Գ.Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Վ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ,
Գ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2005

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ.Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Վ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ,
Գ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ
ԵՎ
ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության
նախարարության կողմից որպես բուհական
ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ - 2005

ՀՏԴ 514 (07)
ԳՄԴ 22.151 g73
Հ 177

Տպագրվում է ԵՊՀ-ի գիտական
խորհրդի որոշմամբ

Խմբագիրներ՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Վ. Աթաբեկյան
ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Կ. Ավետիսյան

Գրախոսներ՝ ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոն (վարիչ՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Մ. Գրիգորյան)
ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոն (վարիչ՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Հովհաննիսյան)
ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Բարխուդարյան
ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Մարգարյան

ՀԱԿՈԲՅԱՆ Գ.Հ., ՊՈՂՈՍՅԱՆ Ա.Վ., ՂԱԶԱՐՅԱՆ Գ.Գ.
Հ 177 ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ
- Եր.: Երևանի համալս. հրատ., 2005 թ., 476 էջ:

Ձեռնարկն ընդգրկում է բուհերում դասավանդվող «Գծային հանրահաշիվ» առարկայի հիմնական նյութը: Նրանում տեղ են գտել բազմաթիվ լուծված օրինակներ (283 հատ), որոնք կդյուրացնեն առարկայի ուսուցումը: Ձեռնարկում զգալի ուշադրություն է դարձված մի շարք բնագավառների (ֆիզիկա, տնտեսագիտություն, կենսաինֆորմատիկա, վիճակագրություն, գաղտնագրություն և այլն) կիրառական խնդիրներին: Կարևորված է նաև MATHEMATICA ծրագրի կիրառմամբ լուծվող խնդիրները:

Ձեռնարկը օգտակար է ինչպես ֆիզիկամաթեմատիկական ուղղությունների, այնպես էլ հանրահաշվական և համակարգչային մեթոդներ կիրառող այլ մասնագիտությունների ուսանողներին, մագիստրանտներին, ասպիրանտներին, դասախոսներին և գիտական աշխատողներին:

$Հ \frac{1602040000}{704(02)05} 2005$ ԳՄԴ 22.151 g73

ISBN 5-8084-0620-x

ՆԱԽԱԲԱՆ

Ներկայումս բուհերում "Գծային հանրահաշիվ" առարկան հիմնականում դասավանդում են անցյալ դարի 60-80թթ. գրված դասագրքերով, որոնք որպես կանոն, շարադրված են ակադեմիական ոճով և չեն բավարարում արդի պահանջներին: Նշենք նաև հայերեն լեզվով հրատարակված գրականության սակավությունը, որոնցից շատերը անհասանելի են ընթերցողին տպաքանակի չնչին լինելու պատճառով:

Ձեռնարկը տարբերվում է բուհերում գործածվող մյուս դասագրքերից, նախ և առաջ, լուծված օրինակների (283 հատ) առատությամբ, որը հնարավորություն կտա դյուրությամբ յուրացնել առարկան: Ձեռնարկում զգալի տեղ են զբաղեցնում կիրառական խնդիրները գիտության և տեխնիկայի տարբեր բնագավառներից՝ ֆիզիկա, տնտեսագիտություն, կենսաինֆորմատիկա, վիճակագրություն, գաղտնագրություն և այլն: Կարևորված է նաև MATHEMATICA ծրագրի կիրառմամբ լուծվող խնդիրները:

Ձեռնարկը կազմված է վեց գլուխներից: Առաջին գլուխը նվիրված է գծային հավասարումներին, մատրիցներին և դրանց որոշիչներին: Ուսումնասիրվում են գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի և Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակները, ներկայացվում են մատրիցի որոշիչի և հակադարձ մատրիցի հաշվման տարբեր եղանակներ:

Երկրորդ և երրորդ գլուխներում բավականին հանգամանալից քննարկվում են ինչպես գծային և էվկլիդեսյան տարածությունները, այնպես էլ փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը, միջին քառակուսային մոտարկումը, մատրիցի ֆունդամենտալ ենթատարածությունները, մատրիցի ձևափոխումը անկյունագծային տեսքի, օրթոգոնալ մատրիցները:

Հաջորդ երկու գլուխներում շարադրված են գծային օպերատորներին և կոմպլեքս տարածություններին վերաբերող նյութը, որտեղ բազմակողմանի ներկայացվում են էվկլիդեսյան և կոմպլեքս էվկլիդեսյան գծային տարածություններում գործող գծային օպերատորները, նկարագրվում է Ժորդանյան տեսքի բերելու ալգորիթմը: Այստեղ է զետեղված նաև քառակուսային ձևը կանոնական տեսքի բերելու թեման:

Վերջին գլխում ներկայացվում են գծային հավասարումների համակարգի լուծման ճշգրիտ և մոտավոր եղանակները: Այստեղ առանձնահատուկ ուշադրություն է դարձվել մատրիցի տարբեր վերլուծություններին՝ LU, QR, Չոլեսկիի, եզակի արժեքների վերլուծությունները և ուսումնասիրված են նրանց կիրառությունները: Քննարկվել են QR-վերլուծության Հաուսհոլդերի և Գիվենսի եղանակները: Առանձին պարագրաֆ է հատկացված սեփական արժեքների մոտավոր հաշվմանը: Աշխատանքն ավարտվում է պատմական տեղեկություններով, պատասխաններով և ցուցումներով, գրականությամբ:

Ձեռնարկի յուրաքանչյուր պարագրաֆում շարադրվում է անհրաժեշտ տեսական նյութը՝ հիմնականում առանց ապացույցների: Այն ուղեկցվում է մեծ քանակությամբ օրինակներով, որոնք մեծամասամբ փոխարինում են թեորեմների և լեմմաների ապացույցները, առանձին դեպքերում այդ օրինակներն ավելի հասկանալի են դարձնում տարբեր սահմանումների և որոշակի գաղափարների առկայությունը, թեորեմների ձևակերպումը: Տեսական նյութին հաջորդում են բազմազան խնդիրներ, որոնք լրացնում են այն: Խնդիրները տեսական նյութից առանձնացված են երկու գծով: Հստակության համար խնդիրները, օրինակները, թեորեմները, լեմմաները, պարագրաֆներն ունեն առանձին համարակալում: Ձեռնարկի վերջում տրված են խնդիրների մի մասի պատասխանները և լուծման հնարավոր եղանակները: Հաճախ քննարկվում են ոչ ավանդական խնդիրներ և կիրառություններ:

"Կիրառություն" բաժիններում քննարկվում են տարբեր բնագավառներից խնդիրներ: "MATHEMATICA-ի գրադարան" բաժիններում ներկայացվում են խնդիրներ, որոնք հնարավոր է լուծել MATHEMATICA փաթեթի օգնությամբ: Քննարկվում են համապատասխան համակարգչային հրամանները և ներկայացվում են խնդրի լուծումները:

Ձեռնարկը կարելի է դիտարկել որպես "Գծային հանրահաշիվ" առարկայի համեմատաբար ամբողջական ժողովածու ինչպես գիտական, այնպես էլ կիրառական բնագավառների աշխատողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել տարբեր մակարդակի մաթեմատիկական պատրաստվածություն ունեցող մասնագետների համար: Ապացույցների բացակայությունը հնարավորություն է ընձեռել ծավալով մեծաքանակ նյութի սեղմ շարադրմանը և համակարգմանը: Առանձին ուշադրություն է դարձվում առարկայի տարբեր բաժինների փոխկապակցվածության բացահայտմանը:

Հեղինակները շնորհակալություն են հայտնում ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա.Հովհաննիսյանին, ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածուներ Կ.Ավետիսյանին, Վ.Մարգարյանին, Վ.Աթաբեկյանին, Ա.Բարխուդարյանին, Հ.Խոսրովյանին արժեքավոր դիտողությունների ու առաջարկությունների համար: Մեր շնորհակալությունն ենք հայտնում նաև ակադեմիկոսներ Վ.Զաքարյանին, Է.Չուբարյանին, ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր, պրոֆեսորներ Մ.Գրիգորյանին, Ս.Հարությունյանին, ֆիզ. մաթ.գիտ. թեկնածու Հ.Առաքելյանին, որոնց աջակցությունը մեծապես նպաստեց ձեռնարկի կայացմանը:

Հեղինակները շնորհակալությամբ կընդունեն յուրաքանչյուր դիտողություն և առաջարկ:

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ: ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

1. ԳԱՈՒՍԻ ԵՎ ԳԱՈՒՍ-ԺՈՐԴԱՆԻ ԱՐՏԱՔՍՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգն ունի հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

որտեղ a_{ij} և b_i ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) տրված թվեր են: Դրանց անվանում են համապատասխանաբար (1) համակարգի գործակիցներ և ազատ անդամներ: a_{ij} գործակցի կրկնակի կարգահամարը (ij) ցույց է տալիս, որ այն i-րդ հավասարման x_j անհայտի գործակիցն է:

Լուծել (1) համակարգը նշանակում է գտնել այնպիսի $x_1, \cdots, x_n$ թվեր, որոնք (1) հավասարումները դարձնում են թվային նույնություններ:

(1) համակարգն անվանում են ***քառակուսի***, եթե $m = n$:

(1) համակարգն անվանում են ***համասեռ***, եթե $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, հակառակ դեպքում՝ ***անհամասեռ***:

Սահմանում 1. (1) համակարգն անվանում են ***համատեղելի***, եթե այն ունի գոնե մեկ լուծում:

Համասեռ համակարգը միշտ համատեղելի է, քանի որ այն ունի $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ լուծումը:

Սահմանում 2. Համատեղելի համակարգն անվանում են ***որոշյալ***, եթե այն ունի միակ լուծում, հակառակ դեպքում՝ ***անորոշ***:

Համակարգերի գրառման և լուծման համար հարմար է օգտվել *մատրիցի* գաղափարից:

m տող և n սյուն ունեցող ուղղանկյուն թվային աղյուսակն անվանում են $(m \times n)$ կարգի մատրից: Մատրիցների գրառման համար օգտագործում են հետևյալ նշանակումները՝

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n},$$

որտեղ a_{ij} թվերն անվանում են մատրիցի *տարրեր (էլեմենտներ)*, ընդ որում, առաջին կարգահամարը ցույց է տալիս տողի, իսկ երկրորդը՝ սյան համարը:

Տող և *սյուն* անվանում են համապատասխանաբար $(n \times 1)$ և $(1 \times n)$ կարգի մատրիցները: Մատրիցն անվանում են *քառակուսի մատրից*, եթե $m = n$:

(1) համակարգի *գործակիցների մատրից* և *ընդլայնված մատրից* անվանում են համապատասխանաբար հետևյալ երկու մատրիցները

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}:$$

Մատրիցի տողերի (սյուների) նկատմամբ կատարվող հետևյալ գործողություններն անվանում են *տարրական տողային (սյունային) ձևափոխություններ*.

ա) երկու տողերի (սյուների) տեղափոխում,

բ) որևէ տողի (սյան) բազմապատկումը զրոյից տարբեր թվով,

գ) որևէ տողին (սյանը) մեկ այլ տող (սյուն) գումարելը:

Երկու մատրիցներ անվանում են *տող-համարժեք (սյուն-համարժեք)*, եթե մեկը մյուսին բերվում է տարրական տողային (սյունային) ձևափոխություններով:

(1) համակարգի հավասարումների հետ գործողություններ կատարելու փոխարեն ավելի հարմար է տարրական տողային ձևափոխություններ կատարել համակարգի ընդլայնված մատրիցի տողերի հետ:

Պարզ է, որ տող-համարժեք մատրիցներին համապատասխանում են համարժեք համակարգեր:

Համակարգերի լուծման *Գաուսի* և *Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակները* նկարագրենք օրինակներով: Նախ ուսումնասիրենք անհամատեղ համակարգեր:

Օրինակ 1. Լուծել համակարգը

$$
\begin{aligned}
&x_2 + x_3 - 2x_4 = -3\\
&x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\\
&2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -2\\
&x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 = -19:
\end{aligned}
$$

Համակարգի ընդլայնված մատրիցն է

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & -2 & -3\\
1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
2 & 4 & 1 & -3 & -2\\
1 & -4 & -7 & -1 & -19
\end{pmatrix}:
$$

Գաուսի եղանակը իրականացվում է երկու փուլով: Առաջին փուլում տարրական տողային ձևափոխություններով համակարգի ընդլայնված մատրիցը բերվում է *եռանկյունաձև (սեղանաձև) տեսքի:* Մեր օրինակում տեղափոխենք ընդլայնված մատրիցի առաջին և երկրորդ տողերը

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 1 & 1 & -2 & -3\\
2 & 4 & 1 & -3 & -2\\
1 & -4 & -7 & -1 & -19
\end{pmatrix}:
$$

Առաջին սյան բոլոր տարրերը, սկսած երկրորդից, դարձնենք զրո: Երրորդ տողից հանենք առաջինի կրկնապատիկը իսկ չորրորդից՝ առաջինը

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 1 & 1 & -2 & -3\\
0 & 0 & 3 & -3 & -6\\
0 & -6 & -6 & -1 & -21
\end{pmatrix}:
$$

Վերջին տողին ավելացնենք երկրորդի վեցապատիկը, ստացված մատրիցի երրորդ տողը բազմապատկենք $\frac{1}{3}$-ով, իսկ վերջինը՝ $-\frac{1}{13}$-ով

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}:$$

Գաուսի եղանակի առաջին փուլն ավարտվեց: Ստացված մատրիցին համապատասխանում է սկզբնական համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգը

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$$

$$x_3 - x_4 = -2$$

$$x_4 = 3:$$

Երկրորդ փուլում ստացված համակարգը լուծվում է *հետընթաց տեղադրումով*: Վերջին հավասարումից ստացված $x_4 = 3$ արժեքը տեղադրենք նախավերջին հավասարման մեջ, ստացված $x_3 = 1$ արժեքը, $x_4 = 3$-ի հետ միասին, տեղադրենք երկրորդի մեջ, որտեղից՝ $x_2 = 2$: Ստացված արժեքները տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ, կստանանք համակարգի միակ լուծումը

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3: \bullet$$

Նախորդ օրինակում դիտարկված համակարգը որոշված է: Այն ունի միակ լուծում: Դիտարկենք անորոշ համակարգ:

Օրինակ 2. Լուծել համակարգը

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 9:$$

Համակարգի ընդլայնված մատրիցն է

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 11 & 9 \end{pmatrix}:$$

Տեղափոխենք առաջին երկու տողերը և ստացված երկրորդ, երրորդ և չորրորդ տողերից հանենք առաջինի պատիկներն այնպես, որ առաջին սյան բոլոր տարրերը, սկսած երկրորդից, հավասարվեն զրոյի

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 10 & 8 \end{pmatrix} :$$

Նույնը կրկնենք երկրորդ սյան համար. տեղափոխենք երկրորդ և երրորդ տողերը և վերջին տողից հանենք ստացված երկրորդ տողի կրկնապատիկը

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} :$$

Առաջին փուլն ավարտելու համար չորրորդ տողից հանենք երրորդի քառապատիկը և գրենք ստացված մատրիցին համապատասխանող համակարգը

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ & x_4 = 2 \\ & 0 = 0 : \end{aligned}$$

Վերջին հավասարությունը կարելի է հաշվի չառնել: Կատարենք հետընթաց տեղադրում: Նախավերջին հավասարումից ստացված $x_4 = 2$ արժեքը տեղադրենք երկրորդի մեջ, որից x_2 անհայտն արտահայտենք x_3-ով (կարելի է նաև x_3-ն արտահայտել x_2-ով)

$$x_2 = -2x_3 - 6 :$$

x_4-ի և x_2-ի արժեքները տեղադրենք առաջինի մեջ, որից x_1 անհայտը կարելի է արտահայտել x_3-ով

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 - (-2x_3 - 6) - x_3 - 2 = 5 + x_3 :$$

Համակարգի լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը

$$x_1 = 5 + x_3, \ x_2 = -6 - 2x_3, \ x_3 = x_3, \ x_4 = 2$$

կամ որ նույնն է

$$x_1 = 5 + c,\ x_2 = -6 - 2c,\ x_3 = c,\ x_4 = 2$$

տեսքը, որտեղ c-ն ցանկացած թիվ է: Համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ:●

Դիտարկենք անհամատեղելի համակարգ:

Օրինակ 3. Լուծել համակարգը

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ &x_1 + x_3 = 6 \\ &2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 : \end{aligned}$$

Համակարգի ընդլայնված մատրիցն է

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

Կիրառենք Գաուսի եղանակը: Երկրորդ, երրորդ և չորրորդ տողերից հանենք առաջինի համապատասխան պատիկները

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} :$$

Երրորդ տողին ավելացնենք երկրորդ տողը

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} :$$

Առաջին փուլը կարելի է ավարտին չհասցնել, քանի որ երրորդ տողին համապատասխանող

$$0 = -2$$

հավասարությունը ճիշտ չէ: Համակարգը լուծում չունի: •

Նկարագրենք Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակը:

Օրինակ 4. Լուծել համակարգը

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$-x_1 + 3x_2 = -4$$
$$2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 17:$$

Համակարգի ընդլայնված մատրիցն է

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix}:$$

Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակը նույնպես կազմված է երկու փուլից: Առաջինը նույնն է, ինչ Գաուսի եղանակում: Տարրական տողային ձևափոխություններով ընդլայնված մատրիցը բերենք եռանկյունաձև (սեղանաձև) տեսքի

