ds$, որտեղ (l) -ը

$$r = r(\varphi) = \cos(\varphi), \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

թևուային համակարգում տրված կոր է՝

$$x = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \quad y = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi):$$

Այս դեպքում, ինչպես հայտնի է (տես [2])՝

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1:$$

Ուրեմն՝

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) \cdot \sin(2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi)) \cdot \sin(2\varphi) \, d\varphi = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi)) d\cos(2\varphi) = \\ &= \frac{1}{8} (-\cos(2\varphi)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \cos(4\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}: \end{aligned}$$

Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով
 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($x, y \in C[\alpha; \beta]$) անընդհատ, պարզ (իբր իրեն
 չհատող) $\cup AB$ կորը, որտեղ A, B -ն կորի ծայրակետերն են
 $(A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta)))$ և նրա վրա որոշված $P(x, y)$
 ֆունկցիա: Դիտարկենք $[\alpha; \beta]$ հատվածի որևէ տրոհում
 $T = \{t_k\}_{k=0}^n$ ($\lambda_T = \max \Delta t_k$): Այն կառաջացնի (փոխմիարժեքորեն)
 $\cup AB$ կորի որոշակի տրոհում

$$M_k(x(t_k), y(t_k)), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (A = M_0, M_1, \dots, M_n = B):$$

Յուրաքանչյուր $\cup M_{k-1}, M_k$ աղեղից վերցնենք պատահական
 $M'_k(x(\tau_k), y(\tau_k))$ ($\tau_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, \dots, n$) կետ և կազմենք
 $\sigma_x = \sum_{k=1}^n P(M'_k) \cdot \Delta x_k$ ինտեգրալային գումարը:

Սահմանում 2: Եթե գոյություն ունի, անկախ տրոհումներից և M'_k կետերի ընտրությունից, վերջավոր սահման՝ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_x$, ապա այն

անվանում են երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ և գրում՝ $\int_{(A,B)} Pdx$:

Ակնհայտ է, որ առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ուղղությունից ($\int_{(AB)} fds = \int_{(BA)} fds$), իսկ երկրորդ սեռի կո-

րագիծ ինտեգրալը կախված է՝ $\int_{(AB)} Pdx = - \int_{(BA)} Pdx$, քանի որ, եթե

փոխվում է ինտեգրման ուղղությունը, բոլոր Δx_k -երը փոխում են իրենց նշանը:

Սահմանում 3: Ինչպես և նախորդ սահմանման մեջ, եթե $\cup AB$ կորի վրա որոշված է $Q(x,y)$ ֆունկցիա, ապա, ըստ սահմանման

$\int_{(AB)} Qdy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(M'_k) \cdot \Delta y_k$: Եթե $\cup AB$ կորի վրա որոշված են

$P(x,y), Q(x,y)$ ֆունկցիաներ, ապա, ըստ սահմանման

$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy$, եթե աջ մասում գրված ինտեգրալ-

ները գոյություն ունեն:

Թեորեմ 2: Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով

$x = x(t)$, $y = y(t)$ ($x, y \in C'[a; b]$), $\cup AB$ պարզ կորը

$(A(x(\alpha)), y(\alpha)), B(x(\beta)), y(\beta))$ և նրա վրա որոշված $P(x,y), Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաներ: Այս պայմանների առկայությամբ

$\exists \int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt$: (5)

Ապացուցում: Պարզության համար դիտարկենք այն դեպքը, երբ $Q(x,y) \equiv 0$:

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\tau_k^*) \cdot \Delta t_k, (\tau_k^* \in (t_{k-1}; t_k))$$

Այսպիսով՝ $\sigma_x = \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \cdot x'(\tau_k^*) \cdot \Delta t_k$: Եթե նշանակենք՝ $\sigma_x^* = \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \cdot x'(\tau_k) \cdot \Delta t_k$, ապա պարզ է, որ

$$\lim_{\lambda_t \rightarrow 0} \sigma_x^* = I, \text{ որտեղ } I = \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) dt:$$

Քանի որ՝ $\sigma_x - I = (\sigma_x - \sigma_x^*) + (\sigma_x^* - I)$, ապա մնում է ապացուցել, որ $\lim_{\lambda_t \rightarrow 0} (\sigma_x - \sigma_x^*) = 0$:

Քանի որ $P(x(t), y(t)) \in C[\alpha; \beta]$, ապա այդ ֆունկցիան սահմանափակ է՝ $\exists M > 0, \forall t \in [\alpha; \beta] : |P(x(t), y(t))| \leq M$:

Դաշվի առնելով, որ $x'(t) \in C[\alpha; \beta]$, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall t, \tau \in [\alpha; \beta], |t - \tau| < \delta : |x'(t) - x'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}:$$

Եթե ընտրենք $T = \{t_k\}_{k=0}^n$ տրոհումը այնպես, որ $\lambda_t < \delta$, ապա $\Delta t_k < \delta (k = 1, \dots, n) \Rightarrow |\tau_k - \tau_k^*| < \delta$ և, ուրեմն՝

$$|x'(\tau_k) - x'(\tau_k^*)| < \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}:$$

Այսպիսով՝

$$|\sigma_x - \sigma_x^*| = \left| \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \cdot [x'(\tau_k^*) - x'(\tau_k)] \cdot \Delta t_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |P(x(\tau_k), y(\tau_k))| \cdot |x'(\tau_k^*) - x'(\tau_k)| \cdot \Delta t_k \leq$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot (\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda_t \rightarrow 0} (\sigma_x - \sigma_x^*) = 0: \blacksquare$$

Դիտողություն 1: Եռաչափ դեպքում, եթե CAB պարզ կորը տրված է պարամետրական տեսքով

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (x, y, z \in C^1[\alpha; \beta])$$

և այդ կորի վրա տրված են $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ անընդհատ ֆունկցիաներ, ապա նույն կերպ սահմանվում է $\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$

երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը և, այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt : \end{aligned}$$

Դիտողություն 2(Երկու սեռի կորագիծ ինտեգրալների միջև եղած կապը):

Դիտողություն 1-ում նշված պայմանների առկայությամբ ճիշտ է հետևյալ բանաձևը

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} (P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma) ds, \quad (6)$$

որտեղ α, β, γ -ն A -ից B շարժվելիս շոշափողի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար x, y, z առանցքների դրական ուղղությունների հետ:

Պարզության համար դիտարկենք հարթ կորի դեպքը ($R \equiv 0$): $\cup AB$ կորը ներկայացնենք պարամետրական տեսքով, երբ պարամետրի դերում աղեղի երկարությունն է (s)՝

$$x = x(s), y = y(s) \quad (s \in [0; S], S = |\cup AB|) :$$

Այդ դեպքում՝

$$x'(s) = \cos\alpha, y'(s) = \sin\alpha = \cos\beta \quad (\text{տես թ.1, դիտ.1.})$$

Դիցուք $T_{[0;S]} = \{s_k\}_{k=0}^n$ $[0; S]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Այդ դեպքում $\int_{(AB)} Pdx$ ինտեգրալին համապատասխան ինտեգրալային գումարը ունի հետևյալ տեսքը (տես թեորեմ 2-ի ապացույցը)

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^n P(x(s_k), y(s_k)) \cdot x'(s_k^*) \cdot \Delta s_k \xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} \int_{(AB)} Pdx \quad (s_k, s_k^* \in [0; S]) :$$

Քանի որ նաև՝

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^n P(x(s_k), y(s_k)) \cdot \cos\alpha|_{s_k^*} \Delta s_k \xrightarrow{\lambda_r \rightarrow 0} \int_{(AB)} P(x, y) \cdot \cos\alpha ds :$$

ապա՝

$$\int_{(AB)} P dx = \int_{(AB)} P \cdot \cos\alpha \cdot ds :$$

Ընդհանուր դեպքը ապացուցվում է նույն կերպ:

Դիտողություն 3: Եթե առաջին և երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալները տարածվում են անընդհատ պարզ փակ (l) կորով, ապա բաժանելով այն կորի որևէ կետով երկու պարզ կորերի, կունենանք (ըստ սահմանման), որ անբողջ համապատասխան կորագիծ ինտեգրալը հավասար է առաջին կորերով ինտեգրալների գումարին: Կիրառելով նախորդ տեսությունը և հաշվի առնելով Ումանի ինտեգրալի աղյուսիվ հատկությունը ինտեգրան տիրույթի նկատմամբ, կստանանք, որ վերը շարադրվածը (տես (1), (5), (6) բանաձևերը) ծշմարիտ է նաև այս դեպքում: Փակ կորով ինտեգրալի համար ընդունված է հետևյալ գրառումը՝ $\int_{(l)} P dx$,

(l)

Որպես երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի կիրառություն դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: $\bar{F}(F_x, F_y, F_z)$ ուժային դաշտում նյութական կետը տեղափոխվում է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետից $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետը որևէ $(l) = \cup(M_1 M_2)$ անընդհատ պարզ կորով: Պահանջվում է հաշվել կատարված աշխատանքը՝ A -ն: Ֆիզիկայից հայտնի է, որ այդ աշխատանքը կարելի հաշվել հետևյալ կերպ

$$A = \int_{(M_1 M_2)} F \cdot \cos\theta \cdot ds,$$

որտեղ θ -ն կորի շոշափողի և \bar{F} վեկտորի միջև եղած անկյունն է, $F = |\bar{F}|$: M_1 -ից M_2 -ը շարժվելիս շոշափողով ուղղված միավոր վեկտորն է՝ $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, որտեղ α, β, γ -ն \bar{l} -ի համապատասխանաբար x, y, z առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյուններն են:

Եթե λ, μ, ν -ն \bar{F} վեկտորի համապատասխանաբար x, y, z առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյուններն են, ապա $(\bar{F}, \bar{l}) = \cos\theta = \cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu$, որտեղ \bar{F} , -ը \bar{F} վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորն է:

Ուրեմն՝

$$A = \int_{(M_1, M_2)} [(F \cdot \cos\lambda) \cdot \cos\alpha + (F \cdot \cos\mu) \cdot \cos\beta + (F \cdot \cos\nu) \cdot \cos\gamma] ds = \\ = \int_{(M_1, M_2)} [F_x \cdot \cos\alpha + F_y \cdot \cos\beta + F_z \cdot \cos\gamma] \cdot ds = \int_{(M_1, M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz :$$

Դիտողություն 4: Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը երբեմն կախված չէ այն բանից թե տվյալ երկու կետերը ինչպիսի անընդհատ կորով են միացված իրար (ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից): Դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1: Դիցուք $A(0,0)$ և $B(1,1)$ կետերը նախ միացված են (I_1) : $y = x$ ուղղով, իսկ հետո՝ (I_2) : $y = x^2$ պարաբոլով: Յաշվենք հետևյալ ինտեգրալները

$$\text{ա) } I_1 = \int_{(I_1)} x dx + x dy, \text{ բ) } I_2 = \int_{(I_2)} x dx + x dy :$$

Ունենք՝

$$I_1 = \int_0^1 (x+x) dx = x^2 \Big|_0^1 = I, I_2 = \int_0^1 (x+x \cdot 2x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

և, ուրեմն $I_1 \neq I_2$: Այժմ, փոխելով միայն ընդ ինտեգրալ արտահայտությունը, հաշվենք հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\text{ա) } I_3 = \int_{(I_1)} x dx + y dy, \text{ բ) } I_4 = \int_{(I_2)} x dx + y dy : \text{ Ունենք՝}$$

$$I_3 = \int_0^1 (x+x) dx = x^2 \Big|_0^1 = I, I_4 = \int_0^1 (x+x^2 \cdot 2x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = I$$

և, ուրեմն $I_3 = I_4$: Դետագայում կհամոզվենք, որ $\int_{(AB)} x dx + y dy$ ին-

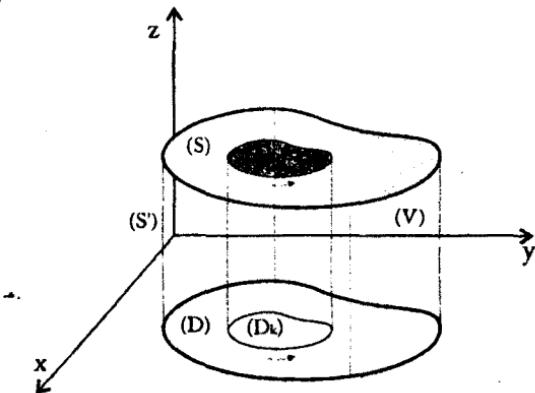
տեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից (այսինքն, ոչ միայն (I_1) և (I_2) կորերով են ինտեգրալները իրար հավասար):

Այն հարցին, թե ի՞նչ պայմանների դեպքում է 2-րդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը անկախ ինտեգրման ճանապարհից կանդրադառնենք ավելի ուշ:

2. ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

2.1. ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՍԱՐՄԱՆՈՒՅՑ ԵՎ ԴԱԾՎՈՒՅՑ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f : (D) \rightarrow \mathbb{R}$ ($(D) \subset \mathbb{R}^2$), f ֆունկցիան անընդհատ է և ոչ բացասական: Ենթադրենք, որ (D) -ն տիրույթ է [2], սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրով: $(S) = \{(x, y, f(x, y)) ; (x, y) \in (D)\}$ կոչվում է f ֆունկցիայի գրաֆիկ, կամ անընդհատ մակերևույթ, տրված $z = f(x, y)$ բացահայտ տեսքով: Նշանակենք (S^*) -ով այն գլանային մակերևույթը, որի ծնիչները գուգահեռ են z առանցքին, իսկ ուղղորդ կոր է հանդիսանում (D) տիրույթի (Γ) եզրը: Այսպիսով առաջանում է (V) մարմին, սահմանափակված ներքեւից (D) -ով, վերևից (S) -ով, իսկ եզրերից՝ (S^*) -ով (տես նկ. 4):



Նկ. 4

Տրոհենք (D) -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով վերջավոր թվով մասերի $(D_1), \dots, (D_n)$, և նշանակենք՝ $\lambda = \max D_k$ (տրոհման տրամագիծ): Վերցնենք կամայական $M_k (x_k, y_k) \in (D_k)$, $k = 1, \dots, n$ և կազմենք գումար՝ $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k$ (D_k -ն (D_k) -ի մակերեսն է): Ըստ սահման-

ման, (V) մարմնի ծավալն է $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k$ ($f(M_k) \cdot D_k$ -ն (D_k) հիմքով $f(M_k)$ բարձրությամբ գլանի ծավալն է):

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է ֆունկցիա $f : (\overline{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($(D) \subset \mathbb{R}^2$) և (D) -ն տիրույթ է, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրով ((\overline{D}) -ն (D) -ի փակումն է: $(\overline{D}) = (D)U(\Gamma)$ [2]): Տրոհենք (D) -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով վերջավոր թվով մասերի $(D_1), \dots, (D_n)$: Քանի որ (D_k) տիրույթների եզրերը կտոր առ ողորկ են (այդ կորերը բոլոր կետերում, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի ունեն շոշափողներ), ապա նրանք բառակուսելի են, այսինքն ունենք մակերես՝ D_k (տես [3]):

Վերջնենք կամայական $M_k(x_k, y_k) \in (\overline{D}_k)$, $k = 1, \dots, n$ և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k$: Այն կոչվում է ինտեգրալային գումար: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k = I$ (սահմանը հասկացվում է Ոիմանի ինտեգրալի սահմանումների պես), որը կախված չէ ոչ տրոհումներից և ոչ էլ M_k կետերի ընտրությունից, ապա այդ սահմանը կանվաճենք կրկնակի ինտեգրալ՝ $I = \iint_{(D)} f dx dy$: Այսպիսով, նախորդ սահմանման համաձայն (V) մարմնի ծավալը կլինի՝

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k = \iint_{(D)} f dx dy :$$

Ինչպես և Ոիմանի ինտեգրալի դեպքում, կրկնակի ինտեգրալների համար ևս կառուցվում է տեսություն, հենված Դարբուի գումարների հատկությունների վրա [2]: Սակայն, կարծ լինելու համար, բավարարվենք ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունով՝ կնկնակի ինտեգրալը, որպես ծավալ:

Թեորեմ 1: Դիցուք $f \in C(\overline{D})$, $f(x, y) \geq 0$, (D) -ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $x = a, x = b$ ուղիղներով և

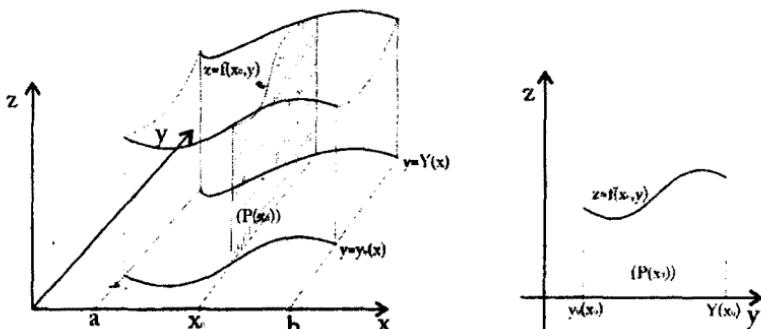
$$y = y_0(x), y = Y(x) \quad (y_0, Y \in C[a; b], y_0(x) \leq Y(x))$$

ֆունկցիաների գրաֆիկներով: Այս պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի $I = \iint_{(D)} f dx dy$ կրնակի ինտեգրալը և՝

$$\boxed{\iint_{(D)} f dx dy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy :} \quad (1)$$

Ապացուցում: $\iint_{(D)} f dx dy = V = \int_a^b P(x) dx$, որտեղ $P(x_0)$ -ն x_0

կետում ($x_0 \in [a; b]$) x առանցքին ողղահայաց ($P(x_0)$) հատույթի մակերեսն է: ($P(x_0)$) -ն իրենից ներկայացնում է սեղանակերպ, սահմանափակված $y = y_0(x_0), y = Y(x_0), z = 0$ ուղիղներով և $z = f(x_0, y)$ անընդհատ ֆունկցիաի գրաֆիկով (տես նկ. 5):



Նկ. 5

$$\text{Ուրեմն՝ } P(x_0) = \int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y) dy : \text{Այստեղից հետևում է (1)-ը: ■}$$

Դիտողություն 1: Կրկնակի ինտեգրալը օժտված է այն նույն հատկություններով ինչ Ումանի ինտեգրալը: Օրինակ, թերեմ 1-ի պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է միջինի մասին թերեմը՝

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot D, \text{ որտեղ } (\xi, \eta) - ն \overline{(D)} - ին պատկանող$$

որոշակի կետ է:

Սահմանում 3: Դիցուք (Γ) -ը անընդհատ, պարզ, փակ կոր է: Այդ կորի շրջանցման դրական ուղղությունը կանվանենք այն ուղղությունը, որով շարժվելիս նրանով սահմանափակված տիրույթի մոտակա մասը երևում է ձախից: Եթե կորը շրջանագիծ է, կամ շրջանագիծն «մոտ», ապա դրական ուղղությունը համընկնում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղության հետ, իսկ ընդհանուր դեպքում այդպես սահմանել դրական ուղղություն չի լինի (տես նկ.6):



Նկ. 6

Ոչ դրական ուղղությունը կանվանենք՝ բացասական:

Ստորև ենթադրվում է, որ (D) տիրույթը միակապ է (տես [2],[3]) և այնպիսին, որ այն տրոհվում է վերջավոր թվով սեղանակերպերի ինչպես ըստ x , այնպես էլ ըստ y առանցքների:

2.2. ԿՐԿԱՎԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԾԻ ԿԱՊԸ ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԾԻ ԴԵՏ

Թեորեմ 1 (Գրինի՝ բանաձև):

Դիցուք $P, P'_y, Q, Q'_x \in C(\overline{D})$, (Γ) -ն (D) -ի եզրն է:

ճշմարիտ է հետևյալ (Գրինի) բանաձև՝

$$\oint_{(\Gamma)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} (Q'_x - P'_y) dx dy, \quad (2)$$

որտեղ (Γ) -ն շրջանցվում է դրական ուղղությամբ:

Ապացուցում: Խախ դիտարկենք մասնավոր դեպք՝ $Q \equiv 0$ և, (D) -ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $x = a, x = b$ ուղիղներով և

* Գրին Ջորջ (1793-1841)-անգլիացի մաթեմատիկոս

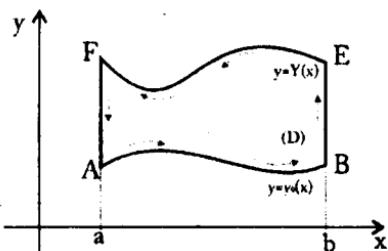
$y = Y(x)$, $y = y_o(x)$ ($Y(x) \geq y_o(x)$) անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով:

Ըստ կրկնակի ինտեգրալի հաշվման (1) բանաձևի, ունենք (տես նկ. 7):

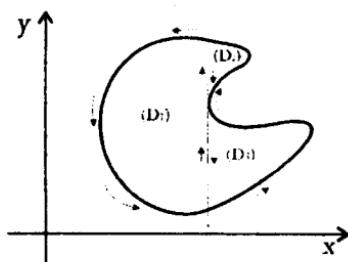
$$\begin{aligned} \iint_D P'_y dxdy &= \int_a^b dx \int_{y_o(x)}^{Y(x)} P'_y dy = \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_o(x)) dx = \\ &= - \int_{(AB)} P dx - \int_{(BE)} P dx - \int_{(EF)} P dx - \int_{(FA)} P dx = - \oint_{(F)} P dx \end{aligned}$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ $\int_{(BE)} P dx = \int_{(FA)} P dx = 0$: Այսպիսով՝

$$\iint_D P'_y dxdy = - \oint_{(F)} P dx \quad (3)$$



Նկ. 7



Նկ. 8

Ընդհանուր դեպքում, եթե (D) -ն տրոհվում է վերջավոր (n) թվով վերը նշված սեղանակերպերի և, ուրեմն՝

$$\iint_D P'_y dxdy = \sum_k^n \iint_{(D_k)} P'_y dxdy :$$

(3)-ը ապացուցվում է օգտվելով նախորդից (տրոհման գծերով ինտեգրալները ոչնչացնում են իրար (տես նկ. 8)):

Եթե $P \equiv 0$ և (D) -ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $y=c$, $y=d$ ուղիղներով և $x=x_o(y)$, $x=X(y)$ ($x_o(y) \leq X(y)$) անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով, ապա՝

$$\iint_D Q'_x dxdy = \int_c^d dy \int_{x_o(y)}^{X(y)} Q'_x dx = \oint_{(F)} Q dy : \quad (4)$$

Դատողությունները նույնն են ինչ նախորդ դեպքում:

Պարզ է նաև, որ եթե (D) -ն տրոհվում է վերջավոր թվով նշված սեղանակերպերի, ապա ստացված (4) բանաձևը մնում է ուժի մեջ:

Եթե (D) -ն տրոհվում է վերջավոր թվով ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ տեսակի սեղանակերպերի, ապա ճշմարիտ են (3)-ն ու (4)-ը միաժամանակ և, գումարելով իրար, կստանանք (2)-ը: ■

Դիտողություն 1: Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումից հետևում է, որ $\iint_D dxdy = D$ (D -ն (D) տիրույթի մակերեսն է): Եթե (2)-ի մեջ

Վերցնենք $P \equiv 0, Q \equiv x$, կստանանք

$$D = \oint_{(R)} x dy : \quad (5)$$

իսկ եթե՝ $Q \equiv 0, P \equiv y$, ապա՝

$$D = - \oint_{(R)} y dx : \quad (6)$$

(5)-ից և (6)-ից հետևում է նաև մակերես հաշվելու հետևյալ բանաձևը

$$D = \frac{1}{2} \oint_{(R)} x dy - y dx : \quad (7)$$

2.3. ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՐԻ ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՐԵԳՐԱԼԻ ԻՆՏԵԳՐԱԸ ԹԱՍՍԱՐԱՐԻՑ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Դիցուք $P, Q \in C(D)$, որտեղ (D) -ն տիրույթ է: A -ն և B -ն (D) -ին պատկանող կամայական կետեր են, իսկ (1) -ը կամայական անընդհատ, պարզ կոր է, որը միացնում է այդ կետերը և, պարունակվում է (D) -ում:

Սահմանում 1: Եթե $I = \int \limits_{(I)} P dx + Q dy$ ինտեգրալը կախված չէ (1)

կորի ընտրությունից, այլ կախված է միայն A, B կետերից, ապա ասում ենք, որ $I = \int \limits_{(I)} P dx + Q dy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման

Ժանապարհից:

Այժմ պարզենք, թե ի՞նչ պայմանների դեպքում $I = \int_{(l)} Pdx + Qdy$

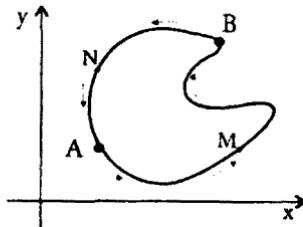
ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից:

Թեորեմ 1: Որպեսզի $I = \int_{(l)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը լինի անկախ

ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ (D) -ում պարունակվող յուրաքանչյուր անընդհատ, պարզ փակ (l) կորով ինտեգրալը հավասար լինի գրոյի:

Ապացուցում: **Անհրաժեշտություն:** Տրված l , որ $I = \int_{(l)} Pdx + Qdy$

ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից: Վերցնենք կամայական անընդհատ, պարզ փակ (l) կոր, պարունակվող (D) -ում: Այդ (l) կորի վրա ընտրենք պատճեական երկու կետ A և B , որոնց միջև ընտրենք նաև ինչ-որ M, N կետեր (տես նկ.9):