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Երկրորդ փուլում, հետընթաց տեղադրում կատարելու փոխարեն, շարունակենք տարրական տողային ձևափոխություններով պարզեցնել համակարգը: Առաջին տողին ավելացնենք երկրորդի կրկնապատիկը, իսկ երկրորդից հանենք երրորդի եռապատիկը

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Առաջին տողից հանենք 9-ով բազմապատկած վերջին տողը

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Կստանանք

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2: \bullet$$

Գաուս-Ժորդանի եղանակում հետընթաց տեղադրումն իրականացվում է տարրական տողային ձևափոխությունների օգնությամբ:

Օրինակ 5. Լուծել համակարգը

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 5x_2 = 1 :$$

Կիրառելով Գաուս-Ժորդանի եղանակը, կստանանք

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$x_1 + 5x_3 = 2$$
$$-x_2 + 3x_3 = 1 :$$

Համակարգի լուծումը պարամետրական տեսքով հետևյալն է

$$x_1 = 2 - 5c, \; x_2 = -1 + 3c, \; x_3 = c : \bullet$$

Օրինակ 6. Լուծել համակարգը

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 :$$

Կիրառելով Գաուս-Ժորդանի եղանակը, կստանանք

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$x_1 + 2x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0 :$$

Համակարգի լուծումը գրենք պարամետրական տեսքով

$$x_1 = -2c, \ x_2 = c, \ x_3 = c:$$

Համակարգն ունի անվերջ թվով լուծումներ ($c = 0$ արժեքին համապատասխանում է զրոյական լուծումը): •

Օրինակ 7. Լուծել համակարգը

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0: \end{aligned}$$

Համածայն Գաուս-Ժորդանի եղանակի

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0:$$

Այս դեպքում համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում:•

---

1. Համակարգը լուծել Գաուսի կամ Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակներով

ա) $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3$
$x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3$
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22,$

բ) $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7,$

գ) $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \end{aligned}$$

դ) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7, \end{aligned}$$

ե) $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12, \end{aligned}$$

զ) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3, \end{aligned}$$

է) $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1, \end{aligned}$$

ը) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5, \end{aligned}$$

թ) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 &= -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 &= 1, \end{aligned}$$

ժ) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2, \end{aligned}$$

ի) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 0, \end{aligned}$$

լ) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \end{aligned}$$

խ) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ծ) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 : \end{aligned}$$

2. Գտնել a, b, c պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում հետևյալ համակարգը

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ x + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

ա) որոշված է, բ) անհամատեղելի է, գ) անորոշ է:

3. Գտնել a, b պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում հետևյալ համակարգը

$$3x + 2y - z = a$$
$$x + y + 2z = b$$

ա) որոշված է, բ) անհամատեղելի է, գ) անորոշ է:

4. Գտնել a, b, c պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում հետևյալ համակարգը

$$3x + 2y - z = a$$
$$x + y + 2z = b$$
$$5x + 4y + 3z = c$$

ա) որոշված է, բ) անհամատեղելի է, գ) անորոշ է:

5. Գտնել λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծումներ

$$(\lambda - 2)x + y = 0$$
$$x + (\lambda - 2)y = 0 :$$

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆ

ԻՆՏԵՐՊՈԼՅԱՑԻԱ

Դիտարկենք xy-հարթության վրա տրված կետերի հետևյալ բազմությունը

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad \cdots, \quad (x_n, y_n) :$$

Գտնենք այնպիսի $p(x)$ բազմանդամ

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

որի գրաֆիկն անցնի տրված կետերով: Այս խնդիրն անվանում են *ինտերպոլյացիայի խնդիր*, $p(x)$ բազմանդամը՝ *ինտերպոլյացիոն բազմանդամ*, իսկ x_i կետերը *ինտերպոլյացիոն հանգույցներ:* Այսպիսով

$$p(x_i) = y_i, \; i = \overline{0, n}$$

կամ, որ նույնն է,

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = y_0 \\
&a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = y_1 \\
&\vdots \\
&a_0 + a_1x_n + \cdots + a_mx_n^m = y_n :
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Եթե $m < n$, ապա ինտերպոլյացիոն խնդիրը կարող է լուծում չունենալ: Օրինակ, եթե $n = 2$ և հարթության կետերն են $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$, ապա $m = 1$-ի համար գոյություն չունի $p(x) = a_0 + a_1x$ բազմանդամ, որն անցնի տրված կետերով:

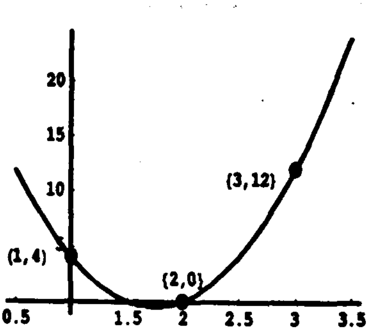
Եթե $m > n$, ապա ինտերպոլյացիոն խնդիրը կարող է ունենալ մեկից ավել լուծումներ: Օրինակ, եթե $n = 1$ և հարթության կետերն են $(0,0)$, $(1,1)$, ապա $m = 2$-ի համար որպես ինտերպոլյացիոն բազմանդամներ կարելի է վերցնել

$$p(x) = x^2, \qquad p(x) = 2x^2 - x, \qquad p(x) = 3x^2 - 2x :$$

Եթե $m = n$, ապա ինտերպոլյացիոն խնդիրն ունի միակ լուծում, եթե ինտերպոլյացիոն հանգույցներն իրարից տարբեր են:

Օրինակ 8. Կառուցել այնպիսի երկրորդ կարգի $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի $(1,4)$, $(2,0)$, $(3,12)$ կետերով:

(2) համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը



նկ.1

$$
\begin{aligned}
p(1) &= a_0 + 1a_1 + 1^2a_2 = 4 \\
p(2) &= a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 = 0 \\
p(3) &= a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 = 12,
\end{aligned}
$$

որն ունի $a_0 = 24, a_1 = -28, a_2 = 8$ միակ լուծումը (տես նկ 1.)

$$p(x) = 24 - 28x + 8x^2 : \bullet$$

Օրինակ 9. Գտնել այնպիսի չորրորդ կարգի $p(x)$ բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի

$$\underbrace{(1986,3)}_{(x_0,y_0)},\ \underbrace{(1987,5)}_{(x_1,y_1)},\ \underbrace{(1988,1)}_{(x_2,y_2)},\ \underbrace{(1989,4)}_{(x_3,y_3)},\ \underbrace{(1990,10)}_{(x_4,y_4)}$$

կետերով:

Հաշվարկները հեշտացնելու համար կատարենք $z = x - 1988$ փոփոխականի փոխարինում: Կստանանք կետերի հետևյալ բազմությունը

$$\underbrace{(-2,3)}_{(z_0,y_0)},\ \underbrace{(-1,5)}_{(z_1,y_1)},\ \underbrace{(0,1)}_{(z_2,y_2)},\ \underbrace{(1,4)}_{(z_3,y_3)},\ \underbrace{(2,10)}_{(z_4,y_4)}:$$

Լուծելով (2) համակարգը կստանանք

$$q(z) = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{101}{24}z^2 + \frac{3}{4}z^3 - \frac{17}{24}z^4 :$$

Հաշվի առնելով փոփոխականի փոխարինումը

$$p(x) = q(x - 1988) =$$

$$= 1 - \frac{5}{4}(x-1988) + \frac{101}{24}(x-1988)^2 + \frac{3}{4}(x-1988)^3 - \frac{17}{24}(x-1988)^4 : \bullet$$

---

6. Գտնել n-րդ կարգի բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի տրված $(n+1)$ կետերով

ա) $(1,-1),\ (-1,9),\ (2,-3)$, **բ)** $(-1,0),\ (1,4),\ (2,3),\ (3,16)$,
գ) $(2,5),\ (3,2),\ (4,5)$, **դ)** $(2,4),\ (3,6),\ (5,10)$,
ե) $(1986,5),\ (1987,7),\ (1988,12)$:

7. Գտնել չորրորդ կամ ավելի ցածր կարգի բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի

$$(1,1),\ (2,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,4)$$

կետերով: Պատասխանը բացատրել:

8. Գտնել երկրորդ կարգի բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի

$$(0,1),\ \left(2,\frac{1}{3}\right),\ \left(4,\frac{1}{5}\right)$$

կետերով:

9. Գտնել երկրորդ կամ ավելի ցածր կարգի $p(x)$ բազմանդամ, որի գրաֆիկն անցնի

$$(0,1),\ (2,3),\ (4,5)$$

կետերով:

Կառուցել $y = \dfrac{1}{p(x)}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և համեմատել այն նախորդ խնդրում ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ:

10. Աղյուսակում ներկայացված է ԱՄՆ-ի բնակչությունը 1920, 1930, 1940 և 1950թթ.:

տարի	1920	1930	1940	1950
բնկ (մլն.)	106	123	132	151

Գտնել տարբեր կարգի բազմանդամներ, որոնց գրաֆիկներն անցնեն աղյուսակում ներկայացված տվյալներին համապատասխանող կետերով:

Ստացված բազմանդամների օգնությամբ հաշվել ԱՄՆ-ի բնակչությունը 1960թ.:

Որքա՞ն է այն տարբերվում իրականում եղած թվից՝ 179մլն.:

11. Օգտվելով $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$ տվյալներից, հաշվել $\sin\frac{\pi}{3}$-ը:

12. Օգտվելով $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$ տվյալներից հաշվել $\log_2 3$-ը:

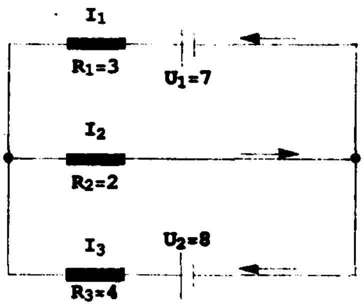
ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇՂԹԱՆԵՐ

Հիշեցնենք Կիրխհոֆի երկու օրենքները.

ա) հանգույց մտնող լիցքը հավասար է հեռացող լիցքին,

բ) շղթայի տեղամասում $U = IR$, որտեղ U-ն լարումն է, I-ն հոսանքի ուժը, R-ը տեղամասի դիմադրությունը:

Օրինակ 10. Դիտարկենք նկ.2-ում պատկերված շղթան և գտնենք հոսանքի ուժը յուրաքանչյուր տեղամասում: Կիրխհոֆի օրենքները կիրառենք երկու հանգույցների և երկու տեղամասերի համար



նկ.2

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = 3I_1 + 2I_2 = 7$$

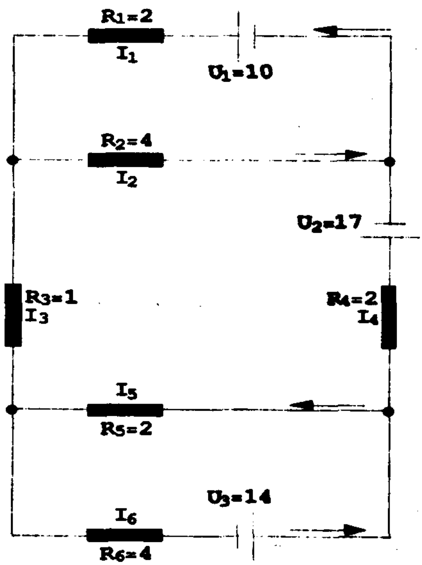
$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = 2I_2 + 4I_3 = 8:$$

Համակարգն ունի միակ լուծում

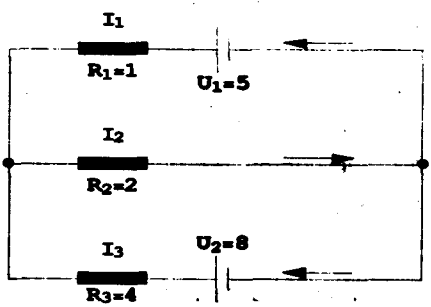
$$I_1 = 1,\ I_2 = 2,\ I_3 = 1: \bullet$$

---

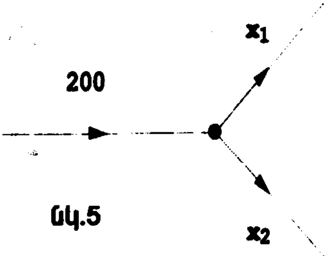
13. Գտնել նկ.3,4-ի շղթաների բոլոր տեղամասերի հոսանքի ուժը: Ինչպե՞ս կփոխվի պատասխանը, եթե նկ.4-ում ենթադրենք $U_1 = 2$ և $U_2 = 6$:



նկ.3



նկ.4



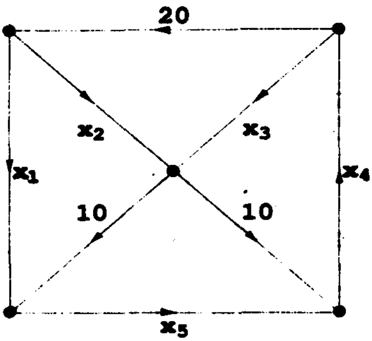
նկ.5

Մեր օրինակներում ցանցերը բաղկացած են հանգույցներից և ճյուղերից:

Ենթադրենք, որ հանգույց մտնող ամբողջ հոսքը հավասար է դուրս եկող հոսքին: Նկ. 5-ում պատկերված դեպքին համապատասխանում է հետևյալ հավասարումը

$$x_1 + x_2 = 200 :$$

Օրինակ 11. Գտնել x_i արժեքները (նկ. 6):



նկ.6

Ցանցն ունի հինգ հանգույց, որոնցից յուրաքանչյուրին համապատասխանում է մեկ հավասարում

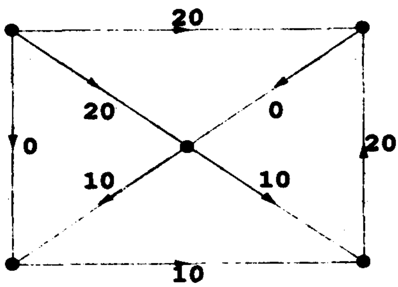
$$x_1 + x_2 = 20$$
$$x_3 + 20 = x_4$$
$$x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1 + 10 = x_5$$
$$x_5 + 10 = x_4 :$$

Համակարգի լուծումը պարամետրական տեսքով հետևյալն է

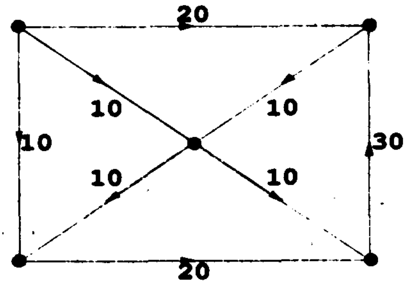
$$x_1 = c - 10,\ x_2 = -c + 30,\ x_3 = c - 10,\ x_4 = c + 10,\ x_5 = c :$$

Նկ.6-ում պատկերված ցանցը կարող է համապատասխանել քաղաքի փողոցային երթևեկությանը կամ խողովակներով հոսող ջրին: Ստացված պարամետրական լուծումը ցույց է տալիս, թե ինչպես կարելի է կառավարել այդ հոսքերը:

Ենթադրենք, թե ցանցում կարելի է կառավարել x_5 հոսքը: Համակարգի լուծումից երևում է, որ կարելի է կառավարել նաև մնացած հոսքերը: Օրինակ, եթե $c = 10$, ապա $x_1 = x_3 = 0$ (նկ.7), իսկ եթե $c = 20$, ապա $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 10$, $x_4 = 30$ (նկ.8):●

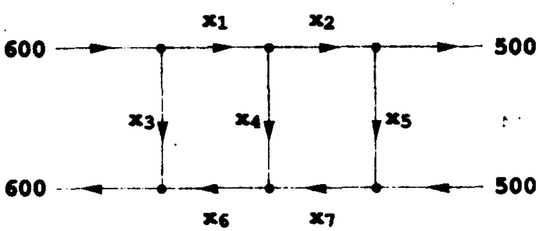


Նկ.7



Նկ.8

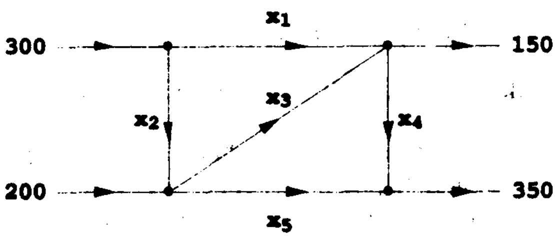
14. Ջուրը հոսում է նկ. 9-ի ցանցով:



Նկ.9

ա) Գտնել ջրի հոսքը խողովակներով՝ x_i,
բ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_6 = x_7 = 0$,
գ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_5 = 1000$, $x_6 = 0$:

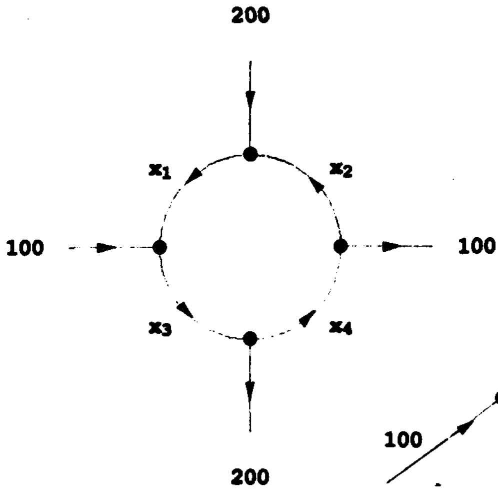
15. Երթևեկությունը կատարվում է նկ. 10-ի ցանցով:



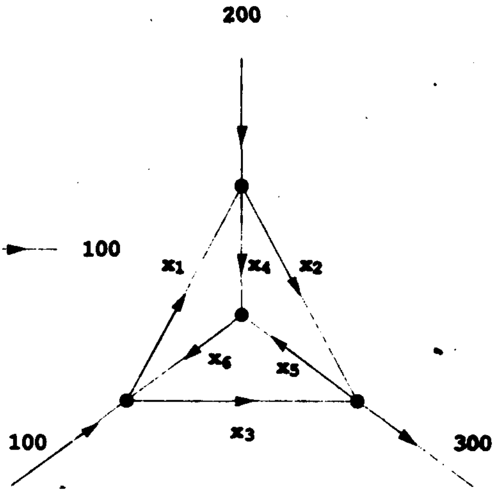
Նկ.10

ա) Գտնել x_i արժեքները,
բ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_2 = 200$, $x_3 = 50$,
գ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_2 = 150$, $x_3 = 0$:

16. Երթևեկությունը կատարվում է նկ. 11-ի ցանցով:
ա) Գտնել x_i արժեքները,
բ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_4 = 0$,
գ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_4 = 100$:



Նկ.11



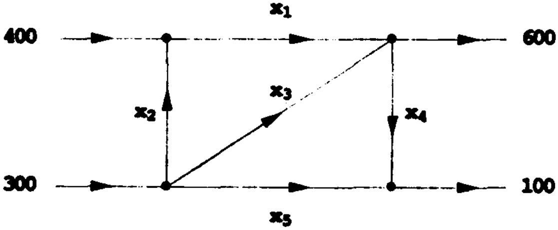
Նկ.12

17. Երթևեկությունը կատարվում է նկ. 12-ի ցանցով:

ա) Գտնել x_i արժեքները,

բ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_3 = 0$, $x_5 = 50$, $x_6 = 50$:

18. Երթևեկությունը կատարվում է նկ. 13-ի ցանցով:



Նկ.13

ա) Գտնել x_i արժեքները,
բ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_4 = 0$,
գ) դիտարկել այն դեպքը, երբ $x_4 = 100$:

Ծանոթացնենք MATHEMATICA փաթեթի այն հրամաններին, որոնք առնչվում են այս պարագրաֆում քննարկված խնդիրների հետ: Հրամանը ստեղնաշարով հավաքելուց հետո անհրաժեշտ է սեղմել "Shift+Enter" կոճակը կամ ստեղնաշարի ներքևի աջ մասում գտնվող "Enter" կոճակը: Ներմուծված հրամանը և ստացված պատասխանը համարակալվում են համապատասխանաբար $In[1], Out[1], In[2], Out[2], \cdots$ նշիչներով:

Համակարգչի "հիշողության" մեջ ներմուծենք հետևյալ մատրիցը

$$m = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[1]:=
```
m = {{2, 4, -2, 0}, {3, 5, 0, 1}}
```
Out[1]=
```
{{2, 4, -2, 0}, {3, 5, 0, 1}}
```

որը գրառենք ավելի հարմար տեսքով

In[2]:=
```
% // MatrixForm
```
Out[2]//MatrixForm=
```
( 2  4  -2  0 )
( 3  5   0  1 )
```

m մատրիցը Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով բերենք եռանկյունաձև տեսքի

In[3]:=
```
RowReduce[m] // MatrixForm
```
Out[3]//MatrixForm=
```
( 1  0   5   2 )
( 0  1  -3  -1 )
```

ինչը համընկնում է օրինակ 5-ում ստացված եռանկյունաձև մատրիցի հետ:

Տրված

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 5x_2 = 1$$

համակարգը լուծելու համար գրենք հրամանների հետևյալ հաջորդականությունը

```
In[4]:= m = {{2, 4, -2}, {3, 5, 0}};
        b = {0, 1};
        LinearSolve[m, b]

Out[6]= {2, -1, 0}
```

Մենք գիտենք (տես օրինակ 5), որ դիտարկվող համակարգն ունի անվերջ քանակությամբ լուծումներ: Սակայն $LinearSolve[m, b]$ հրամանով կարելի է գտնել դրանցից միայն մեկը: Այդ լուծումը կստացվի օրինակ 5-ում ստացված պարամետրական լուծումից t=0 դեպքում: Համակարգի բոլոր լուծումները ստանալու համար օգտվենք հետևյալ հրամանից

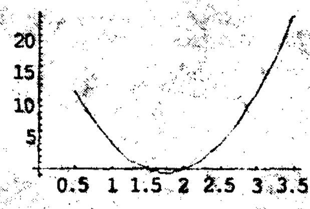
```
In[7]:= Solve[{2 x + 4 y - 2 z == 0, 3 x + 5 y == 1}, {x, y, z}]

      — Solve :: svars : Equations may not give
           solutions for all "solve " variables . More…

Out[7]= {{x → 2 - 5 z, y → -1 + 3 z}}
```

Համակարգի լուծումը ներկայացվել է պարամետրական տեսքով, որտեղ պարամետրի դեր է կատարում z-ը: Ստացված պատասխանը համընկնում է օրինակ 5-ում ստացված պատասխանի հետ: Կառուցենք օրինակ 8-ում դիտարկվող ինտերպոլյացիոն բազմանդամը

```
In[8]:= p[x_] = InterpolatingPolynomial[
          {{1, 4}, {2, 0}, {3, 12}}, x]

Out[8]= 4 + (-4 + 8 (-2 + x)) (-1 + x)
```

Կառուցենք p(x) բազմանդամի գրաֆիկը [0.5,3.5] հատվածում

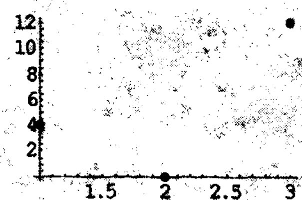
```
In[9]:= g1 = Plot[p[x], {x, 0.5, 3.5}]
```



```
Out[9]= - Graphics -
```

Կոորդինատական հարթության վրա պատկերենք (1,4), (2,0), (3,12) կետերը

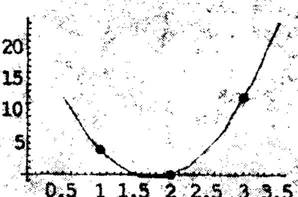
```
In[10]:= g2 = ListPlot[{{1, 4}, {2, 0}, {3, 12}},
           PlotStyle → PointSize[.04], PlotRange → All]
```



```
Out[10]= - Graphics -
```

Համախմբենք g1 և g2 գրաֆիկները

```
In[11]:= Show[g1, g2]
```



```
Out[11]= - Graphics -
```

2. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԵՏ

Զրոներից կազմված մատրիցն անվանում են ***զրոյական մատրից*** և նշանակում են O տառով:

$B = (b_{ij})$ մատրիցը որը որոշվում է

$$b_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j$$

բանաձևով անվանում են A ***մատրիցի տրանսպոնացված մատրից*** և նշանակում են A^T-ով:

Քառակուսի մատրիցի ***գլխավոր անկյունագիծ*** են անվանում $a_{11} \ a_{22} \cdots a_{nn}$ տարրերի շարանը, իսկ ***երկրորդական անկյունագիծ*** $a_{n1}a_{(n-1)2} \cdots a_{1n}$ տարրերի շարանը:

Վերին եռանկյունաձև մատրից են անվանում այն քառակուսի մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծից ներքև գտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի:

Ստորին եռանկյունաձև մատրից են անվանում այն քառակուսի մատրիցը, որի գըլխավոր անկյունագծից վերև գտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի: ***Անկյունագծային մատրից*** են անվանում այն քառակուսի մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի վրա չգտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի:

Սկալյար մատրից են անվանում այն անկյունագծային մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող բոլոր տարրերը հավասար են:

Միավոր մատրից են անվանում այն սկալյար մատրիցը, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերը հավասար են 1-ի: $(n \times n)$ կարգի միավոր մատրիցը նշանակում են E-ով (E_n):

Քառակուսի մատրիցի ***հետք*** անվանում են գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի գումարը: A մատրիցի հետքը նշանակում են $Tr(A)$-ով՝

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} :$$

Սահմանում 3. Միևնույն $(m \times n)$ կարգի երկու $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ մատրիցներ անվանում են ***հավասար***՝ $A = B$, եթե $a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i, j$:

Սահմանում 4. Միևնույն $(m \times n)$ կարգի երկու $A = (a_{ij})$ և $B = (b_{ij})$ մատրիցների գումար անվանում են $(m \times n)$ կարգի $C = A + B = (c_{ij}), \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i, j$ մատրիցը:

Սահմանում 5. $(m \times n)$ կարգի $A = (a_{ij})$ մատրիցի և λ թվի արտադրյալ անվանում են $(m \times n)$ կարգի $B = \lambda A = (b_{ij})$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$ մատրիցը:

Սահմանում 6. $(m \times p)$ կարգի $A = (a_{ij})$ և $(p \times n)$ կարգի $B = (b_{ij})$ մատրիցների արտադրյալ անվանում են այն $(m \times n)$ կարգի $C = AB = (c_{ij})$ մատրիցը, որտեղ

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \ \forall i, j :$$

Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի քառակուսի մատրից է, ապա AA արտադրյալը կնշանակենք A^2-ով: Եթե k-ն ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $A^k = \underbrace{AA...A}_{k}$: Հարմար է նշանակել $A^0 = E_n$:

Օրինակ 12. Տրված

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցների համար գտնել $3A$, $-B$, $3A - B$ մատրիցները:

Համաձայն սահմանումների

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$-B = (-1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 13. Հաշվել AB արտադրյալը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 4 \\ -1\cdot 2+3\cdot 1 & -1\cdot 0+3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 14. Հաշվել $(A^T)^3$-ը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$(A^T)^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & -66 \\ 165 & -213 \end{pmatrix} : \bullet$$

Գծային հավասարումների համակարգը կարելի է գրել

$$Ax = b$$

տեսքով, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m\times n)$ կարգի մատրից է և $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$:

Օրինակ 15. Լուծել համակարգը

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 :$$

Այս համակարգը կարելի է գրել $Ax = b$ տեսքով, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Օգտվելով Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակից ձևափոխենք $(A|b)$ մատրիցը

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 0 \end{pmatrix}:$$

Համակարգի լուծումը պարամետրական տեսքով հետևյալն է

$$x_1 = c, \quad x_2 = 4c, \quad x_3 = 7c:$$

Համակարգն ունի անվերջ քանակությամբ լուծումներ:•

A և B մատրիցներն անվանում են *տեղափոխելի*, եթե $AB = BA$:

Օրինակ 16. Ցույց տալ, որ A և B մատրիցները տեղափոխելի չեն

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}:$$

Հաշվենք

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

և $AB \neq BA$: •

Ընթերցողին առաջարկում ենք ստուգել, որ հետևյալ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

մատրիցները տեղափոխելի են:

Եվ այսպես. որոշ դեպքերում $AB = BA$, իսկ ընդհանրապես՝ $AB \neq BA$:

Հետևյալ օրինակով դիտարկենք մատրիցների արտադրյալի ևս մեկ կարևոր հատկություն:

Օրինակ 17. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ չնայած $A \neq B$, սակայն $AC = BC$: Իսկապես

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}: •$$

A մատրիցն անվանում են *սիմետրիկ մատրից*, եթե $A = A^T$, *շեղսիմետրիկ մատրից*՝ եթե $A = -A^T$:

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի ոչ զրոյական մատրից է: Կասենք, որ A-ն *ինքնաչեզոքացնող (նիլպոտենտ) մատրից* է, եթե ինչ-որ բնական k թվի համար

$$A^2 \neq O, \; \cdots, \; A^{k-1} \neq O, \; A^k = O:$$

k թիվը կանվանենք *ինքնաչեզոքացման աստիճան:*

A քառակուսի մատրիցն անվանում են *միավորակերպ (իդեմպոտենտ) մատրից*, եթե

$$A^2 = A:$$

---

19. Կատարել գործողությունները

ա) $(1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; -1) + (3 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 2)$,

բ) $3(1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 3) + 2(-1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 11)$,

գ) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

դ) $-3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

20. Գտնել x, y, z-ը

$$4 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{pmatrix}$$

մատրիցային հավասարումից:

21. Հաշվել քառակուսի մատրիցների արտադրյալը

ա) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ բ) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

ե) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

22. Հաշվել մատրիցների արտադրյալը

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$:

23. Հաշվել

ա) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$, բ) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$,

գ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{19}, n \in N,$ դ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}, n \in N,$

ե) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n, n \in N,$ զ) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n, n \in N,$

է) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, n \in N,$ ը) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n, n \in N,$

թ) $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n, n \in N,$ ժ) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n, n \in N$:

24. Գտնել A մատրիցը, եթե

ա) $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$:

25. Լուծել մատրիցային հավասարումների համակարգը

ա) $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

բ) $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $-4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:

26. Գտնել $f(A)$-ն, եթե $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ և տրված $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի համար $f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$

ա) $f(x) = x^2 - 5x + 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$,

բ) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$:

27. Ինչպե՞ս կփոխվի A և B մատրիցների արտադրյալը, եթե
ա) տեղափոխենք A մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերը,
բ) A մատրիցի i-րդ տողին ավելացնենք c թվով բազմապատկած j-րդ տողը,
գ) տեղափոխենք B մատրիցի i-րդ և j-րդ սյուները,
դ) B մատրիցի i-րդ սյանը ավելացնենք c թվով բազմապատկած j-րդ սյունը:

28. Տրված են $c = -2$ և

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Հաշվել

$$B(CA), \quad C(BC), \quad (B+C)A \quad B(C+O), \quad (cB)(C+C), \quad B(cA)$$

մատրիցները:

29. Ցույց տալ, որ $AB = O$ հավասարությունից չի հետևում, որ $A = O$ կամ $B = O$: Քննարկել հետևյալ օրինակը

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}:$$

30. Ցույց տալ, որ $AC = BC$ հավասարությունից չի հետևում, որ $A = B$: Դիտարկել հետևյալ օրինակը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}:$$

31. Հաշվել AB-ն և BA-ն, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$

բ) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$

դ) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}:$

32. A-ն և B-ն (3×3) կարգի մատրիցներ են, ընդ որում A-ն անկյունագծային մատրից է. ա) նկարագրել AB-ն: Բերել օրինակներ,

բ) նկարագրել BA-ն: Բերել օրինակներ,

գ) ինչպես կփոխվեն ա) և բ) կետերի պատասխանները, եթե A մատրիցը լինի սկալյար մատրից:

33. Ցույց տալ, որ հետևյալ մատրիցային հավասարումը լուծում չունի

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

34. Ապացուցել, որ գոյություն չունեն A և B $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ այնպիսիք, որ $AB - BA = E$:

35. Դիցուք AB մատրիցը քառակուսի է: Ցույց տալ, որ BA արտադրյալը որոշված է:

36. Դիցուք AB արտադրյալը որոշված է: Ցույց տալ, որ եթե A մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերը նույնն են, ապա AB մատրիցի i-րդ և j-րդ տողերը նույնպես նույնն են:

37. A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներն են, ընդ որում՝ A մատրիցի i-րդ տողը կազմված է միայն 0-ներից: Ցույց տալ, որ AB մատրիցի i-րդ տողը նույնպես 0-ական տող է: Ցույց տալ, որ հակառակը ճիշտ չէ: Բերել (2×2) կարգի A և B այդպիսի մատրիցների օրինակ:

38. Ապացուցել, որ

ա) որպեսզի A $(n \times n)$ կարգի քառակուսի մատրիցը լինի տեղափոխելի $(n \times n)$ կարգի բոլոր քառակուսի մատրիցների հետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ A-ն լինի սկալյար,

բ) որպեսզի A $(n \times n)$ կարգի քառակուսի մատրիցը լինի տեղափոխելի $(n \times n)$ կարգի բոլոր անկյունագծային մատրիցների հետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ A-ն լինի անկյունագծային,

գ) եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի անկյունագծային, բայց ոչ սկալյար մատրից է, ապա A-ի հետ տեղափոխելի կամայական $(n \times n)$ կարգի մատրից անկյունագծային է:

39. Ցույց տալ, որ եթե $AB = BA$, ապա

ա) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, բ) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$:

40. Գտնել տրված մատրիցի հետ տեղափոխելի բոլոր մատրիցները

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

41. Հաշվել ա) AB, բ) $A^T B^T$, գ) $B^T A^T$ արտադրյալները, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

42. Հաշվել AA^T արտադրյալը, եթե $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

43. Ապացուցել, որ

ա) $(A^T)^T = A$, բ) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
գ) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, դ) $(AB)^T = B^T A^T$:

44. Բերել (2×2) կարգի այնպիսի A և B մատրիցների օրինակ, որ $(AB)^T \neq A^T B^T$:

45. Ապացուցել, որ եթե A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են, $\lambda \in R^1$, ապա

ա) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$,
բ) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$,
գ) $Tr(AB) = Tr(BA)$:

46. Լուծել մատրիցային հավասարումը

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

47. Լուծել մատրիցային հավասարումները

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

ա) $3X + 2A = B$ բ) $2A - 5B = 3X$
գ) $X - 3A + 2B = 0$ դ) $6X - 4A - 3B = 0$:

48. Տրված մատրիցներից որոնք են սիմետրիկ, շեղսիմետրիկ

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$:

49. Ապացուցել, որ

ա) երկու սիմետրիկ կամ երկու շեղսիմետրիկ մատրիցների արտադրյալը սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե մատրիցները տեղափոխելի են, բ) սիմետրիկ և շեղսիմետրիկ մատրիցների արտադրյալը շեղսիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե մատրիցները տեղափոխելի են:

50. Ապացուցել, որ ցանկացած $(n \times m)$ կարգի A մատրիցի համար AA^T և $A^T A$ մատրիցները սիմետրիկ մատրիցներ են:

51. Ապացուցել, որ շեղսիմետրիկ մատրիցի գլխավոր անկյունագծի բոլոր տարրերը 0 են:

52. Ապացուցել, որ եթե A-ն և B-ն շեղսիմետրիկ մատրիցներ են, ապա $(A+B)$-ն շեղսիմետրիկ մատրից է:

53. Ապացուցել, որ եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա $(A - A^T)$-ն շեղսիմետրիկ մատրից է, իսկ $(A + A^T)$ մատրիցը սիմետրիկ է:

54. Ցույց տալ, որ ցանկացած A մատրից կարելի է միակ ձևով ներկայացնել B սիմե-տրիկ և C շեղսիմետրիկ մատրիցների գումարի տեսքով՝ $A = B + C$: Գտնել B և C մատրիցները, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

55. Բերել $(n \times n)$ կարգի A և B սիմետրիկ մատրիցների օրինակ, որոնց համար AB-ն սիմետրիկ չէ:

56. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ A-ն ինքնաչեզոքացնող մատրից է և գտնել նրա ինքնաչեզոքացման աստիճանը:

57. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է ինքնաչեզոքացնող: Դրական պատասխանի դեպքում գտնել ինքնաչեզոքացման աստիճանը

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

58. Գտնել (3×3) կարգի և երկրորդ, երրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող մատրիցներ:

59. Գտնել (4×4) կարգի և երկրորդ, երրորդ, չորրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող մատրիցներ:

60. Գտնել հինգերորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող մատրից:

61. Դիցուք A-ն ինքնաչեզոքացնող մատրից է: Ի՞նչ կարելի է ասել A^T մատրիցի մասին:

62. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից, որն է միավորակերպ

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

63. a և b թվերն ընտրել այնպես, որ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

մատրիցը լինի միավորակերպ:

64. a, b և c թվերն ընտրել այնպես, որ

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

մատրիցը լինի միավորակերպ:

65. Ցույց տալ, որ եթե A մատրիցը միավորակերպ է, ապա A^T մատրիցը՝ նույնպես:

66. Ցույց տալ, որ եթե A, B մատրիցները միավորակերպ են և $AB = BA$, ապա AB մատրիցը՝ նույնպես:

67. Գտնել (3×3), (4×4), (5×5) կարգի միավորակերպ մատրիցներ:

a_{ij} տարրերով (3×4) կարգի մատրիցը ներմուծենք հետևյալ հրամանով

In[1]:=
```
mat=Table[a[i, j], {i, 3}, {j, 4}];
mat//MatrixForm
```
Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \end{pmatrix}$$

Նույն մատրիցը ներմուծենք այլ եղանակով

In[3]:=
```
mat=Array[a, {3,4}];
mat//MatrixForm
```
Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \end{pmatrix}$$

Ներմուծենք անկյունագծային մատրից, որի գլխավոր անկյունագծի տարրերն են՝ a, b, c, d

In[5]:=
```
DiagonalMatrix[{a, b, c,d}]
```
Out[5]=
```
{{a, 0, 0, 0}, {0, b, 0, 0}, {0, 0, c, 0}, {0, 0, 0, d}}
```

Կառուցենք (3×3) կարգի միավոր մատրից

In[6]:=
```
IdentityMatrix[3]
```
Out[6]=
```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Կառուցենք քառակուսի մատրից, որի գլխավոր և դրան հարևան երկու անկյունագծերի վրա չգտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի

In[7]:=
```
Table[Switch[i-j, -1, a, 0, b, 1, c, _, 0], {i, 5},
{j, 5}]//MatrixForm
```
Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}$$

Ներմուծենք (3×3) կարգի M մատրիցը

In[8]:=
```
M = Array[a, {3, 3}]
```
Out[8]=
```
{{a[1, 1], a[1, 2], a[1, 3]},
 {a[2, 1], a[2, 2], a[2, 3]}, {a[3, 1], a[3, 2], a[3, 3]}}
```

Եւ դուրս գրենք M մատրիցի երկրորդ տողը

In[9]:=
```
M[[2]]
```
Out[9]=
```
{a[2, 1], a[2, 2], a[2, 3]}
```

Դուրս գրենք M մատրիցի առաջին սյունը

In[10]:=
```
M[[All, 2]]
```
Out[10]=
```
{a[1, 2], a[2, 2], a[3, 2]}
```

Կատարենք վեկտորների հետ գծային գործողություններ: Գումարենք երկու վեկտորներ

In[11]:=
```
{a, b} + {ap, bp}
```
Out[11]=
```
{a + ap, b + bp}
```

Տարբեր երկարություն ունեցող վեկտորները չի կարելի գումարել (տես համակարգչի պատասխանը)

```
In[12]:= {a, b, c} + {ap, bp}
— Thread::tdlen : Objects of unequal length in
     {a, b, c} + {ap, bp} cannot be combined. More…
Out[12]= {ap, bp} + {a, b, c}
```

Վեկտորին գումարենք թիվ

```
In[13]:= 1 + {a, b}
Out[13]= {1 + a, 1 + b}
```

Վեկտորը բազմապատկենք թվով

```
In[14]:= k {a, b}
Out[14]= {a k, b k}
```

Հաշվենք տրված վեկտորների սկալյար արտադրյալը

```
In[15]:= {a, b, c} . {ap, bp, cp}
Out[15]= a ap + b bp + c cp
```

Հաշվենք մատրիցների արտադրյալը

```
In[16]:= {{a, b}, {c, d}} . {{1, 2}, {3, 4}}
Out[16]= {{a + 3 b, 2 a + 4 b}, {c + 3 d, 2 c + 4 d}}
```

Մատրիցը բազմապատկենք սյունով

```
In[17]:= m = {{a, b}, {c, d}};
         v = {x, y};
         m.v

Out[19]= {a x + b y, c x + d y}
```

Նկատենք, որ MATHEMATICA-ում տարբերություն չկա տողի և սյան միջև՝ կարելի է ինչպես մատրիցը բազմապատկել սյունով, այնպես էլ սյունը բազմապատկել մատրիցով

```
In[20]:= m . v

Out[20]= {a x + b y, c x + d y}
```

```
In[21]:= v . m

Out[21]= {a x + c y, b x + d y}
```

```
In[22]:= v . m . v

Out[22]= x (a x + c y) + y (b x + d y)
```

Հաշվենք տրված մատրիցի տրանսպոնացված մատրիցը

```
In[23]:= Transpose[{{a, b, c}, {ap, bp, cp}}]

Out[23]= {{a, ap}, {b, bp}, {c, cp}}
```

Հաշվենք տրված մատրիցի հետքը

```
In[24]:= Tr[{{a, b}, {c, d}}]