Նկ. 9

Ուսենք՝

$$\begin{aligned} \oint_{(l)} Pdx + Qdy &= \oint_{(AMBNA)} Pdx + Qdy = \oint_{(AMB)} Pdx + Qdy + \oint_{(BNA)} Pdx + Qdy = \\ &= \oint_{(AMB)} Pdx + Qdy - \oint_{(ANB)} Pdx + Qdy = 0: \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $\oint_{(l)} Pdx + Qdy = 0$:

Բավարարություն: Դայտնի l , որ նշված ինտեգրալը (D) -ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ, փակ կորով հավասար է գրոյի: Վերցնենք (D) -ին պատկանող կամայական երկու A և B կետ և միացնենք նրանք (D) -ում պարունակվող երկու կամայական անընդհատ պարզ (AMB) և (ANB) կորերով: Ուսենք՝

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{(AMBNA)} Pdx + Qdy = \oint_{(AMB)} Pdx + Qdy + \oint_{(BNA)} Pdx + Qdy = \\
 &= \oint_{(AMB)} Pdx + Qdy - \oint_{(ANB)} Pdx + Qdy:
 \end{aligned}$$

Որտեղից՝

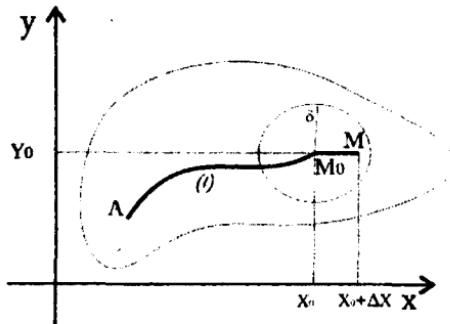
$$\oint_{(AMB)} Pdx + Qdy = \int_{(ANB)} Pdx + Qdy:$$

Այսինքն ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից: ■

Սահմանում 2: Դիցուք $P, Q \in C(D)$, որտեղ (D) -ն տիրույթ է Կասենք, որ $Pdx + Qdy$ -ը ճշգրիտ դիֆերենցիալ է (D) -ում, եթե գոյություն ունի (D) -ում $U(x, y)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝ $dU(x, y) \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ($(x, y) \in (D)$): Քանի որ, մյուս կողմից՝ $dU(x, y) \equiv U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy$, և dx, dy աճերը իրարից անկախ են (կարելի է վերցնել $dx \neq 0, dy = 0$ և հակառակը), ապա ստացված $P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy$ նույնությունը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$U'_x(x, y) \equiv P(x, y) \text{ և } U'_y(x, y) \equiv Q(x, y): \quad (1)$$

Թեորեմ 2: Որպեսզի $I = \int_{(i)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ $Pdx + Qdy$ արտահայտությունը լինի (D) -ում ճշգրիտ դիֆերենցիալ:



Աղ. 10

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Տրված t , որ $I = \int_{(t)} Pdx + Qdy$

ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճամապարհից: Ընտրենք կամայական կետ $A(a_1, a_2) \in (D)$ և այն հաստատագրենք: Վերցնենք փոփոխական կետ $M(x, y) \in (D)$ (տես նկ.10):

A և M կետերը միացնենք (D) -ում պարունակվող որևէ անընդհատ պարզ (I) կորով: Դիտարկենք $\int_{(t)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը,

որը, ըստ պայմանի, կախված է միայն A և M կետերից և, քանի որ A -ն հաստատագրված է, ապա այդ ինտեգրալը կախված է միայն $M(x, y)$ կետից, այսինքն՝ (x, y) -ից: Այսպիսով ծնվում է ֆունկցիա

$$U(x, y) = \int_{(AM)} Pdx + Qdy, \text{ որոշված } (D)\text{-ում: Ապացուցենք, որ այն դի-}$$

ֆերենցելի է (D) -ում և՝

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad ((x, y) \in (D)): \quad$$

Վերցնենք կամայական $M_\theta(x_\theta, y_\theta) \in (D)$ և այն միացնենք $A(a_1, a_2)$ կետին (D) -ում պարունակվող որևէ անընդհատ, պարզ (I) կորով: Քանի որ (D) -ն բաց բազմություն է, ապա $M_\theta(x_\theta, y_\theta)$ -ն (D) -ի ներքին կետ է, այսինքն՝ $\exists U_\delta(M_\theta) \subset (D)$: Տանը x_θ -ին Δx ($|\Delta x| < \delta$) աճ, թողնելով y_θ հաստատագրված, կստանանք $M(x_\theta + \Delta x, y_\theta)$ ($M \in (D)$) կետը: Միացնենք M_θ և M կետերը ուղիղ գծով, կստացվի $(I_1) = [M_\theta, M]$ հատվածը և նշանակենք $(I_2) = (I) \cup (I_1)$: Ունենք՝

$$\begin{aligned} U(M) &= \int_{(I_2)} Pdx + Qdy = \int_{(I)} Pdx + Qdy + \int_{(I_1)} Pdx + Qdy = \\ &= U(M_\theta) + \int_{x_\theta}^{x_\theta + \Delta x} P(x, y_\theta)dx, \end{aligned} \quad (2)$$

որտեղից՝

$$\begin{aligned} \Delta_x U(M_\theta) &= U(x_\theta + \Delta x, y_\theta) - U(x_\theta, y_\theta) = \int_{x_\theta}^{x_\theta + \Delta x} P(x, y_\theta)dx = \\ &= P(x_\theta + \theta \cdot \Delta x, y_\theta) \cdot \Delta x \quad (0 \leq \theta \leq 1), \end{aligned} \quad (3)$$

(այստեղ կիրառեցինք միջինի մասին թեորեմը): Դաշվի առնելով նաև $P(x, y)$ -ի անընդհատությունը M_o կետում, կստանանք՝

$$\frac{\Delta_x U(M_o)}{\Delta x} = P(x_o + \theta \cdot \Delta x, y_o) \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} P(x_o, y_o);$$

Քանի որ $M_o(x_o, y_o)$ -ն (D) -ի կամայական կետ է, ստանում ենք՝

$$U'_x(M) \equiv P(M), (M \in (D));$$

Նույն կերպ ապացուցվում է նաև՝

$$U'_y(M) \equiv Q(M), (M \in (D));$$

Քանի, որ $P(M), Q(M)$ ֆունկցիաները անընդհատ են (D) -ում, ապա վերջին երկու հավասարություններից հետևում է նաև U'_x, U'_y ֆունկցիաների անընդհատությունը, որը նշանակում է $U(M)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը (D) -ում: Ստացանք նաև՝

$$dU(x, y) \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy ((x, y) \in (D)); \quad (4)$$

Բավարարություն: Տրված է, որ գոյություն ունի (D) -ում $U(M)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝

$$dU(x, y) \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy ((x, y) \in (D))$$

և, ուրեմն U -ն հանդիսանում է (1) համակարգի լուծում: Պետք է ցույց տալ, որ $I = \int\limits_{(i)}^{} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման

ճամապարհից:

Դիցուք A -ն և B -ն կամայական կետեր են, պատկանող (D) -ին, իսկ (1)-ը այդ կետերը միացնող և (D) -ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ կոր է: Դիցուք (1) պարզ կորը տրված է $x = x(t), y = y(t)$ ($x, y \in C'[\alpha; \beta]$) պարամետրական տեսքով ($A(x(\alpha), y(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta))$): Դաշվի առնելով (1)-ը ունենք՝

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{(i)}^{} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt = \\ &= \int\limits_\alpha^\beta (U'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + U'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt = \int\limits_\alpha^\beta (U(x(t), y(t)))' dt = \\ &= U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) = U(B) - U(A) = U|_A^B: \end{aligned}$$

Այսպիսով, թեորեմի պայմանների առկայությամբ տեղի ունի Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև՝

$$\boxed{\int_{(AB)} Pdx + Qdy = U \Big|_A^B} : \quad (5)$$

Ստացվածը հենց նշանակում է ինտեգրալի անկախությունը ինտեգրման ճանապարհից: ■

Թեորեմ 3: Դիցուք $P, P'_y, Q, Q'_x \in C(D)$, որտեղ (D) -ն միակապ տիրույթ է (տես [2],[3]): Որպեսզի $I = \int_{(I)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը ան-

կախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ (D) -ում տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$\boxed{P'_y(x, y) \equiv Q'_x(x, y)} : \quad (6)$$

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն:

Տրված է, որ $I = \int_{(I)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման

ճանապարհից և, ուրեմն ճշմարիտ է (տես (1))՝

$$U'_x(x, y) \equiv P(x, y) \text{ և } U'_y(x, y) \equiv Q(x, y) : \quad (7)$$

Յաշվի առնելով այն, որ $P(x, y)$ -ը ունի անընդհատ ածանցյալ $P'_y(x, y)$, (7)-ից ստանում ենք, որ $U(x, y)$ -ը ունի անընդհատ խառը ածանցյալ՝

$$\boxed{U''_{xy}(x, y) \equiv P'_y(x, y)} : \quad (8)$$

Նույն կերպ դատելով, (7) -ից ստանում ենք, որ $U(x, y)$ -ն ունի անընդհատ խառը ածանցյալ՝

$$\boxed{U''_{yx}(x, y) \equiv Q'_x(x, y)} : \quad (9)$$

Քանի որ խառը ածանցյալները անընդհատության կետերում հավասար են իրար, ապա (8)-ից և (9)-ից, ստանում ենք (7)-ը:

Բավարարություն: Տրված է (6)-ը: Կերցնենք (D) -ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ, փակ (1) կոր, նրանով սահմանափակվում է որոշակի (D_i) տիրույթ: Յաշվի առնելով (6)-ը, գրինի բանաձևից (տես 2.թ. 2.) ստանում ենք՝

$$\oint_{(I)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} (Q'_x - P'_y) dxdy = 0:$$

Այստեղից, ըստ թեորեմ 1-ի ստանում ենք $I = \int_{(I)} P dx + Q dy$ ինտեգրալի անկախությունը ինտեգրման ճանապարհից: ■

2.4. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՌԻՆՈՒՄ ԿՐԿՆԱԿԻՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄԵՋ

Դիցուք x, y հարթության վրա տրված է (D) տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրով և՝ (u, v) հարթության վրա (Δ) տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (γ) եզրով: Ենթադրենք, որ այս երկու տիրույթների միջև

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (x, y \in C^1(\bar{\Delta})) \quad (1)$$

ֆունկցիաները ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այս դեպքում, անբացահայտ ֆունկցիաների տեսությունից (տես [2],[3]) հայտնի է, որ

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = I, \quad (2)$$

որտեղ, օրինակ $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & y'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix} = I(u, v)$ (Յակոբիի որոշիչ կամ յակոբիան): (2)-ից հետևում է, որ այս որոշիչները գոյուից տարբեր են և, քանի որ անընդհատ են, ապա նրանք ունեն որոշակի նշան: Այստեղից հետևում է, որ $(\bar{\Delta})$ -ի ներքին կետին համապատասխանում է (\bar{D}) -ի ներքին կետ և հակառակը: Ուրեմն (Δ) -ի (γ) եզրին համապատասխանում է (D) -ի (Γ) եզրը: Եթե (Δ) -ում ունենք $u = u(t), v = v(t)$ ($u, v \in C^1[\alpha; \beta]$) հավասարություններով տրված պարզ (γ_1) կոր, այնպիսին, որ $u'(t)^2 + v'(t)^2 > 0$, ապա

$$x = x(u(t), v(t)) = x(t), y = y(u(t), v(t)) = y(t) \quad (t \in [\alpha; \beta])$$

հավասարություններով որոշված (γ_1) կորը պարունակվում է (D) -ում:

Ընդ որում $x(t), y(t)$ ֆունկցիաները ունեն անընդհատ ածյանցալներ

$$x'(t) = x'_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + x'_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t),$$

$y'(t) = y'_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + y'_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$, որոնք միաժամանակ զրո լինել չեն կարող, քանի որ հակառակ դեպքում, հաշվի առնելով, որ $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = I(u, v) \neq 0$ կստանանք, որ $u'(t) = v'(t) = 0$,

որը հակասում է վերը նշված պայմանին:

Եթե (Δ) -ում (u, v) կետը շրջանցում է (γ_i) $((\gamma_i) \subset (\Delta))$ անընդհատ, պարզ փակ կորը դրական ուղղությամբ, ապա համապատասխան (x, y) կետը (γ_i) -ի պատկեր հանդիսացող անընդհատ, պարզ փակ (Γ_i) $((\Gamma_i) \subset (D))$ կորը կշրջանցի դրական կամ բացասական ուղղությամբ: Առաջին դեպքում կասենք որ (1) ձևափոխությունները պահպանում են կողմնորոշումը, երկրորդ դեպքում՝ փոխում են այն:

Հաշվենք (D) տիրույթի մակերեսը արտահայտված (u, v) փոփոխականներով, լրացուցիչ ենթադրելով, որ $y(u, v)$ -ն ունի անընդհատ խառը ածանցյալներ: Դիցուք (γ) -ն որոշված է $u = u(t), v = v(t)$ ($u, v \in C^1[\alpha; \beta]$) հավասարումներով, որտեղ $[\alpha; \beta]$ հատվածը ընտրված է այնպես, որ, եթե t -ն շարժվում է α -ից β , համապատասխան $(x(t), y(t))$ կետը շրջանցում է (Γ) -ն դրական ուղղությամբ: Ունենք (տես 2.2 (5))՝

$$\begin{aligned} D &= \oint_{(\Gamma)} x dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x(u(t), v(t)) (y'_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + y'_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)) dt = \\ &= \pm \oint_{(i)} x \cdot \frac{\partial y}{\partial u} du + x \cdot \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{aligned} \tag{3}$$

(3)-ի աջ մասի նշանը ճշտելու համար հաշվենք այդտեղ գրված ինտեգրալը, բերելով այն Ռիմանի ինտեգրալի, եթե (γ) կորը տրված

$t \ u = u(t), v = v(t)$ տեսքով: Ըստ Գրինի բանաձևի

$$\oint_{(r)} x \cdot \frac{\partial y}{\partial u} du + x \cdot \frac{\partial y}{\partial v} dv = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial(x \cdot y_v)}{\partial u} - \frac{\partial(x \cdot y_u)}{\partial v} \right) dudv = \\ = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \right) dudv = \iint_{(\Delta)} I(u, v) dudv, \quad (4)$$

որտեղ ձախ մասի ինտեգրալը շրջանցվում է դրական ուղղությամբ:
(3), (4)-ից հետևում է, որ $D = \pm \iint_{(D)} J(u, v) dudv$: Քանի որ մակերեսը

դրական է, ապա պարզ է, որ

$$D = \iint_{(\Delta)} J(u, v) dudv: \quad (5)$$

Ընդ որում, այս բանաձևի ստացման ընթացքում պարզ դարձավ, որ $I(u, v)$ յակորիանի դրական նշանը համապատասխանում է կողմնորոշման պահպանմանը, բացասական նշանը՝ կողմնորոշման փոփոխմանը:

Կիրառելով (5)-ում միջինի մասին թեորեմը, կստանանք՝ $D = |I(u^*, v^*)| \cdot \Delta$, որտեղ՝ $(u^*, v^*) \in (\bar{\Delta})$: Վերցնենք կամայական $M_o \in (\Delta_1) ((\Delta_1) \subset (\Delta))$ և (Δ_1) -ի տրամագիծը՝ $((\Delta_1))$ -ին պատկանող ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնը՝ $\mu = diam(\Delta_1)$ ձգտեցնենք զրոյի, այնպես որ պահպանվի $M_o \in (\Delta_1)$ պայմանը: Դիցուք (Δ_1) -ի պատկերը (D_1) -ն է, իսկ՝ $\lambda = diam(D_1)$: Ծնորիկվ $x = x(u, v), y = y(u, v)$ ֆունկցիաների անընդհատության՝ $\lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda = 0$: Քանի որ անընդհատ է նաև

$$|I(u, v)| \text{ ֆունկցիան, ուստի՝ } |I(M_o)| = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{D_1}{\Delta_1}: \text{ Այսինքն } |I(M_o)| = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{|I(u^*, v^*)| \cdot \Delta_1}{\Delta_1}$$

բացարձակ արժեքը ցույց է տալիս, թե որքանով է աղավաղվում (լայնանում, կամ սեղմվում) մակերեսը փոփոխականների փոխադինման դեպքում:

Այժմ վերիիշենք մեկ փոփոխականի դեպքը՝

$$f \in C[a; b] \quad (a < b):$$

Եթե $\forall x \in (a; b)$ $\exists f'(x)$ և այն դրական է (Φ ունկցիան մոնոտոն աճող է), ապա, եթե x -ը փոփոխվում է a -ից b , $f(x)$ -ը փոփոխվում է $f(a)$ -ից $f(b)$, այսինքն պահպանվում է կողմնորոշումը ($f'(x) < 0$ դեպքում կողմնորոշումը փոխվում է): Մյուս կողմից, ըստ Լագրանժի թեորեմի

$$d = f'(\xi) \cdot \Delta \quad (d = f(b) - f(a), \Delta = b - a, \xi \in (a; b)):$$

Եթե վերցնենք կամայական $x_0 \in (a; b)$ և Δ -ն ձգտեցնենք զրոյի,

այնպես որ պահպանվի $x_0 \in (a; b)$ պայմանը, ապա $f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{\Delta}$:

Այս դատողությունները ցույց են տալիս, թե որքան խորն է ածանցյալի և յակորհանի նմանությունը:

Դիտողություն 1: (5) բանաձեռ ճշնարիտ է նաև այն դեպքում, եթե փոխմիարժեք լինելու պայմանը խախտված է վերջավոր թվով անընդհատ, պարզ կորերի վրա (տես [3]):

Օրինակ 1: Դիտարկենք R շառավղով $O(0,0)$ կենտրոնով շրջան բներային համակարգում՝

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi):$$

Նշված Φ ունկցիաները արտապատկերում են $[0; R] \times [0; 2\pi]$ ուղղանկյունը R շառավղով $O(0,0)$ կենտրոնով շրջանի վրա: Փոխմիարժեքության պայմանը խախտված է հետևյալ կորերի վրա՝ $r = 0$ հատվածը արտապատկերվում է $O(0,0)$ կետի, իսկ $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$, հատվածները՝ արտապատկերվում են միևնույն $[O; A]$ ($A(R; 0)$) հատվածի վրա: Ինչպես արդեն նշվեց, (5)-ը ճշնարիտ է նաև այս դեպքում: Դեշտ է համոզվել, որ տվյալ դեպքում յակորհանը՝ $I \equiv r$:

Թեորեմ 1 (փոփոխականների փոխարինումը կրկնակի ինտեգրալում):

Դիցուք (x, y) հարթության մեջ տրված է (D) տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրով և (u, v) հարթության մեջ (Δ) տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (γ) եզրով: Այս երկու տիրույթների միջև $x = x(u, v), y = y(u, v)$ ($x, y \in C'(\bar{\Delta})$) Φ ունկցիաները ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանու-

թյուն: Ենթադրենք, որ (\bar{D}) -ի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա՝ $f \in C(\bar{D})$: Այդ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |I(u, v)| du dv} \quad (6)$$

Ապացուցում: Տրուենք (D) -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով մասերի (D_k) , $k = 1, \dots, n$: Այն կառաջացնի (Δ) տիրույթի համապատասխան տրոհում (Δ_k) , $k = 1, \dots, n$: Ընդ որում $D_k = \iint_{(\Delta_k)} |I(u, v)| du dv = |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$ ($(u_k^*, v_k^*) \in (\bar{\Delta}_k)$): Վերցնենք կամայական $(u_k^*, v_k^*) \in (\bar{\Delta}_k)$ և կազմենք գումար

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \cdot D_k = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \cdot |I(u_k^*, v_k^*)| \Delta_k : \end{aligned}$$

$$\text{Նշանակենք՝ } \sigma^* = \sum_{k=1}^n f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \cdot |I(u_k^*, v_k^*)| \Delta_k :$$

Եթե՝ $\mu = \max(\text{diam}(\Delta_k))$, $\lambda = \max(\text{diam}(D_k))$, ապա ակնհայտ է, որ $\lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda = 0$: Պարզ է նաև, որ՝

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma^* = J = \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |I(u, v)| du dv, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} (\sigma - \sigma^*) = 0$$

(Վերջին պնդումը ապացուցվում է նույն կերպ, ինչ համապատասխան փաստը, օրինակ, երկրորդ սեղի կորագիծ ինտեգրալի դեպքում): Այստեղից հետևում է, որ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = J$: ■

$$\text{Օրինակ 2: Դաշվել } J = \iint_{\substack{0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 \right) dx dy : \text{ Կատարենք}$$

փոփոխականների փոխարինում՝

$$x = a \cdot r \cdot \cos \varphi, y = b \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) :$$

$$\text{Դեշտ է համոզվել, որ } I(r, \varphi) = abr : \text{ Այսպիսով, ունենք՝}$$

$$J = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (r^2 + 1) \cdot r dr = 2\pi \cdot ab \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right)_0^r = \frac{3\pi ab}{2} :$$

3. ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

3.1. ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՐԱՍՈՒՅԾ ԵՎ ԴԱԾՎՈՒՅԾ:

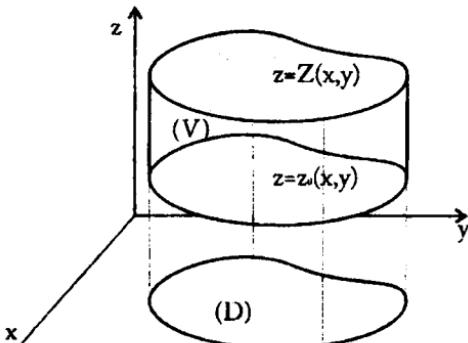
Սահմանում 1: Դիցուք տրված է (V) մարմին, սահմանափակված $z = z_o(x, y), z = Z(x, y)$ ($z_o, Z \in C(\bar{D}), z_o(x, y) \leq Z(x, y)$) մակերևույթներով և գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդ կորն է (D)-ի կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրը, իսկ ծնիչները գուգահեռ են չառանցքին: Ենթադրենք նաև, որ այդ մարմնի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f \in C(\bar{V})$ (տես նկ. 11): Տրոհենք մարմինը կտոր առ կտոր ողորկ (S_k) մակերևույթներով (V_k) ($k = 1, \dots, n$) մասերի: Այն պայմանից, որ (V_k)-ի (S_k) եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է, այսինքն, բացառությամբ վերջավոր թվով (S_k)-ին պատկանող անընդհատ կորերի, մնացած կետերում կա շոշափող հարթություն (տես ստորև 4.1, սահմանում 3), հետևում է, որ (V_k)-ն խորանարդելի է, այսինքն ունի ծավալ[3]: Վերցնենք յուրաքանչյուր մասից պատահական M_k կետ ($M_k \in (\bar{V}_k)$) և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot V_k$, որտեղ V_k -ն (V_k)-ի ծավալն է: Նշանակենք $\lambda = \max_{k=1}^n diam(V_k)$, որտեղ $diam(V_k)$ -ն (V_k)-ին պատկանող ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնն է:

Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման (անկախ տրոհումների և M_k կետերի ընտրությունից):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I = \iiint_{(V)} f dx dy dz,$$

ապա այն կոչվում է եռակի ինտեգրալ:

Ելնելով կրկնակի ինտեգրալի հետ նմանությունից, առանց ապացուցելու (այն դժվար չէ բերել) ձևակերպենք հետևյալը:



Ակ. 11

Թեորեմ 1: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի եռակի (I) ինտեգրալը և այն կարելի հաշվել հետևյալ կերպ՝

$$I = \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x,y)}^{z(x,y)} f(x, y, z) dz : \quad (16)$$

Եթե (D)-ն, իր հերթին

$$x = a, x = b, y = y_0(x), y = Y(x) \quad (y_0, Y \in C[a; b], y_0(x) \leq Y(x))$$

կորերով սահմանափակված սեղանակերպ է, ապա՝

$$I = \iiint_{(V)} f dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{z(x,y)} f(x, y, z) dz : \quad (17)$$

3.2. ՓոՓոխականների Փոխարժևության Ինտեգրալու Տոպոլոգիա

Թեորեմ 2: Դիցուք x, y, z տարածության մեջ ունենք (V) մարմին, կտոր առ կտոր ողորկ (S) եզրով և, ξ, η, ζ տարածության մեջ (Ω) մարմին, կտոր առ կտոր ողորկ (Σ) եզրով: Տրված են նաև $x = x(\xi, \eta, \zeta), y = y(\xi, \eta, \zeta), z = z(\xi, \eta, \zeta)$ ($x, y, z \in C^1(\bar{\Omega})$) ֆունկցիաներ, որոնք ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն (V) և (Ω) մարմինների միջև:

Դիցուք տրված է $f(x, y, z)$ ($f \in C(\bar{V})$) ֆունկցիա: Այս պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է փոփոխականների փոխարինման հետևյալ բանաձևը՝

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \boxed{\iint_{\Omega} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |I(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta}, \quad (1)$$

որտեղ I յակորիանը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{vmatrix}:$$

Թերեմի ապացույցը, ըստ էության նույնն է, ինչ կրկնակի ինտեգրալի դեպքում:

Օրինակ 1: Հաշվել $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ մակերևույթով սահմանափակված մարմնի V ծավալը: Նախ նկատենք, որ ծավալ հաշվելու համար (1)-ի մեջ հարկավոր է վերցնել $f \equiv I$: Այնուհետ նկատենք, որ մակերևույթի հավասարումից, որտեղ $x - \varrho$ և $y - \varrho$ մասնակցում են քառակուսի աստիճանով, հետևում է, որ մարմինն ունի համաչափություն $(y, z), (z, x)$ հարթությունների նկատմամբ և, $z \geq 0$: Ուրեմն, քավական է մարմնի ծավալի քառորդը հաշվել, վերցնելով՝ $x \geq 0, y \geq 0$: Բնական է անցնել գնդային համակարգին

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, z = r \cdot \cos\theta \quad (0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}):$$

Հեշտ է համոզվել, որ գնդային համակարգում, յակորիանը՝ $I = r^2 \cdot \sin\theta$: Մակերևույթի հավասարումից, ստանում ենք՝ $r^4 = a^3 r \cdot \cos\theta \Rightarrow r = a \cdot \sqrt[3]{\cos\theta}$:

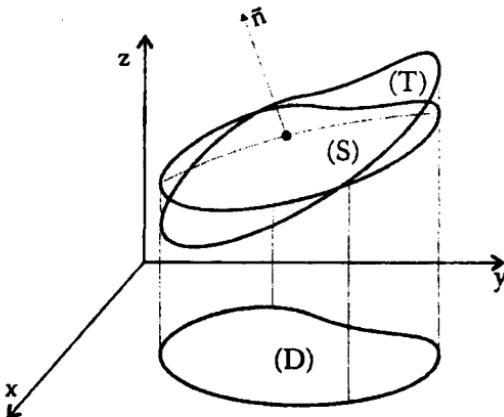
Այսպիսով՝

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta = \frac{\pi a^3}{3} \sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{3}:$$

4. ՄԱԿԵՐԱՍԻԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

4.1. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹ, ՇՈՇԱՓՈՂ ԴԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ, ՆՈՐՄԱՆ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՂՄ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՎ

Սահմանում 1: Դիցուք (D) -ն տիրույթ է, ընկած x, y հարթության մեջ, և տրված է $z = f(x, y)$ ֆունկցիա $\left(f \in C(\bar{D})\right)$:
 $(S) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in (D)\}$ եռաչափ տարածության ենթաբազմությունը կոչվում է մակերևույթ, տրված $z = f(x, y)$ բացահայտ տեսքով (տես նկ.12): Պարզ է, որ $(\bar{S}) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in (\bar{D})\}$:



Նկ. 12

Սահմանում 2: Դիցուք (Δ) -ն տիրույթ է, ընկած u, v հարթության մեջ, և այդ տիրույթում տրված են

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

ֆունկցիաներ $(x, y, z \in C^1(\bar{\Delta}))$:

$$(S) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in (\Delta)\} \quad ((S) \subset \mathbb{R}^3)$$

բազմությունը կոչվում է անընդիատ մակերևույթ, տրված պարամետրական տեսքով՝ $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, u -ն և v -ն կոչվում են պարամետրեր:

Պարզ է որ՝ $(\bar{S}) = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in (\bar{\Delta})\}$: (S) մակերևույթը կոչվում է պարզ (հնգն իրեն չհատող), եթե պարամետրի տարրեր արժեքներին համապատասխանում են (S) մակերևույթի տարրեր կետեր: Մակերևույթը կոչվում է պարզ փակ, եթե պարզ լինելու պայմանը խախտված է ինչ որ պարզ փակ, կտոր առ կտոր ողորկ կորի վրա: Եթե մակերևույթը տրված է բացահայտ տեսքով, ապա դա նույնն է, ինչ այն տրված լինի $x = x, y = y, z = f(x, y)$ պարամետրական տեսքով (x, y փոփոխականները պարամետրերի դերում են): Ակնհայտ է, որ բացահայտ տեսքով տրված մակարևույթը պարզ է:

Սահմանում 3: Դիցուք (S) մակերևույթը տրված է $z = f(x, y)$ ($f \in C(\bar{D})$) բացահայտ տեսքով (տես սահմանում 1), $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ($A_o(x_o, y_o) \in (D), z_o = f(x_o, y_o)$) մակերևույթի կետ է: Կասենք, որ $M_o(x_o, y_o, z_o)$ կետով անցնող հարթությունը (S) մակերևույթի շոշափողն է (շոշափող հարթություն է) այդ կետում, եթե ինչպիսի $M \in (S)$ ($M(x, y, f(x, y)), (x, y) \in (D)$) կետ էլ վերցնենք,

$\overrightarrow{M_o M}$ վեկտորի կազմած անկյունը այդ հարթության հետ ձգտում է զրոյի, եթե M կետը, մնալով մակերևույթի վրա, ձգտում է M_o -ի:

Սահմանում 4: $M_o(x_o, y_o, z_o)$ կետում շոշափող հարթությանը ուղղահայաց վեկտորը կոչվում է մակերևույթի նորմալ այդ կետում:

Թեորեմ 1: Եթե (S) մակերևույթը տրված է $z = f(x, y)$ ($f \in C(D)$, (D)-ն տիրույթ է) բացահայտ տեսքով և, f -ը դիֆերենցելի է $A_o(x_o, y_o) \in (D)$ կետում, ապա $M_o(x_o, y_o, z_o) \in (S)$ ($z_o = f(A_o)$) կետում (S) մակերևույթը ունի շոշափող հարթություն, որի հավասարումն է՝

$$z - z_o = p(x - x_o) + q(y - y_o) \quad (p = f'_x(A_o), q = f'_y(A_o)): \quad (1)$$

Ապացուցում: Պարզ է, որ $\vec{n}(p, q, -1)$ վեկտորը ուղղահայաց է (1) հավասարումով որոշվող հարթությանը: Եթե նշանակենք $\Delta x = x - x_o, \Delta y = y - y_o$,

$$\Delta f(A_0) = f(A) - f(A_0) \quad (A(x, y) \in D), \quad M(x, y, f(x, y)) \in S, \quad \text{ապա}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (\Delta x, \Delta y, \Delta f(A_0)): \quad \text{Դիցուք } \overrightarrow{M_0M} \text{ վեկտորը կազմում է } \varphi \text{ անկյուն } \tilde{n}(p, q, -1) \text{ վեկտորի հետ: Ակնհայտ է, որ } \overrightarrow{M_0M} \text{ վեկտորի (1) հարթության հետ կազմած անկյան գրոյի ծգտելը համարժեք է } 0^{\circ}, \text{ որ } \varphi \text{-ն ծգտի } 90^{\circ}-ի, \text{ որն էլ, իր հերթին համարժեք է } \cos\varphi \text{-ի գրոյի ծգտելուն: Ուստի, հաշվենք } \cos\varphi \text{-ն և, այն գնահատենք, հաշվի առնելով } f \text{ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը } A_0(x_0, y_0) \in D \text{ կետում:}$$

$$\Delta f(A_0) = p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta y + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right): \quad (2)$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} |\cos\varphi| &= \frac{|p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta y - \Delta f(A_0)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta f^2(A_0)} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \leq \\ &\leq \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{} 0: \end{aligned}$$

Ստացվածը նշանակում է, որ (1)-ը շոշափող հարթություն է: ■

Նոյն կերպ սահմանվում է շոշափող հարթությունը, եթե այն տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (x, y, z \in C'(\bar{\Delta})): \quad$$

$$\text{Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը } \begin{bmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{bmatrix} \quad (\text{բոլոր ածանց-})$$

յալմերը վերցրած են (u, v) կետում), որի միջոցով կազմենք հետևյալ մինորները (Յակոբիի որոշչները, կամ կարճ, յակոբիանները):

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = y'_u \cdot z'_v - y'_v \cdot z'_u, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = z'_u \cdot x'_v - z'_v \cdot x'_u,$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u \cdot y'_v - x'_v \cdot y'_u: \quad (3)$$

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ եթե

$$A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v) > 0 \quad ((u, v) \in \Delta), \quad (4)$$

այսինքն $A(u, v), B(u, v), C(u, v)$ յակոբիանները միաժամանակ

զրո չեն (Δ)-ում, ապա

$$\forall N_o(x(M_o), y(M_o), z(M_o)) \in (S) (M_o(u_o, v_o) \in (\Delta))$$

կետում գոյություն ունի շոշափող հարթություն, որը պարագնետրական տեսքով գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} x - x_0 = x'_u \cdot (u - u_0) + x'_v \cdot (v - v_0) \\ y - y_0 = y'_u \cdot (u - u_0) + y'_v \cdot (v - v_0) \end{cases} \quad (5)$$

$$z - z_0 = z'_u \cdot (u - u_0) + z'_v \cdot (v - v_0) \quad (6)$$

$$z - z_0 = z'_u \cdot (u - u_0) + z'_v \cdot (v - v_0), \quad (7)$$

այստեղ բոլոր նաև ակի ածանցյալները վերցված են $M_o(u_o, v_o)$ կետում:

Խնդիր 2: Դիցուք ճշմարիտ է (4)-ը և, որոշակիության համար $M_o(u_o, v_o)$ կետում $C = x'_u \cdot y'_v - x'_v \cdot y'_u \neq 0$: Քանի որ C -ն (5), (6) համակարգի գլխավոր որոշիչն է, ապա այս հանակարգը միաժեքորեն լուծվում է $u - u_0, v - v_0$ -ի նկատմամբ: Լուծեք այդ համակարգը և ապացուեք, որ (5-7) հավասարումներով որոշվող շոշափող հարթության հավասարումը բացահայտ տեսքով կլինի՝

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0: \quad (8)$$

(8)-ից հետևում է, որ այս շոշափող հարթությանը ուղղահայաց վեկտորը N_o կետում (շոշափող հարթության նորմալը) կլինի՝ $\vec{n}(A, B, C)$: Ա, եթե α, β, γ -ով նշանակենք $\vec{n}(A, B, C)$ նորմալի համապատասխանաբար x, y, z առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյունները, ապա նրանց կոսինուսները (ուղղորդ կոսինուսները) կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

Ընդ որում (9)-ում պետք է վերցնել ամենուր կամ միայն դրական նշանը կամ՝ միայն բացասականը: Այս դեպքում կասենք, որ կետից կետ նորմալի ուղղությունը փոփոխվում է անընդհատորեն:

Պարզ հաշիվը ցույց է տալիս, որ այն մասնավոր դեպքում, եթե մակերևույթը տրված է $z = f(x, y)$ ($f \in C(D)$) բացահայտ տեսքով, ապա համարելով, որ $x = u, y = v$, ստանում ենք (տես նաև (1)-ը)

$A = -p$, $B = -q$, $C = I$: Ուրեմն նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են՝

$$\cos\alpha = \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \cos\beta = \mp \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad (10)$$

ընդ որում ընտրվում է ամենուր կամ վերևի նշանը, կամ՝ ներքևի:

Սահմանում 5: Մակերևույթը, ինչպես էլ այն տրված լինի, կոչվում է ողորկ, եթե նրա յուրաքանչյուր կետում կա շոշափող հարթություն (կա նորմալ): Եթե նշված պայմանը խախտվում է վերջավոր թվով անընդհատ կորերի վրա, ապա մակերևույթը կոչվում է կտոր առ կտոր ողորկ:

Սահմանում 6: Մակերևույթը կոչվում է երկկողմանի, եթե նրա վրա ինչպիսի անընդհատ, փակ, պարզ կոր էլ վերցնենք և այդ կորի կամայական N_0 կետում ընտրենք նորմալի որոշակի ուղղություն, ապա երբ շրջանցում ենք այդ կորը կետից կետ փոփոխելով նորմալի ուղղությունը անընդհատորեն և վերադառնում ենք նույն N_0 սկզբնակետը, նորմալի ուղղությունը համմենում է նախնականի հետ:

Իսկ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի այնպիսի պարզ փակ կոր և կորին պատկանող այնպիսի կետ, որ երբ այդ կետում ընտրում ենք նորմալի որոշակի ուղղություն և, վերը ասածի պես այդ կորով վերադառնում ենք նույն կետը պարզվում է, որ նորմալի ուղղությունը փոխվել է 180° -ով, ապա այդպիսի մակերևույթը կոչվում է միակողմանի:

Միակողմանի մակերևույթի օրինակ է Մյորիուսի՝ թերթը (տես [3]): Այդ թերթը այնպիսին է, որ երբ սկսում ենք այն ներկել, շարժվելով մակերևույթով ապա, ի վերջո թերթը ներկվում է ամբողջովին:

Այսուհետ կրիտարիկենք միայն երկկողմանի մակերևույթը:

Սահմանում 7: Երկկողմանի մակերերևույթի կողմ ասելով հասկանում ենք մակերևույթի այն կետերի բազմությունը, որոնց վերագրված են նորմալի ուղղությունները այնպես, որ կետից կետ անցնելիս նրանք փոխվում են անընդհատորեն: Կողմը ընտրելու համար բավական է որևէ կետում ընտրել (9)-ը (կամ (10)) բանաձևերում նորմալի ուղղորդ կոսինուսների նշանը (այդ նույն նշանը պետք է պահպանել բոլոր մնացած կետերում):