Out[24]= a + d
```

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

Դիտարկենք այնպիսի համակարգեր, որոնց տարրերը կարող են գտնվել միայն վերջավոր քանակությամբ վիճակներում՝ $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$: Օրինակ, ընտրողները ընտրություններին իրենց ձայնը կարող են տալ միայն հանրապետականներին, դեմոկրատներին կամ ազգայնականներին, այսինքն՝ ընտրողները կարող են գտնվել միայն երեք վիճակներում: Քաղաքի բնակիչները ապրում են կամ քաղաքի կենտրոնում կամ ծայրամասերում՝ երկու վիճակ, և այլն: Բնական է ենթադրել, որ համակարգի տարրը ժամանակի ընթացքում կարող է մի վիճակից անցնել մյուս վիճակին: Տվյալ տարրի j-վիճակից i-վիճակին անցնելու հավանականությունը նշանակենք p_{ij}-ով, որտեղ

$$0 \leq p_{ij} \leq 1: \tag{3}$$

Եթե $p_{ij} = 0$, ապա ըստ հավանականության սահմանման՝ տարրը j վիճակից i վիճակին չի անցնում, իսկ եթե $p_{ij} = 1$, ապա՝ անպայման անցնում է: Հավանականությունների ամբողջ հավաքածուն կարելի է ներկայացնել $(n \times n)$ կարգի P մատրիցով

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}:$$

Քանի որ տվյալ տարրը գտնվում է որևէ վիճակում (և միայն մեկ), ապա

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{nj} = 1, \quad j = \overline{1,n}: \tag{4}$$

(3) և (4) պայմաններին բավարարող P մատրիցն անվանում են ***հավանականային*** կամ ***ստոխաստիկ մատրից***:

Օրինակ 18. Դիտարկենք հետևյալ երկու մատրիցները

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է ստուգել, որ A-ն ստոխաստիկ մատրից է, իսկ B-ն՝ ոչ:•

Օրինակ 19. 100000 բնակչություն ունեցող քաղաքում երկու մրցակցող ընկերություններ՝ A, B, առաջարկում են կաբելային հեռուստատեսություն: Այս տարի A-ի բաժանորդների քանակը 15000 է, իսկ B-ինը՝ 20000: Քաղաքի մնացած բնակչությունը դիտում է ոչ կաբելային հեռուստատեսություն: Ամեն տարի A-ի բաժանորդների 20%-ը սկսում է օգտվել B-ի ծառայություններից, 10%-ը սկսում է դիտել ոչ կաբելային հեռուստատեսություն, իսկ B-ի բաժանորդների 15%-ը սկսում է օգտվել A-ի ծառայություններից և 5%-ը սկսում է դիտել ոչ կաբելային հեռուստատեսություն: Ոչ կաբելային հեռուստատեսություն դիտողների 15%-ը սկսում է օգտվել A-ի, և նս 15%-ը՝ B-ի ծառայություններից: Ինչպիսի՞ն կլինի բաժանորդների քանակը մեկ տարի անց: Այս մոդելի հավանականային մատրիցն է

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{pmatrix},$$

որտեղ առաջին սյունը վերաբերում է A ընկերությանը, երկրորդ սյունը B ընկերությանը, իսկ վերջինը՝ ոչ կաբելային հեռուստատեսությանը: Բաժանորդների ներկայիս բաշխվածությունը պատկերենք հետևյալ x սյունով

$$x = \begin{pmatrix} 15000 \\ 20000 \\ 65000 \end{pmatrix},$$

որտեղ առաջին տողը A-ի բաժանորդների քանակն է, երկրորդ տողը B-ինը, իսկ վերջին տողը՝ ոչ կաբելային հեռուստատեսությանը: x սյանն անվանում են *վիճակի սյուն:* Մեր խնդիրն է գտնել վիճակի սյունը մեկ տարի անց: a, b, c-ով նշանակենք վիճակի սյան կոորդինատները մեկ տարի անց: Ունենք

$$a = 0.70 \cdot 15000 + 0.15 \cdot 20000 + 0.15 \cdot 65000 = 23250$$

$$b = 0.20 \cdot 15000 + 0.80 \cdot 20000 + 0.15 \cdot 65000 = 28750$$

$$c = 0.10 \cdot 15000 + 0.05 \cdot 20000 + 0.70 \cdot 65000 = 48000 :$$

Նույնը կարելի է գրել մատրիցային տեսքով

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Px = \begin{pmatrix} 23250 \\ 28750 \\ 48000 \end{pmatrix} :$$

Մեկ տարի անց A-ն կունենա 23250 բաժանորդ, B-ն՝ 28750, իսկ ոչ կաբելային հեռուստատեսությունը՝ 48000:

Նույն եղանակով կարելի է գտնել բաժանորդների քանակը մեկ, երկու և ցանկացած թվով տարիներ անց:

Երկու տարի անց

$$P(Px) = P^2x = \begin{pmatrix} 27788 \\ 34850 \\ 37363 \end{pmatrix} :$$

Հինգ տարի անց

$$P^5x = \begin{pmatrix} 32411 \\ 43812 \\ 23777 \end{pmatrix} :$$

Տասը տարի անց

$$P^{10}x = \begin{pmatrix} 33287 \\ 47147 \\ 19566 \end{pmatrix} :$$

Այսպես շարունակելով կարելի է համոզվել, որ բավականաչափ ժամանակ անց վիճակի սյունը կսկսի ավելի դանդաղ փոխվել և ի վերջո, կկայունանա: Այլ կերպ ասած գոյություն ունի հետևյալ սահմանը

$$\lim_{n\to\infty} P^n x = x_0$$

որտեղ

$$x_0 = \begin{pmatrix} 33333 \\ 47619 \\ 19048 \end{pmatrix} :$$

x_0-ն անվանում են *համակարգի (հավանականային մատրիցի) հավասարակշռության վեկտոր:* Առաջարկում ենք ստուգել, որ

$$Px_0 = x_0 : \bullet$$

68. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է ստոխաստիկ

ա) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

69. Գործարանի շուկայագիտության բաժանմունքը պարզեց, որ իրենց գործարանի արտադրանքի տվյալ ամսվա գնորդների 20%-ը մյուս ամսին գնումներ չեն կատարում, իսկ տվյալ ամսին գնումներ չկատարողների 30%-ը դառնում են գործարանի արտադրանքի գնորդներ: Հայտնի է, որ տվյալ ամսին 1000 բնակչից 100-ը գնել են գործարանի թողարկած արտադրանքը: Քանի՞ մարդ գնում կկատարի հաջորդ ամիս, երկու ամիս հետո:

70. 1000 լաբորատոր առնետների օգնությամբ ուսումնասիրվում է անհայտ հիվանդությունը: Հայտնի է, որ մեկ շաբաթվա ընթացքում վարակված առնետների 80%-ը կհաղթահարի հիվանդությունը և միևնույն շաբաթվա ընթացքում չվարակված առնետների 10%-ը կհիվանդանա: Ներկայումս 100 առնետներ վարակված են: Քանի՞ հիվանդ առնետ կլինի հաջորդ շաբաթ, երկու շաբաթ հետո:

71. Քաղաքի բնակչությունը 10000 է, որոնցից 5000-ը չծխողներ են, 2500-ը ծխում են օրական մեկ տուփից պակաս և 2500-ը՝ մեկ տուփից ավել: Ամեն ամիս չծխողների 5%-ը սկսում են ծխել մեկ տուփից պակաս և 2%-ը մեկ տուփից ավել: Մեկ տուփից պակաս ծխողների 10%-ը կթողնի ծխելը, իսկ 10%-ը կսկսի ծխել մեկ տուփից ավել: Մեկ տուփից ավել ծխողների 5%-ը կթողնի ծխելը, իսկ 10%-ը կսկսի ծխել մեկ տուփից պակաս: Ինչպիսի՞ն կլինի բնակչության վիճակը մեկ, երկու ամիս հետո:

72. Տրված է հավանականային մատրիցը

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}:$$

Գտնել P^2x, P^3x-երը, եթե $x = (100, 100, 800)^T$:

73. Պետությունը բաժանված է երեք շրջանների՝ A, B, C: Ամեն տարի A-ում բնակվողների 10%-ը տեղափոխվում է B և 5%-ը C շրջաններ, B-ում բնակվողների 15%-ը տեղափոխվում է A և 5%-ը C շրջաններ: C -ում բնակվողների 10%-ը տեղափոխվում է A և 10%-ը B շրջաններ: Այս տարի յուրաքանչյուր շրջան ունի 100000 բնակիչ: Ինչպիսի՞ն կլինի բնակչության բաշխվածությունը ըստ շրջանների՝ մեկ, երեք տարի հետո:

ՓՈԽԱՆԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Տնտեսական համակարգն ունի n իրարից տարբեր $(I_1, I_2 \cdots, I_n)$ արտադրություններ, որոնցից յուրաքանչյուրը մյուսների հետ փոխանակում է հումք և վերջնական արտադրանք: Փոխանակման գործակիցը նշանակենք d_{ij}-ով, որը ցույց է տալիս, թե մեկ միավոր արտադրանք տալու համար I_j արտադրությանը քանի միավոր է անհրաժեշտ I_i արտադրությունից: Որպես միավոր կարելի է ընդունել, ասենք, դրամը: Փոխանակման գործակիցները կարելի է գրել հետևյալ մատրիցի տեսքով

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

որն անվանում են *փոխանակման* կամ *միջճյուղային հաշվեկշռի մատրից*: Եթե, օրինակ, $d_{12} = 0.41$, ապա դա նշանակում է, որ մեկ դրամին համարժեք I_2 արտադրանք թողարկելու համար հարկավոր է օգտագործել 0.41 դրամին համարժեք I_1-ի արտադրանք: Այժմ հասկանալի է, որ մեկ դրամին համարժեք I_j ապրանք արտադրելու համար պետք է ծախսել

$$d_{1j} + \cdots + d_{nj}$$

դրամ: Որպեսզի համակարգն աշխատի, անհրաժեշտ է, որ d_{ij} գործակիցները բավարարեն երկու պայմանների

$$0 \leq d_{ij} < 1$$

և

$$d_{1j} + \cdots + d_{nj} < 1, \quad j = \overline{1,n}:$$

Օրինակ 20. Տնտեսական համակարգը բաղկացած է երեք արտադրություններից՝ A, B, C.

ա) մեկ դրամին համարժեք ապրանք թողարկելու համար A-ին հարկավոր է 0.10 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք, 0.15 դրամին համարժեք B-ի արտադրանք և 0.23 դրամին համարժեք C-ի արտադրանք,

բ) մեկ դրամին համարժեք ապրանք թողարկելու համար B-ին հարկավոր է 0 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք, 0.43 դրամին համարժեք A-ի արտադրանք և 0.03 դրամին համարժեք C-ի արտադրանք,

գ) մեկ դրամին համարժեք ապրանք թողարկելու համար C-ին հարկավոր է 0.02 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք, 0 դրամին համարժեք A-ի արտադրանք և 0.37 դրամին համարժեք B-ի արտադրանք:

Այս մոդելի փոխանակման մատրիցն է

$$D = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.43 & 0.00 \\ 0.15 & 0.00 & 0.37 \\ 0.23 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix} : \bullet$$

Նշանակենք x_i-ով I_i արտադրության կողմից թողարկված լրիվ ապրանքի արժեքը: Եթե թողարկված ապրանքը վաճառվում է ոչ արտադրական ոլորտներին (կառավարություն, թոշակառուներ, երեխաներ և այլն), ապա համակարգն անվանում են *բաց համակարգ*, հակառակ դեպքում՝ *փակ*: Եթե տնտեսական համակարգը փակ է, ապա

$$x_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \cdots + d_{in}x_n, \quad i = \overline{1,n} :$$

Եթե համակարգը բաց է

$$x_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \cdots + d_{in}x_n + e_i, \quad i = \overline{1,n},$$

որտեղ e_i-ն ապրանքի լրացուցիչ պահանջարկն է ոչ արտադրական ոլորտների կողմից: Վերջին հավասարությունները կարելի գրել մատրիցային տեսքով

$$x = Dx, \text{ կամ } x = Dx + e,$$

որտեղ $e = (e_1, \cdots, e_n)^T$:

Այժմ գտնենք յուրաքանչյուր արտադրության կողմից թողարկված ապրանքի ընդհանուր ծավալը, եթե $e = (20000, 30000, 25000)^T$: $(E-D)x = e$ համակարգը լուծելով Գաուս-Ժորդանի եղանակով, կստանանք

$$x = (A, B, C) \equiv (46616.4, 51087.6, 38013.8)^T : \bullet$$

74. Համակարգը բաղկացած է երկու արտադրություններից, որոնք արտադրում են քարածուխ և պողպատ.

ա) մեկ դրամին համարժեք քարածուխ արտադրելու համար պահանջվում է 0.10 դրամին համարժեք քարածուխ և 0.80 դրամին համարժեք պողպատ,

բ) մեկ դրամին համարժեք պողպատ արտադրելու համար պահանջվում է 0.10 դրամին համարժեք պողպատ և 0.20 դրամին համարժեք քարածուխ:

Գտնել փոխանակման մատրիցը և յուրաքանչյուր արտադրանքի ընդհանուր ծավալը, եթե արտաքին պահանջարկը տրվում է $e = (10000, 20000)^T$ վեկտորով:

75. Համակարգը բաղկացած է երկու արտադրություններից, որոնք արտադրում են A և B ապրանքներ.

ա) մեկ դրամին համարժեք A ապրանք արտադրելու համար պահանջվում է 0.30 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք և 0.40 դրամին համարժեք B ապրանք,

բ) մեկ դրամին համարժեք B ապրանք արտադրելու համար պահանջվում է 0.20 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք 0.40 դրամին համարժեք A ապրանք:

Գտնել փոխանակման մատրիցը և յուրաքանչյուր արտադրանքի ընդհանուր ծավալը, եթե արտաքին պահանջարկը տրվում է $e = (50000, 30000)^T$ վեկտորով:

76. Համակարգը բաղկացած է երկու արտադրություններից, որոնք արտադրում են A և B ապրանքներ.

ա) մեկ դրամին համարժեք A ապրանք արտադրելու համար պահանջվում է 0.20 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք և 0.30 դրամին համարժեք B ապրանք,

բ) մեկ դրամին համարժեք B ապրանք արտադրելու համար պահանջվում է 0.10 դրամին համարժեք սեփական արտադրանք 0.50 դրամին համարժեք A ապրանք:

Գտնել փոխանակման մատրիցը և յուրաքանչյուր արտադրանքի ընդհանուր ծավալը, եթե արտաքին պահանջարկը տրվում է $e = (40000, 80000)^T$ վեկտորով:

3. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑ

Սահմանում 7. $(n \times n)$ կարգի B մատրիցն անվանում են $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի ***հակադարձ մատրից,*** եթե

$$AB = BA = E:$$

Եթե A մատրիցն ունի հակադարձ, ապա այն անվանում են ***հակադարձելի*** մատրից, հակառակ դեպքում՝ ***ոչ հակադարձելի*** կամ ***սինգուլյար մատրից:***

Թեորեմ 1. Եթե մատրիցը հակադարձելի է, ապա հակադարձ մատրիցը միակն է:

A-ի հակադարձ մատրիցը նշանակում են A^{-1}-ով:

Օրինակ 21. Գտնել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

մատրիցի հակադարձը:

Ըստ սահմանման գտնել A մատրիցի հակադարձը նշանակում է լուծել հետևյալ մատրիցային հավասարումը՝ $AX = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

որը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{array}{lll} x_{11} + 2x_{31} = 1 & x_{12} + 2x_{32} = 0 & x_{13} + 2x_{33} = 0 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} = 0 & x_{12}+x_{22}+x_{32} = 1 & x_{13}+x_{23}+x_{33} = 0 \\ x_{11} + 3x_{31} = 0 & x_{12} + 3x_{32} = 0 & x_{13} + 3x_{33} = 1: \end{array}$$

Նկատենք, որ ստացված երեք համակարգերի գործակիցների մատրիցը նույնն է: Լուծելով դրանցից յուրաքանչյուրը Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով կստանանք

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Հետևաբար

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Կարելի է ստացված երեք համակարգերը լուծել միաժամանակ՝ հետևյալ եղանակով: Գրենք (3×6) կարգի մի մատրից, որը կազմված է տրված (3×3) կարգի A մատրիցից՝ գրված ձախ մասում, և (3×3) կարգի միավոր մատրիցից՝ գրված աջ մասում

$$(A|E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Կիրառենք Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակը $(A|E)$ համակցված մատրիցի համար

$$(E|A^{-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Այսինքն

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ընդհանուր դեպքում նկարագրենք մատրիցի հակադարձի որոնման ալգորիթմը.

ա) գրենք $(n\times 2n)$ կարգի համակցված $(A|E)$ մատրիցը,

բ) տողային տարրական ձևափոխություններով ստանանք $(E|A^{-1})$ մատրիցը,

գ) եթե ձախ մասում հնարավոր չէ ստանալ միավոր մատրից, ապա A մատրիցը հակադարձելի չէ:

Օրինակ 22. Ցույց տալ, որ հետևյալ մատրիցը չունի հակադարձ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}:$$

Կազմենք համակցված մատրիցը

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

և կիրառենք Գաուս-Ժորդանի եղանակը: Երկրորդ տողից հանենք առաջինի եռապատիկը և վերջին տողին գումարենք առաջինի կրկնապատիկը

$$(A|E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Այժմ վերջին տողին ավելացնենք երկրորդը

$$(A|E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ակնհայտ է,որ $(A|E)$ մատրիցը հնարավոր չէ ձևափոխել $(E|A^{-1})$ տեսքի և հետևաբար A մատրիցը հակադարձելի չէ:●

Օրինակ 23. Հաշվել հետևյալ $(n \times n)$ կարգի մատրիցի հակադարձը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \gamma \end{pmatrix}:$$

Կազմենք համակցված մատրիցը

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots & 0 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 & \alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 1 & \alpha_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\cdots & \beta_{n-1} & \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Կիրառենք Գաուս-Ժորդանի եղանակը: Վերջին տողից հանենք առաջինը՝ բազմապատկած β_1-ով, ստացված վերջին տողից հանենք երկրորդը՝ բազմապատկած β_2-ով և այսպես շարունակելով $(n-2)$-րդ ստացված վերջին տողից հանենք նախավերջինը՝ բազմապատկած β_{n-1}-ով

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta & -\beta_1 & -\beta_2 & \cdots & -\beta_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

որտեղ $\delta = \gamma - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \beta_k$: Առաջին տողից հանենք վերջինը՝ բազմապատկած $\frac{\alpha_1}{\delta}$-ով, երկրորդ տողից հանենք վերջինը՝ բազմապատկած $\frac{\alpha_2}{\delta}$-ով և, այսպես շարունակելով, նախավերջին տողից հանենք վերջինը՝ բազմապատկած $\frac{\alpha_{n-1}}{\delta}$-ով

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \delta + \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_{n-1} & -\alpha_1 \\ \alpha_2\beta_1 & \delta + \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_{n-1} & -\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1}\beta_1 & \alpha_{n-1}\beta_2 & \cdots & \delta + \alpha_{n-1}\beta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \\ -\beta_1 & -\beta_2 & \cdots & -\beta_{n-1} & 1 \end{pmatrix} : \bullet$$

Որպես հակադարձ մատրիցի մի կիրառություն, ձևակերպենք հետևյալ

Թեորեմ 2. Եթե A մատրիցը հակադարձելի է, ապա գծային հանրահաշվական հավասարումների $Ax = b$ համակարգը ունի $x = A^{-1}b$ միակ լուծումը:

Օրինակ 24. Լուծել մատրիցային հավասարումը

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} :$$

Նշանակենք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} :$$

Կիրառելով հակադարձ մատրիցը գտնելու վերը նկարագրած ալգորիթմը, կստանանք

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}:$$

Համաձայն թեորեմ 2-ի

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}: \bullet$$

---

77. Գտնել մատրիցների հակադարձը

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, է) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

ը) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, թ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ժ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

78. Գտնել n-րդ կարգի մատրիցների հակադարձը

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} \end{pmatrix}$, ը) $\begin{pmatrix} a+1 & a & \cdots & a \\ a & a+1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+1 \end{pmatrix}$:

79. Լուծել գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, նախապես այն ներկայացնելով $Ax = b$ տեսքով

ա) $\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ -2x + y &= 0, \end{aligned}$ բ) $\begin{aligned} -x + y &= -4 \\ -2x + y &= 5, \end{aligned}$ գ) $\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -2x + y &= 0, \end{aligned}$

դ) $\begin{aligned} 3x+2y+2z &= 0 \\ 2x+2y+2z &= 5 \\ -4x+4y+3z &= 2, \end{aligned}$ ե) $\begin{aligned} 3x+2y+2z &= -1 \\ 2x+2y+2z &= 2 \\ -4x+4y+3z &= 0, \end{aligned}$ զ) $\begin{aligned} 3x+2y+2z &= 0 \\ 2x+2y+2z &= 0 \\ -4x+4y+3z &= 0: \end{aligned}$

80. Լուծել մատրիցային հավասարումը

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

բ) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

ե) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$:

81. Լուծել մատրիցային հավասարումների համակարգը

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},$

բ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

82. Գտնել x-ն այնպես, որ $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ մատրիցի հակադարձը հավասար լինի իրեն:

83. Գտնել այնպիսի x, որ $A = \begin{pmatrix} 4 & x \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ մատրիցը լինի ոչ հակադարձելի:

84. Գտնել A մատրիցը, եթե $(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

85. Ինչպե՞ս կփոխվի A մատրիցի հակադարձը, եթե

ա) տեղափոխենք i-րդ և j-րդ տողերը,

բ) i-րդ տողը բազմապատկենք $c \neq 0$ թվով,

գ) i-րդ տողին գումարենք $c \neq 0$ թվով բազմապատկած j-րդ տողը:

86. Ցույց տալ, որ եթե A-ն և B-ն հակադարձելի են, ապա AB -ն նույնպես հակադարձելի է և $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

87. Դիցուք A և B մատրիցները միևնույն կարգի հակադարձելի մատրիցներ են: Ապացուցել հետևյալ հավասարությունների համարժեքությունը՝

$$AB = BA,\ AB^{-1} = B^{-1}A,\ A^{-1}B = BA^{-1},\ A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1} :$$

88. Գտնել $(AB)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$, A^{-2}, $(2A)^{-1}$ մատրիցները, եթե տրված են՝

ա) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 6\end{pmatrix}$, $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

բ) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2\\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4 & \frac{5}{2}\\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$:

գ) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 5 & -3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$:

89. Դիցուք A, B, C, D-ն հակադարձելի մատրիցներ են: Ապացուցել, որ

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(A-BD^{-1}C)^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1}\\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{pmatrix}:$$

90. A և C մատրիցները հակադարձելի են: Հաշվել հետևյալ քառակուսի մատրիցների հակադարձները,

ա) $\begin{pmatrix}A & O\\ B & C\end{pmatrix}$, $\quad$ բ) $\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}$:

91. Ապացուցել, որ եթե A-ն հակադարձելի է, ապա

$$(A^{-1})^{-1}=A, (\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}, \forall\lambda\in R, \lambda\neq 0, (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

92. Ապացուցել, որ եթե $A^2=A$, ապա $E-2A=(E-2A)^{-1}$:

93. Ապացուցել, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն քառակուսի մատրիցներ են և $ABC=E$, ապա B-ն հակադարձելի է և $B^{-1}=CA$:

94. Ցույց տալ, որ եթե C-ն հակադարձելի է և $AC=BC$ կամ $CA=CB$, ապա $A=B$:

95. Ապացուցել, որ եթե A-ն հակադարձելի է և $AB=0$, ապա $B=0$:

96. Ապացուցել, որ եթե $A^2=A$, ապա կամ $A=E$, կամ A-ն ոչ հակադարձելի է:

97. Ի՞նչ պայմանների դեպքում է հակադարձելի

$$A\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

անկյունագծային մատրիցը: Գտնել հակադարձը:

98. Օգտվելով նախորդ խնդրից, գտնել մատրիցի հակադարձը

$$\text{ա)}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{բ)}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}:$$

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Ներմուծենք հետևյալ մատրիցը

```
In[1]:=  m = {{a, b}, {c, d}}

Out[1]=  {{a, b}, {c, d}}
```

և հաշվենք հակադարձը

```
In[2]:=  Inverse[ m ]

Out[2]=  {{d/(-b c + a d), -b/(-b c + a d)}, {-c/(-b c + a d), a/(-b c + a d)}}
```

Այստեղ ենթադրվում է, որ $ad - bc$ արտահայտությունը զրո չէ: Ստուգենք

```
In[3]:=  Inverse[m] . m

Out[3]=  {{-(b c)/(-b c + a d) + (a d)/(-b c + a d), 0},
          {0, -(b c)/(-b c + a d) + (a d)/(-b c + a d)}}
```

Որպեսզի տեսնենք, որ ստացվածը միավոր է, պատասխանը պարզեցնենք

```
In[4]:=  Simplify[Inverse[m] . m ]

Out[4]=  {{1, 0}, {0, 1}}
```

Ներմուծենք հետևյալ մատրիցը

In[5]:=
```
hb = Table[1/(i + j), {i, 4}, {j, 4}]
```

Out[5]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}, \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right\}\right\}$$

Հաշվենք հակադարձը

In[6]:=
```
invhb=Inverse[hb];
invhb//MatrixForm
```

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

Ստուգենք

In[8]:=
```
invhb . hb
```

Out[8]=
```
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

Այժմ դիտարկենք իրական թվեր պարունակող մատրից

In[9]:=
```
m = {{1.2, 5.7}, {4.2, 5.6}}
```

Out[9]=
```
{{1.2, 5.7}, {4.2, 5.6}}
```

Հաշվենք հակադարձը

In[10]:=
```
Inverse[ % ]
```

Out[10]=
```
{{-0.325203, 0.33101}, {0.243902, -0.0696864}}
```

Ստուգենք

```
In[11]:= % . m
Out[11]= {{1., -1.25442 ×10^-16}, {1.00831 ×10^-17, 1.}}
```

Ինչպես տեսնում ենք հակադարձ մատրիցը կառուցվել է սխալով, որը սակայն մեքենայական ճշտության սահմաններում է:

Կան քառակուսի մատրիցներ, որոնք հակադարձ չունեն

```
In[12]:= Inverse[ {{1., 2.}, {1., 2.}} ]
 — Inverse ::sing :
   Matrix {{1., 2.}, {1., 2.}} is singular . More...
Out[12]= Inverse [{{1., 2.}, {1., 2.}}]
```

Ոչ քառակուսի մատրիցի հակադարձը սահմանված չէ

$$In[13]:= \mathbf{Inverse}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

```
 — Inverse ::matsq :
   Argument {{1, 2, 2}, {3, 1, 4}} at position
     1 is not a nonempty square matrix . More...
Out[13]= Inverse [{{1, 2, 2}, {3, 1, 4}}]
```

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՂՈՐԴԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂՏՆԱԳՐՈՒՄ ԵՎ ԳԱՂՏՆԱԳՐԻ ՎԵՐԾԱՆՈՒՄ

Հաղորդագրությունը կարելի է գաղտնագրել հետևյալ եղանակով. այբուբենի (օրինակ հայերեն այբուբենի) յուրաքանչյուր տառին համապատասխանության մեջ են դնում որևէ թիվ: Պարզության համար տառերը կհամարակալենք հերթականությամբ: Գծիկով նշանակենք 0 թիվը

— -0	ա-1	բ-2	գ-3	դ-4	ե-5	զ-6	է-7	ը-8	թ-9
ժ-10	ի-11	լ-12	խ-13	ծ-14	կ-15	հ-16	ձ-17	ղ-18	ճ-19
մ-20	յ-21	ն-22	շ-23	ո-24	չ-25	պ-26	ջ-27	ռ-28	ս-29
վ-30	տ-31	ր-32	ց-33	ու-34	փ-35	ք-36	և-37	օ-38	ֆ-39

Տվյալ հաղորդագրության յուրաքանչյուր տառի փոխարեն գրում ենք դրան համապատասխանող թիվը, իսկ բառերի միջև դնում ենք զրո: Ստացված թվերի շարանը՝ x, բաժանում ենք n-յակների՝ անհրաժեշտության դեպքում վերջում ավելացնելով զրոներ: Առաջին n-յակը նշանակում ենք x_1-ով՝ $x_1 = (a_1, \cdots, a_n)$: x_1-ը կոդավորելու համար վերցնում ենք կամայական A հակադարձելի $(n \times n)$ կարգի մատրից և հաշվում $y_1 = x_1 A$: y_1-ը կլինի x_1-ի գաղտնագիրը: Նույնը կրկնելով բոլոր n-յակների համար, կստանանք վերջավոր թվային հաջորդականություն՝ y, որն էլ ամբողջ հաղորդագրության գաղտնագիրն է: y գաղտնագիրը ստացողը այն բաժանում է n-յակների և վերծանում: Օրինակ, y_1 n-յակը վերծանելու համար հարկավոր է հաշվել $y_1 A^{-1} = x_1$ արտահայտությունը և յուրաքանչյուր թվի փոխարեն տեղադրել համապատասխան տառը: Այսպիսով, վերծանման համար հարկավոր է իմանալ ոչ միայն A մատրիցը (և ուրեմն նրա հակադարձը), այլև յուրաքանչյուր թվին համապատասխանող տառը:

Օրինակ 25. "Թշնամին մոտենում է" հաղորդագրությունը գաղտնագրել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

մատրիցի օգնությամբ:

Տրված հաղորդագրությանը համապատասխանում է եռյակների հետևյալ շարանը

$$(9,23,22),(1,20,11),(22,0,20),(24,31,5),(22,34,20),(0,7,0):$$

Կազմենք հետևյալ մատրիցը

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 22 \\ 1 & 20 & 11 \\ 22 & 0 & 20 \\ 24 & 31 & 5 \\ 22 & 34 & 20 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}:$$

Հաշվենք BA արտադրյալը

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & -17 & -1 \\ -8 & 7 & 18 \\ 42 & -64 & -36 \\ -2 & -22 & 121 \\ 8 & -30 & 66 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}:$$

Գաղտնագիրն է

$(8, -17, -1, -8, 7, 18, 42, -64, -36, -2, -22, 121, 8, -30, 66, -7, 7, 21)$

Վերծանենք գաղտնագիրը: Ունենք

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Գաղնագիրը բաժանենք եռյակների և կազմենք

$$C = \begin{pmatrix} 8 & -17 & -1 \\ -8 & 7 & 18 \\ 42 & -64 & -36 \\ -2 & -22 & 121 \\ 8 & -30 & 66 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Հաշվենք CA^{-1} արտադրյալը

$$CA^{-1} = B = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 22 \\ 1 & 20 & 11 \\ 22 & 0 & 20 \\ 24 & 31 & 5 \\ 22 & 34 & 20 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ստացանք հաղորդագրության սկզբնական կոդը՝ B-ն: Յուրաքանչյուր թվի փոխարեն տեղադրելով համապատասխան տառը, կարդում ենք հաղորդագրությունը: ●

99. Օգտագործելով

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

մատրիցը գաղտնագրել "Զգուշացեք ավտոմեքենայից" հաղորդագրությունը:

100. Օգտագործելով

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցը գաղտնագրել "Մեզ մոտ չեն ծխում" հաղորդագրությունը:

101. Իմանալով, որ հաղորդագրությունը ծածկագրվել է 99 վարժության A մատրիցով՝ վերծանել հետևյալ ծածկագիրը

$(-195, 62, 99, -174, 43, 98, 41, -5, -36, -155, 61, 63, 14, -14, -5, -91, 8, 61, -44, 21, 12, 33, -33, 0)$:

102. Իմանալով, որ հաղորդագրությունը ծածկագրվել է 100 վարժության A մատրիցով վերծանել հետևյալ ծածկագիրը

$(35, 65, 6, 12, 92, 160, 31, 62, 40, 75, 22, 44, 53, 93, 94, 168)$:

4. ՄԱՏՐԻՑԻ ՈՐՈՇԻՉ

Մատրիցի որոշիչը սահմանենք ինդուկցիայի եղանակով: Դիցուք $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$: Երբ $n = 1$, որպես *մատրիցի որոշիչ* սահմանենք a_{11} թիվը, երբ $n = 2$՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

թիվը:

$\overline{M}_j^i$-ով նշանակենք $(n-1) \times (n-1)$ կարգի այն մատրիցի որոշիչը, որը ստացվում է A մատրիցից i-րդ տողը և j-րդ սյունը հանելուց: $\overline{M}_j^i$ թիվն անվանում են a_{ij} *տարրի մինոր*, իսկ $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$ թիվը՝ a_{ij} *տարրի հանրահաշվական լրացում*:

Որպես $(n \times n)$ կարգի $(n > 2)$ A մատրիցի որոշիչ սահմանենք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A = \sum_{j=1}^{n} A_{1j} a_{1j}$$

թիվը: A մատրիցի որոշիչը նշանակում են նաև $\Delta(A), |A|$ սիմվոլներով:

Օրինակ 26. Հաշվել A մատրիցի որոշիչը

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

$\overline{M}_1^1$ մինորը գտնելու համար պետք է հանել A մատրիցի առաջին տողն ու սյունը և հաշվել ստացված մատրիցի որոշիչը

$$\overline{M}_1^1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = -1:$$

$\overline{M}_2^1$ մինորը գտնելու համար հարկավոր է հանել առաջին տողն ու երկրորդ սյունը

$$\overline{M}_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5:$$

Նույն եղանակով, կստանանք՝

$$\overline{M}_3^1 = 4, \quad A_{11} = -1, \quad A_{12} = 5, \quad A_{13} = 4:$$

Համաձայն որոշիչի սահմանման

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 14: \bullet$$

Թեորեմ 3. $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի որոշիչի համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{ij}, \; i = \overline{2, n}, \tag{5}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}a_{ij}, \ j = \overline{1,n} : \qquad (6)$$

(5) և (6) բանաձևերն անվանում են որոշիչի վերլուծություն համապատասխանաբար ըստ i-րդ տողի և ըստ j-րդ սյան:

Օրինակ 27. Հաշվենք նախորդ օրինակի որոշիչը վերլուծելով այն ըստ երկրորդ տողի

$$\overline{M}_1^2 = 2, \quad \overline{M}_2^2 = -4, \quad \overline{M}_3^2 = -8,$$

$$A_{21} = -2, \quad A_{22} = -4, \quad A_{23} = 8,$$

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 8 = 14 :$$

Նույն որոշիչը հաշվենք վերլուծելով այն ըստ առաջին սյան

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 14 : \bullet$$

Որոշիչի վերլուծությունն ավելի հարմար է կատարել այն տողով կամ սյունով, որն ավելի շատ զրոներ է պարունակում:

Օրինակ 28. Հաշվել հետևյալ մատրիցի որոշիչը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} :$$

Վերլուծենք ամենաշատ զրոներ պարունակող երրորդ սյունով

$$\det A = 3A_{13} + 0A_{23} + 0A_{33} + 0A_{43} = 3A_{13} :$$

Հաշվենք A_{13}-ը:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} :$$

Ստացված որոշիչը վերլուծենք ըստ երկրորդ տողի

$$A_{13} = 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 13 : \bullet$$

Առանձնապես հեշտ է հաշվել եռանկյունաձև մատրիցների որոշիչնե-րը:

Օրինակ 29. Հաշվել հետևյալ $(n \times n)$ կարգի մատրիցի որոշիչը

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}:$$

Որոշիչը վերլուծենք ըստ առաջին տողի

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}a_{1j} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Կրկնելով վերլուծությունները ըստ առաջին տողի, կստանանք

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}:$$

Նույն պատասխանը կստացվի, եթե հաշվենք վերին եռանկյունաձև մատ-րիցի որոշիչը:•

Օրինակ 30. Նույն եղանակով կարելի է հաշվել երկրորդական ան-կյունագծի նկատմամբ եռանկյունաձև հետևյալ $(n \times n)$ կարգի մատրիցի որոշիչը

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}:$$

Որոշիչը վերլուծենք ըստ առաջին տողի

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (1)^{1+j} a_{1j}\overline{M}_j^1 = (-1)^{1+n} a_{1n}\overline{M}_n^1:$$

Կրկնելով վերլուծությունները ըստ առաջին տողի, կստանանք

$$\det(A) = (-1)^{1+n+n+n-1+n-2+\cdots+2} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} :$$

Հետևաբար

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} : \bullet$$

---

103. Հաշվել որոշիչները

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, է) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$:

104. Գտնել λ-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար $detA = 0$

ա) $A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$:

105. Հաշվել A մատրիցի երկրորդ սյան տարրերի մինորները և հանրահաշվական լրացումները: Հաշվել A մատրիցի որոշիչը՝ վերլուծելով այն ըստ երկրորդ սյան

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & 3 \\ 5 & b & 8 & 1 \\ 1 & c & -1 & -1 \\ 2 & d & 7 & 2 \end{pmatrix} :$$

106. Որոշիչները վերլուծել ըստ տառերից կազմված տողերի կամ սյուների

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$:

107. Հաշվել որոշիչները

ա) $\begin{vmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$:

5. ՄԱՏՐԻՑԻ ՈՐՈՇԻՉԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ: ՄԱՏՐԻՑԻ ՈՐՈՇԻՉԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 4.(*Որոշիչի գծային հատկությունը*) Ցանկացած $\lambda, \mu \in R$ թվերի համար՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda b_{k1} + \mu c_{k1} & \lambda b_{k2} + \mu c_{k2} & \cdots & \lambda b_{kn} + \mu c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Թեորեմ 5. Դիցուք A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են: Եթե B մատրիցը ստացվել է A մատրիցից երկու ցանկացած տողերի (սյուների) տեղափոխությամբ, ապա

$$\det B = -\det A,$$

Հետևանք 1. Դիցուք A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են: Եթե B մատրիցը ստացվել է A մատրիցից նրա որևէ տողը (սյունը) զրոյից տարբեր c թվով բազմապատկելով, ապա

$$\det B = c \det A,$$

Հետեւանք 2. Դիցուք A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են: Եթե B մատրիցը ստացվել է A մատրիցից նրա որևէ տողին (սյանը) մեկ այլ տողի (սյան) բազմապատիկը ավելացնելով, ապա

$$\det B = \det A :$$

Հետեւանք 3. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի որոշիչ է: Եթե տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը, ապա $\det A = 0$.

ա) A մատրիցի որևէ տող (սյուն) բաղկացած է միայն զրոներից,

բ) A մատրիցն ունի երկու նույն տողը (սյունը),

գ) A մատրիցի որևէ տող (սյուն) մեկ այլ տողի (սյան) բազմապատիկն է:

Հետեւանք 4. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, իսկ $c = const$, ապա

$$\det(cA) = c^n \det A :$$

Թեորեմ 6. 4. Եթե $k \neq i$, ապա

$$\sum_{s=1}^{n} A_{is} a_{ks} = 0 :$$

Օրինակ 31. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} :$$

Առաջին սյունից հանենք վերջինի եռապատիկը

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} :$$

Որոշիչը վերլուծենք ըստ առաջին սյան

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} :$$

Երկրորդ սյունից հանենք առաջինի կրկնապատիկը

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix} :$$

Վերլուծենք ըստ առաջին տողի

$$\Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8(500 - 400) = 800 : \bullet$$

Օրինակ 32. Հաշվել *Վանդերմոնդի որոշիչը*

$$detW = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

որտեղ $a_i \neq a_j$, երբ $i \neq j$:

Բոլոր տողերից, սկսած վերջինից, հանենք նախորդը՝ բազմապատկած a_1-ով

$$detW = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2 & (a_3 - a_1)a_3 & \cdots & (a_n - a_1)a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & (a_3 - a_1)a_3^{n-2} & \cdots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} :$$

Վերլուծենք ստացված որոշիչը ըստ առաջին տողի

$$detW = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} :$$

Ստացանք ավելի ցածր կարգի Վանդերմոնդի որոշիչ: Նույնը կրկնելով $(n-2)$ անգամ, կստանանք

$$detW = [(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)]\times$$

$$\times[(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\cdots(a_n - a_2)]\times$$
$$\times\cdots[(a_n - a_{n-1})],$$

կամ, որ նույնն է,

$$detW = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j):$$

Քանի որ ըստ պայմանի, մատրիցի տարրերը իրարից տարբեր են, ապա $detW \neq 0:$ •

Օրինակ 33. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}:$$

Առաջին տողը գումարենք մնացած բոլոր տողերին

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}:$$

Հետևաբար՝ $\Delta = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!$:

Օրինակ 34. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a+x \\ a & a & \cdots & a+x & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}:$$

Վերջին սյանը գումարենք մնացած բոլոր սյուները

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & na+x \\ a & a & \cdots & a+x & na+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x & a & \cdots & a & na+x \end{vmatrix} =$$

$$= (na+x)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 1 \\ a & a & \cdots & a+x & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}:$$

Բոլոր սյուներից, բացի վերջինից, հանենք a-ով բազմապատկած վերջինը

$$\Delta = (na+x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & 1 \\ x & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}:$$

Հետևաբար՝ $\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(na+x)x^{n-1}$:

Որոշիչ հաշվելու նկարագրված եղանակն անվանում են ***եռանկյունաձև տեսքի բերելու եղանակ:***

Օրինակ 35. Հաշվել n-րդ կարգի որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}:$$

Որոշիչը վերլուծենք ըստ առաջին սյան

$$\Delta_n = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}:$$

Հետևաբար՝

$$\Delta = a^n + (-1)^{n+1}b^n : \bullet$$

Օրինակ 36. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}:$$

Որոշիչն արտագրենք հետևյալ տեսքով

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a_1 & 0+a_2 & 0+a_3 & \cdots & 0+a_n \\ 0+a_1 & x+a_2 & 0+a_3 & \cdots & 0+a_n \\ 0+a_1 & 0+a_2 & x+a_3 & \cdots & 0+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a_1 & 0+a_2 & 0+a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} :$$

Օգտվելով որոշիչի հատկություններից, կստանանք՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i,$$

որտեղ

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & a_i & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & a_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i & \cdots & x \end{vmatrix} :$$

Δ_i որոշիչը հաշվելու համար վերլուծենք այն ըստ վերջին սյան: Կրկնենք վերլուծություններն ըստ վերջին սյան, մինչև հասնենք $(i \times i)$ կարգի եռանկյունաձև տեսքի մատրիցի որոշիչին, որի վերջին սյունը կազմված է a_i տարրերից: Հետևաբար՝

$$\Delta_i = x^{n-i} \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & a_i \\ 0 & x & \cdots & a_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} = x^{n-i} x^{i-1} a_i = x^{n-1} a_i :$$

Արդյունքում՝

$$\Delta = x^n + \sum_{i=1}^{n} x^{n-1} a_i = x^{n-1}(x + a_1 + \cdots + a_n) : \bullet$$

Թեորեմ 7. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա

$$detA = detA^T :$$

Թեորեմ 8. Դիցուք A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են, ապա

$$det(AB) = detA \det B :$$

Օրինակ 37. Հաշվել AB արտադրյալի որոշիչը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} :$$

Հաշվենք A և B մատրիցների որոշիչները

$$|A| = -7 \qquad |B| = 11 :$$

Հետևաբար

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -77 : \bullet$$

Թեորեմ 9. Եթե A մատրիցն ունի հակադարձ, ապա

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} :$$

Օրինակ 38. Գտնել $|A^{-1}|$-ը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$|A| = 4, \ |A^{-1}| = \frac{1}{4} : \bullet$$

---

108. Հայտնի է, որ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$: Գտնել

ա) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$, **բ)** $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$:

109. Առանց որոշիչները հաշվելու ցույց տալ, որ

ա) $$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

բ) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

գ) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

դ) $$\begin{vmatrix} a_1+tb_1 & a_2+tb_2 & a_3+tb_3 \\ ta_1+b_1 & ta_2+b_2 & ta_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} :$$

110. Հաշվել որոշիչները

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$:

111. Լուծել հավասարումները՝ չհաշվելով որոշիչները

ա) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$, որտեղ $a_i \neq a_j$, $i \neq j$; $i, j = \overline{1, n}$,

բ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0,$

գ) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} = 0$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$; $i, j = \overline{1, n-1}$:

112. Հաշվել որոշիչները՝ բերելով եռանկյունաձև տեսքի

ա) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$,

դ) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, ե) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$:

113. Հաշվել որոշիչները՝ բերելով եռանկյունաձև տեսքի: Եթե մատրիցի կարգը չի երևում, ապա այն ենթադրվում է $(n \times n)$ կարգի