Եթե մակերևույթը տրված է բացահայտ տեսքով և որևէ կետում

* Մյորիուս Ավգուստ Ֆերդինանտ (1790-1868)-գերմանացի երկրաչափ:

ընտրել ենք $\cos\gamma$ -ի դրական նշանը (նորմալը կազմում է սուր անկյուն և առանցքի դրական ուղղության հետ), ապա այդպես ընտրված մակերևույթի կողմը կանվանենք վերին: Երբ նորմալը կազմում է բուր անկյուն և առանցքի դրական ուղղության հետ (ընտրել ենք $\cos\gamma$ -ի բացասական նշանը), ապա մակերևույթի այդ կողմը կանվանենք ստորին:

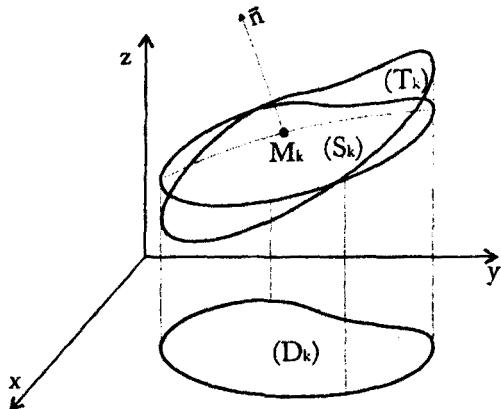
Եթե մակերևույթը փակ է (այն սահմանափակում է ինչ-որ մարմին), և, երբ որևէ կետում նորմալը ուղղված է դեպի այդ մարմինը (ուղղված է ներս), ապա մակերևույթի համապատասխան կողմը կանվանենք ներքին: Իսկ, եթե նորմալը ուղղված է դեպի դուրս, ապա այդ կողմը կանվանենք արտաքին:

Սահմանում 8: Եթե ընտրված է ողորկ պարզ մակերևույթի կողմը, և՝ նրա վրա վերցված է անընդհատ, փակ պարզ կոր, ապա այդ կորի շրջանցման դրական ուղղությունը կորոշենք հետևյալ կերպ՝ եթե դիտորդը դասավորվի այնպես, որ կողմին համապատասխան նորմալը ուղղվի ոտքերից դեպի գլուխ, ապա կորը այդ ուղղությամբ շրջանցելիս նրանով սահմանափակված մակերևույթի մոտակա մասը դիտորդին երևա ծախսից (հառակ դեպքում՝ բացասական): Այդպես է սահմանվում մակերևույթի կողմնորոշումը:

Սահմանում 9: Դիցուք տրված է (S) մակերևույթը բացահայտ տեսքով՝ $z = f(x, y)$ ($f \in C^1(\overline{D})$), (D)-ն (Γ) կտոր առ կտոր ողորկ եզրով տիրույթ է: Տրուենք (D)-ն կտոր առ կտոր ողորկ Γ_k ($k = 1, \dots, n$) կորերով (D_k) մասերի: Դիտարենք Γ_k ուղղորդ կորերով և և առանցքին գուգահեռ ծնիշներով առաջացած (S_k^*) ($k = 1, \dots, n$) գլանային մակերևույթները, որոնք կառաջացնեն (S) մակերևույթի տրոհում (S_k) ($k = 1, \dots, n$) մասերի: Յուրաքանչյուր (S_k) մասում ընտրենք կամայական M_k կետ և այդ կետում տանենք շոշափող հարթություն: (S_k^*) ($k = 1, \dots, n$) գլանային մակերևույթները այդ շոշափող հարթություններից կանգառեն (T_k) հարթ պատկերներ (T_k մակերեսով):

(S) մակերևույթի տրամագիծ ($diam(S)$) է կոչվում այդ մակերևույթի ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնը, իսկ $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} diam(S_k)$ կոչվում է (S) մակերևույթի

Մակերևույթի մակերես ասելով հասկանանքը $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k$ (տես նկ. 13):



Նկ. 13

Թեորեմ 2: Եթե տրված է (S) մակերևույթը բացահայտ տեսքով՝ $z = f(x, y)$ ($f \in C^1(\bar{D})$, (D) -ն տիրույթ է), որը ունի կտոր առ կտոր ողղորկ (Γ) եզր, ապա (S) -ը քառակուսելի է և (տես (1))՝

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot dx dy \quad (11)$$

Ապացուցում: Քանի որ (D_k) -ն (T_k) -ի պրոյեկցիան է x, y հարթության վրա, իսկ γ_k -ն հանդիսանում է x, y հարթության և M_k կետում տարված շղշափող հարթության կազմած անկյունը (γ_k -ն նաև նորմալի և z առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյունն է), ապա $D_k = T_k \cdot |\cos \gamma_k|$ (տես նկ. 13): Պարզ է նաև, որ

$$\mu = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(D_k) \rightarrow 0, \text{ եթե } \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k) \rightarrow 0 : \text{Ուրեմն}$$

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{|\cos \gamma_k|} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot D_k = \\ &= \iint_{(D)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot dx dy : \blacksquare \end{aligned}$$

Դիտողություն 1: Եթե (S) մակերևույթը տրված է պարամետրական տեսքով

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (x, y, z \in C^1(\bar{D}), \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

(տես (3)), ապա նույն կերպ սահմանվում է այդ մակերևույթի մակերեսը և, կարելի է ապացուցել, որ

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot du dv : \quad (12)$$

Եթե ներմուծենք նշանակումներ (գառայան գործակիցներ)

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v,$$

ապա՝ (տես, օրինակ [3]), $A^2 + B^2 + C^2 = E \cdot G - F^2$:

Անցումը գառայան գործակիցներին հաճախ հարմար է հաշվարկ անելիս: Կիրառելով (12)-ում միջինի մասին թեորեմը (տես 2. 1, դիտ. 1), կստանան՝

$$S = \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{M'} \cdot \Delta \quad \left(M' \in (\bar{\Delta}) \right) : \quad (13)$$

4.2. Առաջին ՍԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹՅԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է պարզ (S) մակերևույթը պարամետրական տեսքով

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (x, y, z \in C^1(\bar{\Delta}))$$

և նրա վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա $f(x, y, z)$ ($f \in C(\bar{S})$):

Ենթադրվում է, որ (Δ) -ի (γ) եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: Տրուհենք (Δ) -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով (Δ_k) ($k = 1, \dots, n$) մասերի, այն կառաջացնի (S) մակերևույթի տրոհում՝

$$(S_k) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in (\Delta_k)\} \quad (k = 1, \dots, n):$$

Ընտրենք յուրաքանչյուր (\bar{S}_k) մասից պատահական $M_k \in (\bar{S}_k)$

կետ և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot S_k$, որտեղ S_k -ն (S_k) մա-

Կերևույթի մակերեսն է (տես նկ. 13): Եթե $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k)$, ապա առաջին սեռի մակերևութային ինտեգրալ ասելով հասկանում ենք հետևյալ վերջավոր սահմանը (անկախ տրոհումներից և $M_k \in (\bar{S}_k)$ կետերի ընտրությունից):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot S_k = \iint_{(S)} f(x, y, z) ds:$$

Թեորեմ 1: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ, առաջին սեռի մակերևութային $\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$ ինտեգրալը գոյություն ունի և

այն բերվում է հետևյալ կրկնակի ինտեգրալի՝

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = I = \iint_{(D)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv: \quad (1)$$

Ապացուցում: Ըստ 4.1, (13)-ի՝

$$S_k = \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{M'_k} \cdot \Delta_k \quad \left(M'_k \in (\bar{\Delta}_k) \right)$$

$$\text{Ա, ուրեմն՝ } \sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot S_k = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{M'_k} \cdot \Delta_k: \quad (2)$$

Կազմենք նոր գումար՝

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{M_k} \cdot \Delta_k: \quad (3)$$

Նկատենք, որ $\lambda' = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(\Delta_k) \rightarrow 0$, եթե

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k) \rightarrow 0:$$

Նույն մեթոդով, ինչ երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը ՈՒմանի ինտեգրալի բերման դեպքում, ապացուցվում է, որ $\sigma - \sigma^* \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} 0$: Քանի որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^* = I = \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv,$$

ապա $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$: ■

Դիտողություն 1: Եթե մարերևույթը տրված է

$$z = z(x, y) \quad (z \in C^1(\bar{D}))$$

բացահայտ տեսքով, ապա (1) բանաձևը կը նդունի հետևյալ տեսքը (սեւ (1))՝

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy :$$

Օրինակ 1: Ստանանք R շառավղով h բարձրությամբ գնդային սեգմենտի նակերեսի բանաձևը՝ $S = 2\pi \cdot R \cdot h$: Գնդի կենտրոնը տեղադրենք սկզբնակետում և օգտվենք կոորդինատային գնդային համարգից՝ $x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$,

$$y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, z = R \cdot \cos\theta \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0) :$$

Այստեղ θ_0 -ն չ առանցքի դրական ուղղության և \tilde{R} շառավիղի վեկտորի հետ կազմած անկյունն է, որը համապատասխանում է գնդային սեգմենտի h բարձրությանը

$$(h = R - R \cdot \cos(\theta_0) = R(1 - \cos(\theta_0))) :$$

Այսինքն, այս դեպքում պարամետրերն են՝ $u = \theta, v = \varphi$: Ուրեմն՝

$$E = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = R^2(\cos^2\theta \cdot \cos^2\varphi + \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \sin^2\theta) = R^2,$$

$$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = R^2(\sin^2\theta \cdot \sin^2\theta + \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi) = R^2 \cdot \sin^2\theta,$$

$$F = x_\theta' \cdot x_\varphi' + y_\theta' \cdot y_\varphi' + z_\theta' \cdot z_\varphi' =$$

$$= R^2(-\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi) = 0:$$

Մակերես ստանալու համար պետք է (1) բանաձևում վերցնել $f(x, y, z) \equiv 1$: Կստանանք՝

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sqrt{R^4 \cdot \sin^2\theta} d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot R^2 \int_0^{\theta_0} \sin\theta \cdot d\theta = -2\pi \cdot R^2 \cos\theta_0 = 2\pi \cdot R^2 (1 - \cos\theta_0) = 2\pi \cdot R \cdot h:$$

4.3. ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՎԱԼԻԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է (S) մակերևույթը $z = z(x, y)$ բացահայտ տեսքով ($(z \in C'(\overline{D}), (D)$ -ն տիրույթ է), կտոր առ կտոր ողորկ եզրով և, ենթադրենք (S) -ի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f(x, y, z)$ ($f \in C(\overline{S})$): Ընտրենք (S) -ի արտաքին կողմը (նորմալը կազմում է սուր անկյուն չ առանցքի դրական ուղղության հետ), տրոհենք (S) -ը կտոր առ կտոր ողորկ կորերով (S_k) ($k = 1, \dots, n$) մասերի, ընտրենք յուրաքանչյուր (\overline{S}_k) մասից պատահական $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետ և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k$, որտեղ D_k -ն (D_k) -ի մակերեսն է, իսկ (D_k) -ն (S_k) -ի պրոյեկցիան է xy հարթության վրա (տես նկ. 13):

Երկրորդ սերի մակերևութային ինտեգրալ (տարածված մակերևույթի արտաքին կողմով) սաելով հասկանում ենք վերջավոր սահման (անկախ (\overline{S}_k) տրոհումների և $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետերի ընտրությունից):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot D_k = \iint_S f \, dx \, dy, \text{ որտեղ } \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k):$$

Ներքին կողմով տարածված երկրորդ սերի մակերևութային ինտեգրալը սահմանվում է նույն կերպ, միայն բոլոր D_k մակերեսները վերցվում են բացասական նշանով: Այսինքն, եթե փոխվում է մակերևույթի կողմը, ապա փոխվում է նաև ինտեգրալի նշանը:

Թեորեմ 1: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի երկրորդ սերի մակերևութային ինտեգրալը և այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$\iint_S f(x, y, z) \, dx \, dy = \pm \iint_D f(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy, \quad (4)$$

Ըստ որում, դրական նշանը համապատասխանում է մակերևույթի վերին կողմին, իսկ բացասականը՝ ստորին կողմին:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $f(x, y, z(x, y))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է (\bar{D})-ում: Պարզ է, որ $\lambda' = \max_k D_k \rightarrow 0$, եթե $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k) \rightarrow 0$: Մնում է օգտվել երկրորդ սերի մակերևութային և կրկնակի ինտեգրալների սահմանումներից: ■

Դիտողություն 1: Պարզ է որ՝ $\pm D_k = T_k \cdot \cos \gamma_k$, քանի որ այս բանձնի ծախ մասում դրական նշանը համապատասխանում է մակերևույթի կողմին (γ_k -ն սուր անկյուն է, ուրեմն $\cos \gamma_k > 0$), իսկ բացասականը նշանը՝ ստորին կողմին (γ_k -ն բութ անկյուն է, ուրեմն $\cos \gamma_k < 0$): Անցնելով սահմանի ինտեգրալային գումարի մեջ, կստանանք՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot (\pm D_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot T_k \cdot \cos \gamma_k = \\ = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cdot \cos \gamma \, ds :$$