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 6 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2n \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ -1 & 0 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ -1 & -3 & 0 & \cdots & 2n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -3 & -5 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & x & 1 \\ x & x & \cdots & x & 2 & x \\ x & x & \cdots & 3 & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & n & \cdots & x & x & x \\ x & x & \cdots & x & x & x \end{vmatrix}$,

թ) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$, ժ) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$,

ի) հաշվել այն մատրիցի որոշիչը, որի տարրերը որոշվում են $a_{ij} = min(i,j)$ բանաձևով:

լ) հաշվել այն մատրիցի որոշիչը, որի տարրերը որոշվում են $a_{ij} = max(i,j)$ բանաձևով:

խ) հաշվել այն մատրիցի որոշիչը, որի տարրերը որոշվում են $a_{ij} = |i-j|$ բանաձևով:

114. Ապացուցել, որ կենտ կարգի շեղսիմետրիկ մատրիցի որոշիչը հավասար է զրոյի:

115.Ինչպես՞ կփոխվի n-րդ կարգի մատրիցի որոշիչը, եթե

ա) նրա առաջին սյունը տեղափոխենք վերջ,

բ) տողերը գրենք հակառակ հերթականությամբ:

116. Ինչպես՞ կփոխվի մատրիցի որոշիչը, եթե

ա) յուրաքանչյուր սյանը, սկսած երկրորդից, ավելացնենք նախորդ սյունը, բ) յուրաքանչյուր սյանը, սկսած երկրորդից, ավելացնենք բոլոր նախորդ սյուները, գ) յուրաքանչյուր տողից, բացի վերջինից, հանենք հաջորդ տողը, իսկ վերջին տողից հանենք սկզբնական առաջին տողը,

դ) յուրաքանչյուր սյանը, սկսած երկրորդից, ավելացնենք նախորդը, իսկ առաջին սյանը ավելացնենք սկզբնական վերջին սյունը:

6. ՄԱՏՐԻՑԻ ՈՐՈՇԻՉԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆ ԱՆՄԻՋԱԿԱՆՈՐԵՆ ԻՐ ՏԱՐՐԵՐՈՎ

Առաջին n բնական թվերի *տեղափոխություն* ասելով, կհասկանանք այդ թվերի $(p_1, \cdots, p_n)$ շարանը, որտեղ $p_i \neq p_j$, $i \neq j$: $\mathcal{P}(n)$-ով նշանակենք առաջին n բնական թվերի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունների բազմությունը: $\mathcal{P}(n)$ բազմության տարրերի քանակը $n!$ է (ապացուցել): Կասենք, որ $(p_1, \cdots, p_n)$ տեղափոխության $\{p_k, p_m\}$ զույգը ունի *կարգի խախտում*, եթե $p_k > p_m$ և $k < m$: $(p_1, \cdots, p_n)$ տեղափոխության բոլոր հնարավոր կարգախախտումների քանակը նշանակենք $N(p_1, \cdots, p_n)$-ով: Տեղափոխությունն անվանում են *զույգ* (*կենտ*), եթե նրա կարգախախտումների քանակը զույգ (կենտ) է:

Օրինակ 39. Հաշվել կարգախախտումների քանակը $(2, 5, 1, 4, 3)$ տեղափոխությունում:

Կարգախախտումներ ունեն հետևյալ զույգերը

$$(2, 1),\ (5, 1),\ (5, 4),\ (5, 3),\ (4, 3):$$

Հետևաբար $N(2, 5, 1, 4, 3) = 1 + 3 + 0 + 1 = 5$:●

Թեորեմ 10. $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ մատրիցի որոշիչի համար ճիշտ են հետևյալ բանաձևերը

$$\det A = \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1, \cdots, p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \tag{7}$$

և

$$\det A = \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1, \cdots, p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}: \tag{8}$$

Օրինակ 40. Հաշվել

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}:$$

$\mathcal{P}(3)$ բազմությունը բաղկացած է վեց տարրից

$$\mathcal{P}(3) = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\},$$

ընդ որում

$$N(1,2,3) = 0,\ N(1,3,2) = 1,\ N(2,1,3) = 1,$$

$$N(2,3,1) = 2,\ N(3,1,2) = 2,\ N(3,2,1) = 3 :$$

Այստեղից

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} : \bullet$$

Օրինակ 41. Դիցուք $a_{ij} \in C^1[a,b], \quad i,j = \overline{1,n}$: Հաշվել

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

մատրիցի որոշիչի ածանցյալը:

Օգտվելով (8) բանաձևից կարող ենք գրել

$$det A = \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1,\cdots,p_n)} a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x) :$$

Ըստ արտադրյալի ածանցման բանաձևի

$$(det A)' = \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1,\cdots,p_n)} a'_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1,\cdots,p_n)} a_{1p_1}(x)a'_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x) +$$

$$\cdots + \sum_{\mathcal{P}(n)} (-1)^{N(p_1,\cdots,p_n)} a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a'_{np_n}(x),$$

այսինքն՝

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\
a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)
\end{vmatrix}' =
\begin{vmatrix}
a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\
a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)
\end{vmatrix} +
$$

$$
\begin{vmatrix}
a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\
a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)
\end{vmatrix} + \cdots +
\begin{vmatrix}
a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\
a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x)
\end{vmatrix}:
$$

●

---

117. Տրված տեղափոխություններում հաշվել կարգախախտումների քանակը

ա) $(2,3,5,4,1)$, բ) $(6,3,1,2,5,4)$,

գ) $(1,9,6,3,2,5,4,7,8)$, դ) $(7,5,6,4,1,3,2)$,

ե) $(1,3,5,7,\cdots,2n-1,2,4,6,8,\cdots,2n)$,

զ) $(2,4,6,\cdots,2n,1,3,5,\cdots,2n-1)$:

118. Պարզել, թե արտադրյալներից որո՞նք են (7) կամ (8) վերլուծությունների անդամներ և ի՞նչ նշանով

ա) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$, բ) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$,

գ) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$, դ) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$:

119. i,k-ի ինչպիսի՞ արժեքների համար $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ արտադրյալը (7) կամ (8) վերլուծություններում կմասնակցի բացասական նշանով:

120. i,k-ի ինչպիսի՞ արժեքների համար $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ արտադրյալը (7) կամ (8) վերլուծություններում կմասնակցի դրական նշանով:

121. i,j,k-ի ինչպիսի՞ արժեքների համար հետևյալ արտադրյալները (7) կամ (8) վերլուծություններում կմասնակցեն դրական նշանով

ա) $a_{4i}a_{51}a_{2j}a_{63}a_{1k}a_{35}$, բ) $a_{32}a_{5i}a_{71}a_{85}a_{4j}a_{18}a_{63}a_{2k}$:

122. (7) կամ (8) վերլուծություններում ինչպիսի՞ նշանով է մասնակցում գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի արտադրյալը:

123. (7) կամ (8) վերլուծություններում ինչպիսի՞ նշանով է մասնակցում երկրորդական անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի արտադրյալը:

124. Քանի՞ զրոյից տարբեր անդամներ ունեն (7) կամ (8) վերլուծությունները, եթե ա) $a_{11} = 0$, իսկ մյուս տարրերը զրո չեն,

բ) $a_{ij} = 0$, իսկ մյուս տարրերը զրո չեն,

գ) $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1k} = 0,\ k < n$, իսկ մյուս տարրերը զրո չեն:

7. ՄԱՏՐԻՑԻ ՈՐՈՇԻՉԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

ԼԱՊԼԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, k-ն n-ից փոքր որևէ բնական թիվ է, իսկ $i_1, i_2, \cdots, i_k$ և $j_1, j_2, \cdots, j_k$ բնական թվերը բավարարում են $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$ պայմաններին:

Նշանակենք $M^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k}$-ով այն $(k \times k)$ կարգի մատրիցի որոշիչը, որը ստացվում է A մատրիցի $i_1, i_2, \cdots, i_k$ տողերի և $j_1, j_2, \cdots, j_k$ սյուների հատումից:

Նշանակենք $\overline{M}^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k}$-ով այն $(n-k) \times (n-k)$ կարգի մատրիցի որոշիչը, որը ստացվում է A մատրիցի $i_1, i_2, \cdots, i_k$ տողերը և $j_1, j_2, \cdots, j_k$ սյուները հանելուց :

Թեորեմ 11. ***(Լապլաս)*** Կամայական n-ից փոքր k բնական թվի և $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ պայմաններին բավարարող բնական թվերի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը

$$\Delta(A) = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_k)} (-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} M^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k}, \qquad (9)$$

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n :$$

(9) բանաձևն անվանում են որոշիչի վերլուծություն ըստ $i_1, i_2, \cdots, i_k$ տողերի: Նկատենք, որ (5)-ը (9)-ի մասնավոր դեպքն է: Նմանապես ձևակերպվում է որոշիչի վերլուծությունն ըստ $j_1, j_2, \cdots, j_k$ սյուների, որը կլինի (6)-ի ընդհանրացումը:

Օրինակ 42. Հաշվել որոշիչը

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} :$$

Վերլուծենք ըստ առաջին և երրորդ տողերի՝ $k = 2, i_1 = 1, i_2 = 3$: Գումարումը կատարվում է հետևյալ զույգերով՝ $(j_1 = 1, j_2 = 2)$, $(j_1 = 1, j_2 = 3)$, $(j_1 = 1, j_2 = 4)$, $(j_1 = 2, j_2 = 3)$, $(j_1 = 2, j_2 = 4)$, $(j_1 = 3, j_2 = 4)$: Նկատենք, որ առաջին, երկրորդ, երրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ զույգերին համապատասխանող M_{13}^{14}, M_{13}^{13}, M_{14}^{13}, M_{24}^{13}, M_{34}^{13} մինորները հավասար են զրոյի և (8)-ում զրոյից տարբեր է միայն մեկ գումարելի

$$\Delta = (-1)^{1+3+2+3} M_{23}^{13} \overline{M}_{23}^{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 : \bullet$$

---

125. Հաշվել որոշիչները՝ օգտվելով Լապլասի թեորեմից

ա) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, գ) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

դ) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, ե) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, թ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$:

126. Հաշվել որոշիչները՝ օգտվելով Լապլասի թեորեմից

$$\text{ա)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \text{բ)} \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\text{գ)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{դ)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} :$$

127. Դիցուք A, B, C, O-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են: Հետևյալ որոշիչներն արտահայտել A, B, C մատրիցների որոշիչներով

$$\text{ա)} \begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}, \quad \text{բ)} \begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \text{գ)} \begin{vmatrix} O & A \\ C & B \end{vmatrix}, \quad \text{դ)} \begin{vmatrix} B & A \\ C & O \end{vmatrix}:$$

ՈՐՈՇԻՉՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

Դիցուք A-ն և B-ն $(n \times n)$ կարգի մատրիցներ են, ապա

$$det(AB) = det(BA) = detA \cdot detB :$$

Քանի որ մատրիցի տրանսպոնացումից որոշիչը չի փոխվում, ապա որոշ դեպքերում նշված հատկությունը հարմար է օգտագործել հետևյալ կերպ

$$det(AB) = det(A^TB) = det(AB^T) = det(A^TB^T) =$$

$$= det(BA) = det(B^TA) = det(BA^T) = det(B^TA^T) : \qquad (10)$$

Օրինակ 43. Հաշվել A մատրիցի որոշիչը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} :$$

Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ մատրիցը

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Հաշվենք AB արտադրյալը

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$24 = det(AB) = detA \cdot detB = detA : \bullet$$

Օրինակ 44. Հաշվել A մատրիցի որոշիչի բացարձակ արժեքը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

Նկատենք, որ

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} :$$

Այստեղից

$$256 = det(A^2) = det(AA) = detA \cdot detA :$$

Հետևաբար

$$|detA| = \sqrt{det(A^2)} = 16 : \bullet$$

128. Հաշվել A մատրիցի որոշիչը՝ օգտագործելով B օժանդակ մատրիցը

ա) $$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

բ) $$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}:$$

129. Հաշվել A մատրիցի որոշիչը

ա) $$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{pmatrix},$$

բ) $$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix},$$

գ) $$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cdots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \cdots & \cos(\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

դ) $$A = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sin(2\alpha_n) \end{pmatrix},$$

ե) $$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{pmatrix},$$

գ) $A = \begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix}$, .

ե) $A = \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & (n+1)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$,

ը) $A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$, որտեղ $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$,

թ) $A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}$, որտեղ $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$:

ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ԱՆՋԱՏՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ

Օրինակ 45. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+a & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+a \end{vmatrix} : \qquad (11)$$

Նկատենք, որ Δ-ն x-ի նկատմամբ $(n-1)$-րդ կարգի բազմանդամ է և գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալը պարունակում է բազմանդամի ավագ անդամը՝ x^{n-1}: Մյուս կողմից, x փոփոխականի $2-a, 3-a, \cdots, n-a$ արժեքների դեպքում որոշիչը հավասար է զրոյի: Դա նշանակում է, որ որոշիչն առանց մնացորդի բաժանվում է

$$x+a-2,\ x+a-3,\ x+a-n$$

փոխադարձաբար պարզ արտադրիչների վրա: Այդ պատճառով՝

$$\Delta = c(x+a-2)(x+a-3)\cdots(x+a-n), \ c = const : \qquad (12)$$

(12) բազմանդամի cx^{n-1} ավագ անդամը համեմատելով (11)-ից ստացվող x^{n-1} անդամի հետ կստանանք՝ $c = 1$: •

Օրինակ 46. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} : \qquad (13)$$

Նկատենք, որ առաջին սյան բոլոր տարրերը, նշանի ճշտությամբ, կհավասարվեն.

$(x-a-b-c)$-ին, եթե առաջին սյանը գումարենք մնացած բոլոր սյուները,

$(x+a-b+c)$-ին, եթե առաջին սյունից հանենք երկրորդը, գումարենք երրորդը և հանենք չորրորդը,

$(x-a+b+c)$-ին, եթե առաջին սյանը գումարենք երկրորդը և հանենք երրորդ ու չորրորդ սյուները,

$(x+a+b-c)$-ին, եթե առաջին սյունից հանենք երկրորդ ու երրորդ սյուները և գումարենք չորրորդը:

Սա նշանակում է, որ որոշիչը կբաժանվի

$$(x-a-b-c), \quad (x+a-b+c) \quad ,(x-a+b+c), \quad (x+a+b-c)$$

արտահայտություններից յուրաքանչյուրի վրա:

Քանի որ Δ-ն x-ի նկատմամբ չորրորդ կարգի բազմանդամ է, կստանանք՝ $(d = const)$

$$\Delta = d(x-a-b-c)(x+a-b+c)(x-a+b+c)(x+a+b-c) : \ (14)$$

d հաստատունի արժեքը որոշելու համար, համեմատենք (13) և (14) բազմանդամների ավագ անդամները, կստանանք $c = 1$: •

130. Որոշիչները հաշվել արտադրիչների առանձնացման եղանակով

ա) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x^2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15-x^2 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n+1-x \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+b & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+b \end{vmatrix}$:

ԱՆԴՐԱԴԱՐՁ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿԸ

Օրինակ 47. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}:$$

Որոշիչը վերլուծենք ըստ վերջին տողի

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+2} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2n+2} x \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} :$$

Առաջին որոշիչը հավասար է գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալին, իսկ երկրորդը՝ Δ_n-ն է: Ստացանք հետևյալ անդրադարձ բանաձևը

$$\Delta_{n+1} = a_n + x\Delta_n :$$

Հաշվենք $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ որոշիչները

$$\Delta_1 = a_0, \ \Delta_2 = a_0 x + a_1, \ \Delta_3 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 :$$

Այստեղից կարելի է կռահել Δ_{n+1}-ի տեսքը

$$\Delta_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n :$$

Ստացված բանաձևը ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով: $n = 0$ դեպքում բանաձևը ճիշտ է: Ենթադրենք բանաձևը ճիշտ է $n = k$-ի համար և դրանից օգտվելով ցույց տանք, որ բանաձևը ճիշտ է $n = k + 1$-ի համար: Քանի որ ըստ ստացված բանաձևի

$$\Delta_{k+2} = a_{k+1} + x\Delta_{k+1},$$

ապա

$$\Delta_{k+2} = a_{k+1} + x(a_0 x^k + \cdots + a_k) = a_0 x^{k+1} + \cdots + x a_k + a_{k+1} : \bullet$$

Օրինակ 48. Հաշվել որոշիչը

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} :$$

Որոշիչի a_n տարրը գրենք $a_n = x + (a_n - x)$ տեսքով և Δ_n-ը ներկայացնենք որպես երկու որոշիչների գումար

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & \cdots & x & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix} :$$

Առաջին որոշիչում բոլոր սյուներից հանենք վերջինը, իսկ երկրորդ որոշիչը վերլուծենք ըստ վերջին սյան: Կստանանք հետևյալ անդրադարձ բանաձևը

$$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + (a_n - x)\Delta_{n-1} :$$

Այստեղից կարելի է Δ_{n-1}-ը արտահայտել Δ_{n-2}-ով, Δ_{n-2}-ը՝ արտահայտել Δ_{n-3}-ով և, այդպես շարունակ, մինչև $\Delta_1 = a_1$: Կստանանք

$$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) +$$

$$+ x(a_1 - x) \cdots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + \cdots +$$

$$+ x(a_2 - x) \cdots (a_n - x) + (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x) =$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x} \right) : \bullet$$