Այսպիսով, ստանում ենք երկու սերի մակերևութային ինտեգրալների միջև հետևյալ կապը (անկախ կողմի ընտրությունից, քանի որ մի կողմից մյուսին անցնելիս γ -ն փոխարինվում է $\pi + \gamma$ -ով, ուստի $\cos \gamma$ -ն փոխվում է իր նշանը):

$$\boxed{\iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cdot \cos \gamma \, ds} \quad (5)$$

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է պարզ (S) երկկողմանի մակերևույթ պարամետրական տեսքով՝

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (x, y, z \in C^1(\bar{\Delta})),$$

ընտրված է մակերևույթի որոշակի կողմը և, նրա վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f(x, y, z) \in C(\bar{S})$:

Ենթադրենք, որ (S)-ի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: (S)-ը տրուինք կտոր առ կտոր կորերով (S_k) ($k = 1, \dots, n$) մասերի, ընտրենք յուրաքանչյուր (\bar{S}_k) մասից պատահական $M_k \in (\bar{S}_k)$ կետ և կազ-

մենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot (\pm D_k)$: Ընդ որում դրական նշան է ընտրվում այն դեպքում, եթե (\bar{S}_k) -ի եզրի շրջանցման դրական ուղղությանը համապատասխանում է (\bar{D}_k) -ի եզրի շրջանցման դրական ուղղությունը (պահպանվում է կողմնորոշումը), իսկ եթե կողմնորոշումը փոխվում է, ապա ինտեգրալային գումարում ընտրվում է $-D_k$ -ն: Երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալ ասելով հասկանում ենք վերջավոր սահման (անկախ տրոհումներից և $M_k \in (\bar{S}_k)$ կետերի ընտրությունից):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot (\pm D_k) = \iint_S f(x, y, z) dx dy.$$

որտեղ $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(S_k)$:

Թեորեմ 2: Վերը նշած պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալը և այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dx dy &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\pm C) du dv = \\ &= \iint_S f(x, y, z) \cdot \cos \gamma ds, \end{aligned} \quad (6)$$

որտեղ C -ի նշանի ընտրությունը որոշվում է մակերևույթի կողմի ընտրությամբ, ընդ որում բավական է որևէ հարմար կետում ընտրել նշանը (այն կահպանվի բոլոր այլ կետերում):

Ապացուցում: Քանի որ $\cos \gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, ապա

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dx dy &= \iint_S f(x, y, z) \cdot \cos \gamma ds = \\ &= \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\ &= \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\pm C) du dv: \blacksquare \end{aligned}$$

Դիտողություն 2: Եթե վերը նշված մակերևույթի վրա որոշված են $P, Q, R \in C(\bar{\Delta})$ ֆուկտիաներ, ապա նման կերպ սահմանվում են $\iint_{(S)} P dz dx, \iint_{(S)} Q dy dz, \iint_{(S)} R dx dy$ ինտեգրալները և, նրանց գումարի համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} P dz dx + Q dy dz + R dx dy = \\ & = \iint_{(S)} (P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

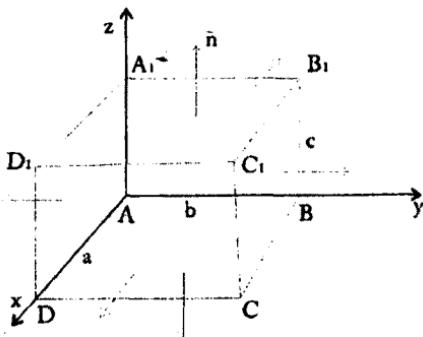
որտեղ α, β, γ -ն S մակերևույթի կողմին համապատասխան, նորմալի կազմած անկյուններն են համապասխանաբար x, y, z առանցքների դրական ուղղությունների հետ:

Օրինակ 1: Գաշվել $I = \iint_{(S)} P dz dx + Q dy dz + R dx dy$, որտեղ

(S)-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղանկյունամիստի արտաքին կողմն է (տես նկ. 14),

$$A(0,0,0), B(0,b,0), C(a,b,0), D(a,0,0),$$

$A_1(0,0,c), B_1(0,b,c), C_1(a,b,c), D_1(a,0,c)$ և $P, Q, R \in C(\bar{S})$:



Նկ 14

Տրոհենք ինտեգրալը 6 ինտեգրալների ըստ ուղղանկյունամիստի նիստերի և, հաշվի առնենք յուրաքանչյուր նիստին համապասխան նորմալի ուղղությունը, օրինակ վերին A, B, C, D_1 նիստի

համար $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, ստորին $ABCD$ -ի համար՝ $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 180^\circ$, ADD, A_1 նիստի համար՝

$\alpha = 90^\circ$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ և այլն:

Ըստ (7)-ի ունենք՝

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(AA_1B_1B)} (P(a, y, z) - P(0, y, z)) dy dz + \\ &+ \iint_{(AA_1D_1D)} (Q(x, b, z) - Q(x, 0, z)) dz dx + \\ &+ \iint_{(ABCD)} (R(x, y, c) - R(x, y, 0)) dx dy : \end{aligned}$$

4.4. Երկրորդ սերի ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹՅԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԱՊԾ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵԶՐՈՎ ՏԱՐՍԾՎԱԾ ԿՈՐՍՎԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԴԵՏ

Գրինի բանաձևի ընդհանրացումը հարթ մակերևույթի (տիրույթի) դեպքից տարածական մակերևույթի դեպքը, կոչվում է Ստորական բանաձև:

Թեորեմ 1: Դիցուք տրված է պարզ (S) երկկողմանի մակերևույթ պարամետրական տեսքով՝

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (x, y, z \in C^2(\bar{\Delta}))$$

($A^2 + B^2 + C^2 > 0$) և նրա վրա որոշված $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ ֆունկցիաներ ($P, P'_y, P'_z, Q, Q'_x, Q'_z, R, R'_x, R'_y \in C(\bar{S})$):

Այս պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է հետևյալ (Ստորական) բանաձևը

$$\begin{aligned} \oint_{(S')} P dx + Q dy + R dz &= \iint_{(S)} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{array} \right| ds = \\ &= \iint_{(S)} [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \cdot \cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \cdot \cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cdot \cos\gamma] ds \quad (1) \end{aligned}$$

* Ստորև Զորգ Գաբրիել (1793-1841)-անգլիացի ֆիզիկոս:

(ձախ մասում գրված ինտեգրալը վերցված է (S) մակերևույթի (Γ) եզրի շրջանցման դրական ուղղությամբ, որն իր հերթին որոշվում է մակերևույթի կողմի (նորմալի) ընտրությամբ:

Ապացուցում: Նախ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $Q \equiv R \equiv 0$: Այսինքն, ապացուցենք, որ՝

$$\oint_{(\Gamma)} P dx = \iint_{(S)} P'_z dz dx - P'_y dx dy = \iint_{(S)} (P'_z \cdot \cos \beta - P'_y \cdot \cos \gamma) ds : (2)$$

Նախապես ապացուցենք, որ՝

$$\oint_{(\Gamma)} P dx = \oint_{(Y)} P \cdot (x'_u du + x'_v dv), \quad (3)$$

որտեղ (γ) -ն (Δ) -ի եզրն է: Դիցուք (γ) պարզ, փակ կորը որոշված է: $u = u(t), v = v(t)$ ($u, v \in C^1([\alpha; \beta])$) պարամետրական տեսքով:
Այդ դեպքում (Γ) -ն տրվում է

$x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t))$ ($t \in [\alpha; \beta]$)
տեսքով:

Պարզության համար կենթադրենք նաև, որ պահպանվում է կողմնորոշումը, այսինքն (γ) -ի շրջանցման դրական ուղղությամբ
համապատասխանում է (Γ) -ի շրջանցման դրական ուղղությունը:

Ուժենք՝

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} P dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \cdot \frac{dx(u(t), v(t))}{dt} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \cdot \\ &\quad \cdot (x'_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + x'_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)) dt = \\ &= \oint_{(\Delta)} P(x'_u du + x'_v dv) : \end{aligned}$$

(3)-ի աջ մասի նկատմամբ կիրառենք Գրինի բանաձևը, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
\oint_{(r)} P \cdot (x'_u du + x'_v dv) &= \oint_{(r)} (P \cdot x'_u) du + (P \cdot x'_v) dv = \\
&= \iint_{(\Delta)} \left[(P \cdot x'_v)'_u - (P \cdot x'_u)'_v \right] dudv = \\
&= \iint_{(\Delta)} (P'_u \cdot x'_v + P \cdot x''_{uv} - P'_v \cdot x'_u - P \cdot x''_{uv}) dudv = \iint_{(\Delta)} (P'_u \cdot x'_v - P'_v \cdot x'_u) dudv.
\end{aligned}$$

Քանի որ $P = P(x(u,v), y(u,v))$, ապա կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
\oint_{(r)} P \cdot (x'_u du + x'_v dv) &= \\
&= \iint_{(S)} \left[(P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u) \cdot x'_v - ((P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v) \cdot x'_u) \right] dudv = \\
&= \iint_{(S)} [P'_y \cdot (x'_v \cdot y'_u - x'_u \cdot y'_v) + P'_z \cdot (x'_v \cdot z'_u - z'_u \cdot y'_v)] dudv = \\
&= \iint_{(D)} (B \cdot P'_z - C \cdot P'_y) dudv = \iint_{(S)} P'_z dz dx - P'_y dx dy : \quad (4)
\end{aligned}$$

Ապացույցը բերեցինք այն դեպքում, եթե կողմնորոշումը պահպանվում է, հակառակ դեպքում, նույն ձևափոխություններում երկու անգամ կփոխվի ինտեգրալի նշանը (մեկը՝ (3)-ում, մյուսը՝ (4)-ում), արդյունքում նորից կստանանք (2)-ը:

Եթե $P \equiv R \equiv 0$, ապա նույն կերպ դատելով, կստանանք՝

$$\oint_{(r)} Q dy = \iint_{(S)} Q'_x dx dy - Q'_z dy dz = \iint_{(S)} (Q'_x \cdot \cos \gamma - Q'_z \cdot \cos \alpha) ds : \quad (5)$$

Իսկ, եթե $P \equiv Q \equiv 0$, ապա՝

$$\oint_{(r)} R dz = \iint_{(S)} R'_y dy dz - R'_x dz dx = \iint_{(S)} (R'_y \cdot \cos \alpha - R'_x \cdot \cos \beta) ds : \quad (6)$$

Գումարելով (2), (5) և (6)-ը, կստանանք (1)-ը: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմի $x, y, z \in C^2(\bar{\Delta})$ պայմանները հարկավոր են միայն ապացույցը հեշտացնելու համար: Իրականում բավական է, որ $x, y, z \in C^1(\bar{\Delta})$:

Սահմանում 1: Դիցուք եռաչափ տարածության ինչ-որ (V) մարմնում որոշված է վեկտորական

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \{F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\}$$

դաշտ: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} (\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}))$ Վեկտորական արտադրյալը

կանվանենք \vec{F} վեկտորի ռոտոր (տարամիտություն)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{array} \right| = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (7)$$

Դիտարկենք (V)-ում պարունակվող, կտոր առ կտոր ողորկ եզրով պարզ (S) երկկողմանի մակերևույթ, տրված պարամետրական տեսքով $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ ($x, y, z \in C^1(\bar{\Delta})$): Դիցուք $F_x, F_y, F_z \in C^1(\bar{V})$: Այս պայմանների առկայությամբ կիրառելի է Ստոքսի բանաձևը, եթե՝ $P \equiv F_x, Q \equiv F_y, R \equiv F_z$: Արդյունքում կստանանք՝

$$\oint_{(I')} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \iint_{(S)} \left| \begin{array}{ccc} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{array} \right| ds = \iint_{(S)} \vec{n} \times \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (8)$$

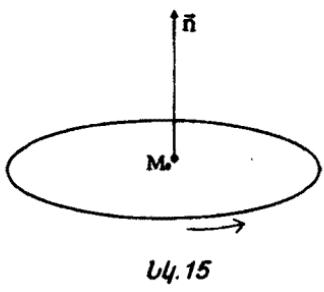
որտեղ \vec{n} -ը միավոր նորմալն է, համապատասխան (S) մակերևույթի կողմի ընտրությանը, $\vec{n} \times \text{rot} \vec{F}$ -ը նշված երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալն է:

(8)-ի ձախ մասը կարծ գրվում է $\oint_{(F)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ տեսքով և կոչվում է \vec{F}

վեկտորի ոլորապտույտ (ցիրկուլացիա) (Γ) եզրով: Այսպիսով, (8)-ը (Ստոքսի բանաձևը) ընդունում է հետևյալ պարզ տեսքը

$$\oint_{(r)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot}_n \vec{F} ds : \quad (9)$$

(9)-ից հետևում է, որ $\text{rot} \vec{F}$ -ի սահմանումը կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Երբեք, դիցուք M_0 -ն (V)-ի կամայական



կետ է և, n -կամայական միավոր վեկտոր է (վեկտորը տրված է, եթե հայտնի է նրա պրոեկցիան կամայական ուղղությամբ): Դիտարկենք n -ին ուղղահայաց հարթ պատկերներ, որոնք պարունակում են M_0 -ն և որոնց մակերեսը ձգտում է

զրոյի (օրինակ M_0 կենտրոնով, r շառավղով շրջան, որի մակերեսը S -ը ձգտում է զրոյի) (տես Ակ. 15):

(9)-ի աջ մասում կիրառենք միջինի մասին թեորեմը, կստանանք՝

$$\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot}_n \vec{F} ds = \text{rot} \vec{F} \Big|_{M_0} \cdot S \left(M_0 \in (\bar{S}) \right):$$

($\text{rot} \vec{F}$ -ը անընդհատ է, անընդհատ են նրա կոորդինատները): Այստեղից կստանանք՝

$$\text{rot}_n \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{\text{diam}S \rightarrow 0} \text{rot}_n \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{\text{diam}S \rightarrow 0} \frac{\Delta}{S} : \quad (10)$$

Այսպիսով ռոտորը կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Ստորևի բանաձևը կիրառվում է տարածական ինտեգրալի ճանապարհից անկախության հարցում: Նախ սահմանենք տարածական միակապություն:

Սահմանում 2: (V) մարմինը ($((V) \subset \mathbb{R}^3)$) կոչվում է տարածական միակապ, եթե (V)-ում պարունակվող ինչպիսի (I) պարզ փակ, կտոր առ կտոր ողորկ կոր էլ ընտրենք, նրա վրա կարելի է «ձգել» այնպիսի (S) պարզ, կտոր առ կտոր ողորկ մակերեսույթ, որ $(S) \subset (V)$ ((S) -ի եզրը (I)-ն է):

Սահմանում 3: Դիցուք տրված են (V) եռաչափ տիրույթում (մարմնում) երեք անընդհատ ֆունկցիաներ $P, Q, R \in C(V)$ և, վերցրել ենք կանայական երկու կետ $A, B \in (V)$: Կասենք, որ $I = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից, եթե (V)-ում պարունակվող ինչպիսի երկու $(I_1), (I_2)$ պարզ, անընդհատ կորով էլ միացնենք այդ կետերը, ծշմարիտ է

$$\boxed{\int_{(I_1)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(I_2)} Pdx + Qdy + Rdz}$$

հավասարությունը:

Բերենք նշված ինտեգրալի ինտեգրման ճանապարհից անկախության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Թեորեմ 2: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ (S)-ում պարունակվող ինչպիսի պարզ, փակ, անընդհատ կոր էլ վերցնենք, ինտեգրալը այդ կորով հավասար լինի գրոյի:

Ապացույցը նույնն է, ինչ երկչափ դեպքում:

Թեորեմ 3: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ գտնվի (V)-ում այնպիսի դիֆերենցելի ֆունկցիա $U(x, y, z)$, որի դիֆերենցիալն է՝

$$dU(x, y, z) \equiv P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ երկչափ դեպքում:

Թեորեմ 4: Դիցուք $P, Q, R \in C'(V)$ և (V)-ում տարածական միակապ է: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}}:$$

Անհրաժեշտությունը ապացուցվում է այնպես, ինչպես երկչափ դեպքում:

Բավարարություն: Օգտվենք թեորեմ 1.-ից: Վերցնենք (V) -ում պարունակվող, կանաչական պարզ, փակ, անընդհատ կոր և «ձգենք» այդ կորի վրա (S) մակերևույթ $((S) \subset (V))$: Օգտվելով Ստոքսի բանաձևից և թեորեմի պայմաններից, կստանանք, որ այդ փակ կորով ինտեգրալը հավասար է զրոյի: ■

4.5. Եռակի հատեգրալի կայց ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹՅԱՅԻՆ ՀԱՏԵԳՐԱԼԻ ԴԵՏ

Թեորեմ 1: Դիցուք տրված է (V) մարմին, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ (S) պարզ փակ մակերևույթով (եզրով) և (\bar{V}) -ի վրա որոշված

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \quad (P, P'_x, Q, Q'_y, R, R'_z \in C(\bar{V}))$$

ֆունկցիաներ: Այդ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ՝ Գառւս-Օստրոգրադսկու բանաձևը

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} (P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma) ds. \quad (1)$$

որտեղ α, β, γ -ն են արտաքին նորմալի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար x, y, z դրական կիսառանցքների հետ:

Ապացուցում: Նախ, ենթադրենք, որ $P \equiv Q \equiv 0$ և (V) մարմինը, սահմանափակված է $z = z_0(x, y), z = Z(x, y)$ ($z_0, Z \in C(\bar{D})$) մակերևույթով և (S') գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդ կորն է (D) -ի կտոր առ կտոր ողորկ (Γ) եզրը, իսկ ծնիջները զուգահեռ են z առանցքին (տես նկ. 11 և 3.1-ի թ. 1-ը): Ունենք՝

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{(D)} R(x, y, Z(x, y)) dx dy -$$

$$- \iint_{(D)} R(x, y, z_0(x, y)) dx dy = \iint_{(S)} R dx dy + (- \iint_{(S)} R dx dy) + \iint_{(S')} R dx dy :$$

Այստեղ առաջին ինտեգրալը տարածված է արտաքին, երկրորդ ինտեգրալը իր նշանով՝ ստորին կողմով, երրորդը՝ կողմնային մակերևությով, այն զրո է: Այսպիսով՝

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_S R \cdot \cos \gamma ds : \quad (2)$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե մարմինը տրոհվում է գլանային մակերևույթներով վերջավոր թվով վերը նշված մարմինների, յուրաքանչյուր մարմնի համար կիրառելով ստացված բանաձևը և իրարգումարելով, կստանանք բանաձևի ընդհանրացումը:

Դիտարկելով այլ ($Q \equiv R \equiv 0, P \equiv P \equiv 0$) մասնավոր դեպքերը և նման կերպ դատելով, կստանանք հետևյալ բանաձևերը՝

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dz = \iint_S P \cdot \cos \alpha ds, \quad (3)$$

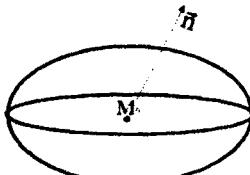
$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dz = \iint_S Q \cdot \cos \beta ds : \quad (4)$$

Գումարելով իրար (2)-(4)-ը, կստանանք (1)-ը: ■

Տաճք Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևի ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք ունենք (V) մարմնում որոշված $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ ($F_x, F_y, F_z \in C'(\bar{V})$) ուժային դաշտ: Այդ վեկտորի դիվերգենցիա $\operatorname{div} \vec{F}$ ասելով հասկանանք հետևյալ սկալյար մեծությունը՝ $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$: Այդ դեպքում (1) բանաձևը կընդունի հետևյալ պարզ տեսքը՝

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iint_S F_n ds :$$

$\iint_S F_n ds$ -ը կոչվում է \vec{F} վեկտորի հոսք (S) մակերևույթով:



Ակ. 15

Ցույց տանք, որ դիվերգենցիան կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Իրոք, դիցուք $M_0 - \text{ն } (V)$ -ի կամայական կետ t : (V) -ի տրանզֆիճը $d = diam(V)$ ծգտեցնենք զրոյի, պահպանելով $M_0 - \text{ն } (V)$ -ում, օրինակ՝ վերցնենք M_0 կենտրոնով գունդ և նրա շառավիղը ծգտեցնենք զրոյի (տես նկ. 15):

Կիրառելով միջինի մասին թեորեմը եռակի ինտեգրալում (այն նույնպես ճիշտ t), կստանանք՝

$$div \bar{F} \Big|_{M^*} \cdot V = \iint_S F_n ds \quad (M^* \in (\bar{V})) \Rightarrow$$

$$div \bar{F} \Big|_{M_0} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\iint_S F_n ds}{V}. \quad (5)$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Ա.Գ. Դալումյան*, Մաթ. անալիզ, 1-ին մաս, Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀ -ի հրատ., - 2002թ.:
2. *Ա.Գ. Դալումյան, Ա.Ս. Սարգսյան*, Մաթ. անալիզ, 2-րդ մաս, Ինտեգրալ և դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀ -ի հրատ., - 2008թ.:
3. *Г.М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления., М., Физ-мат. лит., Т.1, 2000, Т.2 2003, Т.3, 2005.
4. *Л.Д. Кудрявцев*, Математический анализ, М., Наука, 1968.
5. *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сенцов*, Математический анализ, Изд. Моск.Университета,1987.
6. *С.М. Никольский*, Курс математического анализа, т.1,2, М., Наука, 1983.
7. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
8. *Зорич*, Мат. анализ.,Ч. 1,2, М.,Наука, 1984.
9. *Ու. Ուլյիս*, Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները, Լույս, Ե. 1975:
10. *Ս.Ս. Դակոյրյան*, Ֆուրիեի շարքեր և ձևափոխություններ, ԵՊՀ-ի հրատ. 1983:
11. *Б.П. Демидович*, Сборник задач и упражнений по мат. анализу, Изд.Моск., Университета, М., 1997.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

I Թվային շարքեր	3
1. Շարքի գումար, զուգամիտություն, զուգամետ շարքերի հատկությունները	3
2. Ոչ բացասական անդամներով շարքի զուգամիտության հայտանիշներ	6
3. Նշանափոխ շարքերի զուգամիտության հայտանիշներ	15
4. Զուգամետ շարքերի հատկությունները	20
II Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր	26
1. Դաշտավայրական զուգամիտություն	26
2. Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և շարքերի հատկությունները	36
3. Աստիճանային շարքեր	41
4. Թեյլորի շարքեր	48
III Ֆուրիեի շարքեր	53
1. Ֆուրիեի շարք, Ֆուրիեի գործակիցներ	53
2. Ֆուրիեի շարքի վերլուծության խնդիրը, Դիրիխլեի ինտեգրալը	55
3. Լոկալիզացիայի (տեղայնացման) սկզբունքը	58
4. Ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի վերլուծության հայտանիշներ	61
5. Ոչ պարբերական ֆունկցիայի դեպքը	64
6. Վերլուծությունը կամայական միջավայրում	65
7. Անընդհատ ֆունկցիայի մոտարկումը Եռանկյունաչափական բազմանդամներով	69
8. Նվազագույն քառակուսային շեղման խնդիրը: Եռանկյունաչափական համակարգի փակությունը և լրիվությունը	69
IV Բազմաչափ ինտեգրալներ	76
1. Կորագիծ ինտեգրալներ	76
2. Կրկնակի ինտեգրալ	85
2.1 Ինտեգրալի սահմանումը և հաշվումը	85
2.2 Կրկնակի ինտեգրալի կապը կորագիծ ինտեգրալների հետ	88

2.3	Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրման ճանապարհից անկախության պայմանները	90
2.4	Փոփոխականների փոխարինում կրկնակի ինտեգրալի մեջ	96
3.	Եռակի ինտեգրալ	101
3.1	Եռակի ինտեգրալի սահմանումը և հաշվումը.....	101
3.2	Փոփոխականների փոխարինումը եռակի ինտեգրալի մեջ	102
4.	Մակերևութային ինտեգրալներ	104
4.1	Սակերևույթ, շղափող հարթություն, նորմալ, մակերևույթի կողմ, մակերևույթի մակերես.....	104
4.2	Առաջին սեռի մակերևութային ինտեգրալ.....	111
4.3	Երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալ.....	114
4.4	Երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալի կապը մակերևույթի եզրով տարածված կորագիծ ինտեգրալի հետ....	118
4.5	Եռակի ինտեգրալի կապը մակերևութային ինտեգրալի հետ	124
	Գրականություն	127

ԱԳ. ԴԱԼՈՒՅՑԱՆ, ԱՍ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍԱԹԵՍՍԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

ԸՆԹԱՑՄԱՆ ԲԱԶԱՐԱԿԱՆ ԽԱՏԵԳՐԱՎԱՆԵՐ

**Տեխ. խմբագիր՝
Համակարգչային ծևավորող՝**

**Վ.Չ. Բդյան
Ա.Գ. Ղալումյան**

**Ստորագրված է տպագրության 22.10.2009 թ.:
Չափսը՝ $60 \times 84^{1/16}$: Թուղթը՝ օֆսեր: Հրատ. 6.8 մամուլ,
տպագր. 8.1 մամուլ = 7.6 պայմ. մամուլ:
Տպաքանակ՝ 200: Պատվեր՝ 134:**

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

**Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիկ պոլիգրաֆիայի ստորագրաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:**