Օրինակ 49. Հաշվել n-րդ կարգի որոշիչը

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} :$$

Որոշիչը վերլուծելով ըստ առաջին տողի կստանանք հետյալ անդրադարձ բանաձևը

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2} :$$

Լուծենք $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ քառակուսի հավասարումը և գտնենք $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ արմատները: Ունենք

$$\begin{cases} \Delta_n - 2\Delta_{n-1} = 3(\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}) \\ \Delta_n - 3\Delta_{n-1} = 2(\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}) \end{cases}$$

Նշանակենք

$$a_n = \Delta_n - 2\Delta_{n-1}, \qquad b_n = \Delta_n - 3\Delta_{n-1},$$

որտեղից

$$a_n = 3a_{n-1} = 3^{n-2}a_2 = \Delta_2 - 2\Delta_1 = 19 - 2\cdot 5 = 9 = \Delta_n - 2\Delta_{n-1},$$

$$b_n = 2b_{n-1} = 2^{n-2}b_2 = \Delta_2 - 3\Delta_1 = 19 - 3\cdot 5 = 4 = \Delta_n - 3\Delta_{n-1} :$$

Լուծելով ստացված համակարգը, կստանանք

$$\Delta_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} : \bullet$$

131. Որոշիչները հաշվել անդրադարձ առնչությունների եղանակով

ա) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y & x \end{vmatrix}$,

ե) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x_0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, զ) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$,

է) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$, ը) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$,

թ) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$, ժ) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 8 \end{vmatrix}$:

132. Դիցուք $A = (a_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$: Ցույց տալ, որ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \Delta(A) + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} :$$

133. Հաշվել որոշիչները, օգտվելով նախորդ խնդրից

ա) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}$, բ) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_1+x & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1+x \end{vmatrix}$, դ) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+x & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$:

134. Հաշվել որոշիչները, օգտվելով Վանդերմոնդի որոշիչից

ա) $\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$,

բ) $\begin{vmatrix} \sin^n\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_1\cos\varphi_1 & \cdots & \cos^n\varphi_1 \\ \sin^n\varphi_2 & \sin^{n-1}\varphi_2\cos\varphi_2 & \cdots & \cos^n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin^n\varphi_{n+1} & \sin^{n-1}\varphi_{n+1}\cos\varphi_{n+1} & \cdots & \cos^n\varphi_{n+1} \end{vmatrix}$,

գ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$:

135. Հաշվել որոշիչները

ա) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$,

p) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$,

q) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$, η) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$, q) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

t) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, n) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$,

p) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$, լ) $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ y & 0 & x & \cdots & x \\ y & y & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, խ) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$,

ծ) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$,

կ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$,

հ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$,

ձ) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, ղ) $\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ y & a & x & \cdots & x \\ y & y & a & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a \end{vmatrix}$,

ճ) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$,

შ) $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ y & a_2 & x & \cdots & x \\ y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

ჩ) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

ც) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix},$$

ძ) $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix},$$

წ) $$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+1 \end{vmatrix},$$

ჭ) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \cdots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

պ) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, ջ) $\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \cdots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$,

ռ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$, ս) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$,:

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆ

Թեորեմ 12. Որպեսզի $(n \times n)$ կարգի A մատրիցն ունենա հակադարձ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $det A \neq 0$: Ընդ որում

$$A^{-1} = \frac{1}{det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} : \qquad (15).$$

Օրինակ 50. Հաշվել A մատրիցի հակադարձը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Ունենք $det A = -21 \neq 0$: Հաշվենք A մատրիցի տարրերի հանրահաշվական լրացումները

$$A_{11} = 2,\ A_{12} = -7,\ A_{13} = -3,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = -7,\ A_{23} = 6,$$

$$A_{31} = -5,\ A_{32} = 7,\ A_{33} = -3 :$$

Ըստ (15)-ի

$$A^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -7 & -7 & 7 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 51. Լուծել մատրիցային հավասարումը

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} : \qquad (16)$$

Նշանակենք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} :$$

$detA \neq 0$: Հետևաբար՝ գոյություն ունի նրա հակադարձը

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} :$$

(16) հավասարման աջ և ձախ մասերը ձախից բազմապատկենք A^{-1}-ով

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} : \bullet$$

Թեորեմ 13.(*Կրամեր*) Եթե $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի համար $\det(A) \neq 0$, ապա $Ax = b$ համակարգն ունի միակ լուծում, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով (*Կրամերի բանաձև*)

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}, \; i = \overline{1, n},$$

որտեղ A_i-ն ստացվում է A մատրիցից՝ նրա i-րդ սյունը փոխարինելով b սյունով:

Օրինակ 52. Կրամերի կանոնով լուծել համակարգը

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 :$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

Հետևաբար

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} : \bullet$$

Թեորեմ 14. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են

- A-ն հակադարձելի մատրից է,
- $Ax = b$ հավասարումն ունի միակ լուծում ցանկացած $(n \times 1)$ կարգի b-ի համար,
- $Ax = O$ հավասարումն ունի միայն զրոյական լուծում,
- $\det A \neq 0$:

---

136. Հակադարձելի՞ են արդյոք տրված մատրիցները

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

137. Տրված է, որ $detA = 5$, որտեղ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$: Գտնել՝

ա) $det(3A)$, բ) $det(2A^{-1})$, գ) $det((2A)^{-1})$, դ) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$:

138. Գտնել k-ի այն արժեքները, որոնց համար A-ն հակադարձելի է.

ա) $A = \begin{pmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

139. Ցույց տալ ,որ α, β, γ-ի բոլոր արժեքների համար մատրիցը հակադարձելի չէ.

$$\begin{pmatrix} sin^2\alpha & sin^2\beta & sin^2\gamma \\ cos^2\alpha & cos^2\beta & cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

140. A-ն և B-ն միևնույն կարգի քառակուսի մատրիցներ են: Ցույց տալ, որ եթե A-ն հակադարձելի է, ապա $detB = det(A^{-1}BA)$:

141. Ապացուցել, որ եթե A-ն իդեմպոտենտ և հակադարձելի մատրից է, ապա $A = E$:

142. Արդյո՞ք ինքնաչեզոքացնող մատրիցներն ունեն հակադարձ: Պատասխանը բացատրել:

143. Դիցուք A-ն ինքնաչեզոքացնող մատրից է: Ցույց տալ, որ $(E - A)$-ն հակադարձելի է:

144. Հաշվել $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ մատրիցի հակադարձը

ա) Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով, բ) որոշիչի օգնությամբ: Ո՞ր եղանակով եք քիչ հաշվարկներ կատարում:

145. Գտնել մատրիցների հակադարձը

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, է) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

ը) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, թ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ժ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

146. Լուծել համակարգը

$$\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\\
&3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 1\\
&7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -3\\
&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3
\end{aligned}$$

ա)Կրամերի եղանակով, բ) Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով:
Ո՞ր եղանակն է ավելի քիչ հաշվարկներով իրականացվում:

147. Հետևյալ համակարգերը լուծել Կրամերի բանաձևով

ա) $$\begin{aligned}
&4x_1 - x_2 - x_3 = 1\\
&2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10\\
&5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1,
\end{aligned}$$

բ) $$\begin{aligned}
&3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11\\
&4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 11\\
&6x_1 - 6x_2 = 3,
\end{aligned}$$

գ) $$\begin{aligned}
&2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11\\
&2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40\\
&3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37,
\end{aligned}$$

դ) $$\begin{aligned}
&3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0\\
&3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0\\
&6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0\\
&3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0 :
\end{aligned}$$

148. Ապացուցել, որ երկու իրարից տարբեր կետերով՝ (a_1, b_1), (a_2, b_2), անցնող ուղղի հավասարումը կարելի է գրել $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ տեսքով:

149. Ապացուցել, որ նույն հարթության մեջ չգտնվող երեք իրարից տարբեր կետերով $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ անցնող հարթության հավասարումը կարելի է գրել

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ a_1 & b_1 & c_1 & 1\\ a_2 & b_2 & c_2 & 1\\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

տեսքով:

150. Հետևյալ համակարգերը լուծել Կրամերի բանաձևերով x', y'-ի նկատմամբ

ա) $$\begin{aligned}
&x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\\
&y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'
\end{aligned}$$

բ) $$\begin{aligned}
&x = x'\cos\theta - y'\sin\theta\\
&y = x'\sin\theta + y'\cos\theta :
\end{aligned}$$

m քառակուսի մատրիցի որոշիչը կարելի է հաշվել $Det[m]$ հրամանով

```
In[14]:= Det[{{a, b}, {c, d}}]

Out[14]= -b c + a d
```

Ներմուծենք a_{ij} տարրերով (3×3) կարգի մատրից և հաշվենք դրա որոշիչը

```
In[15]:= m = Array[a, {3, 3}];
         Det[m]

Out[16]= -a[1, 3] a[2, 2] a[3, 1] + a[1, 2] a[2, 3] a[3, 1] +
          a[1, 3] a[2, 1] a[3, 2] - a[1, 1] a[2, 3] a[3, 2] -
          a[1, 2] a[2, 1] a[3, 3] + a[1, 1] a[2, 2] a[3, 3]
```

Հաշվենք հետևյալ որոշիչը

In[17]:= $Det\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right]$

Out[17]= -112

Հաշվենք $g[x]$ մատրիցի որոշիչը

In[18]:= $g[x\_] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & x & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & x^2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & x^3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & x^4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & x^4 \end{pmatrix};$

dt[x_] = Det[g[x]]

Out[18]= $-2125 + 2125\ x + 775\ x^2 - 275\ x^3 + 74\ x^4 - 709\ x^5 - 30\ x^6 + 92\ x^7 + 96\ x^8 + 68\ x^9 - 32\ x^{10} - 5\ x^{11} - 4\ x^{12} - x^{13} + x^{14}$

Որոշիչը հաշվենք, երբ $x = 100$

```
In[20]:= dt[100]

Out[20]= 98959468689681625171329603 75
```

Հաշվենք Վանդերմոնդի որոշիչը

```
In[21]:= mat = {{1, u, u^2, u^3}, {1, v, v^2, v^3}, {1, w, w^2, w^3}, {1, x, x^2, x^3}};
         Det[mat]
         Null
```

$$
\mathrm{mat} = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \\ 1 & v & v^2 & v^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix};
$$

Out[22]=

$$
u^3 v^2 w - u^2 v^3 w - u^3 v w^2 + u v^3 w^2 + u^2 v w^3 - u v^2 w^3 - u^3 v^2 x + u^2 v^3 x + u^3 w^2 x - v^3 w^2 x - u^2 w^3 x + v^2 w^3 x + u^3 v x^2 - u v^3 x^2 - u^3 w x^2 + v^3 w x^2 + u w^3 x^2 - v w^3 x^2 - u^2 v x^3 + u v^2 x^3 + u^2 w x^3 - v^2 w x^3 - u w^2 x^3 + v w^2 x^3
$$

Ձևափոխենք ստացված պատասխանը

```
In[24]:= Det[mat] // Factor

Out[24]= (u - v) (u - w) (v - w) (u - x) (v - x) (w - x)
```

Գ Լ Ո Ւ Խ Ե Ր Կ Ր Ո Ր Դ

ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

8. ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ: ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՆԹԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում 8. $x, y, z, \ldots$ տարրերի X բազմությունն անվանում են ***գծային տարածություն***, եթե

ա) X բազմության ցանկացած x, y տարրերի համապատասխանեցվում է X բազմության z տարր, որն անվանում են x, y տարրերի ***գումար*** և նշանակում են՝ $z = x + y$,

բ) X բազմության ցանկացած x տարրի և ցանկացած λ իրական թվի համապատասխանեցվում է X բազմության z տարր, որն անվանում են x տարրի և λ թվի ***արտադրյալ*** և նշանակում են՝ $z = \lambda\, x$,

գ) նշված գործողությունները բավարարում են հետևյալ ութ աքսիոմներին. ցանկացած $x, y, z \in X$ տարրերի և λ, μ իրական թվերի համար՝

1. $x + y = y + x$,

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, **3.** գոյություն ունի $o \in X$ տարր այնպիսին, որ ցանկացած $x \in X$-ի համար $x + o = x$:

o-ն անվանում են ***զրոյական տարր***,

4. ցանկացած $x \in X$ տարրի համար գոյություն ունի $y \in X$ տարր այնպիսին, որ

$x + y = o$: y-ն անվանում են x տարրի ***հակադիր տարր***:

5. $1x = x$,

6. $\lambda(\nu x) = (\lambda\nu)x$,

7. $(\lambda + \nu)x = \lambda x + \nu x$,

8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$:

Գծային տարածության տարրերն անվանում են նաև ***վեկտորներ***:

Օրինակ 53. R^n-ով նշանակենք

$$x = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ x_i \in R\}$$

բազմությունը, որտեղ սահմանված են գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները հետևյալ կերպ

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}:$$

R^n-ը գծային տարածություն է:

x_i թիվն անվանում են $x \in R^n$ տարրի *i-րդ կոորդինատ:* •

Օրինակ 54. $M_{n,m}$-ով նշանակենք $(n \times m)$ կարգի մատրիցների բազմությունը: Մատրիցների համար սահմանված գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով $M_{n,m}$ բազմությունը գծային տարածություն է:•

Օրինակ 55. P_n-ով նշանակենք մինչև n կարգի բոլոր բազմանդամների բազմությունը, որտեղ գումարը և թվով բազմապատկումը սահմանված են սովորական եղանակով: P_n բազմությունը գծային տարածություն է:•

Օրինակ 56. $C[a,b]$-ով նշանակենք $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը, որտեղ գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանված են սովորական եղանակով: $C[a,b]$-ն գծային տարածություն է:•

Օրինակ 57. Նշանակենք $R_+ = \{x \in R; x > 0\}$: Ցանկացած երկու $x, y \in R_+$ տարրերի գումարը սահմանենք որպես այդ թվերի արտադրյալ՝ սովորական իմաստով

$$x + y = xy,$$

իսկ $x \in R_+$ տարրի և λ թվի արտադրյալ սահմանենք, որպես x դրական թվի λ աստիճան

$$\lambda x = x^\lambda :$$

Եթե $x, y \in R_+$ և λ-ն ցանկացած թիվ է, ապա $x + y \in R_+$, $\lambda x \in R_+$: Ստուգենք, որ այս գործողությունները բավարարում են 1-8 աքսիոմներին

1. $x+y=xy=yx=y+x,$
2. $(x+y)+z=(xy)z=x(yz)=x+(y+z),$
3. $o=1,\ o+x=1x=x,$
4. $\forall x\in R_+,\ \exists\ x'=\dfrac{1}{x},\ x+x'=x\dfrac{1}{x}=1=o,$
5. $1x=x^1=x,$
6. $\beta(\alpha x)=(\alpha x)^\beta=(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}=(\alpha\beta)x,$
7. $(\alpha+\beta)x=x^{(\alpha+\beta)}=x^\alpha x^\beta=(\alpha x)+(\beta x),$
8. $\alpha(x+y)=(xy)^\alpha=x^\alpha y^\alpha=(\alpha x)+(\alpha y):$

Այսինքն, R_+ բազմությունը նշված գործողություններով, գծային տարածություն է: •

Օրինակ 58. Ամբողջ թվերի բազմությունը սովորական գումարման և թվով բազմապատկման գործողություններով գծային տարածություն չէ:

Իսկապես, եթե $\lambda=\frac{1}{2}$, ապա

$$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

որն ամբողջ թիվ չէ:•

Օրինակ 59. Երկրորդ կարգի բազմանդամների բազմությունը գծային տարածություն չէ:

Դիտարկենք երկրորդ կարգի բազմանդամներ

$$p(x)=x^2,\ q(x)=-x^2+x+1:$$

Ունենք

$$p(x)+q(x)=x+1,$$

որը երկրորդ կարգի բազմանդամ չէ:•

Օրինակ 60. Դիցուք

$$X=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};x_1,x_2\in R\}$$

և ցանկացած $x,y\in X$ տարրերի համար

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix},\quad \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\0\end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ X-ը գծային տարածություն չէ:

Իսկապես, եթե $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in X$ տարրը բազմապատկենք 1 թվով, ապա

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Այսինքն հինգերորդ աքսիոմը տեղի չունի:●

Թեորեմ 15. Գծային տարածության զրոյական տարրը միակն է և ցանկացած $x \in X$ տարրի համար

$$o = 0x:$$

Թեորեմ 16. Գծային տարածության ցանկացած x տարրի հակադիր y տարրը միակն է և

$$y = (-1)x:$$

Թեորեմ 17. X գծային տարածության ցանկացած a, b տարրերի համար կգտնվի միակ $x \in X$ տարր այնպիսին, որը $a + x = b$ հավասարման լուծում է: x տարրն անվանում են a, b տարրերի ***տարբերություն*** և նշանակում՝ $x = b - a$:

Սահմանում 9. X գծային տարածության $Y \subset X$ բազմությունն անվանում են X գծային տարածության ***գծային ենթատարածություն***, եթե այն նույնպես գծային տարածություն է:

Օրինակ 61. Ցույց տալ, որ

$$Y = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix};\ x_1, x_2 \in R\}$$

բազմությունը R^3-ի ենթատարածություն է:

Y-ում զրոյական տարրն է $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Եթե $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ապա

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in Y, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in Y:$$

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ բոլոր ութ աքսիոմներն էլ ճշմարիտ են:

Թեորեմ 18. Դիցուք X-ը գծային տարածություն է, $Y \subset X$: Y-ը X-ի գծային ենթատարածություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) ցանկացած $y_1, y_2 \in Y$ տարրերի համար $y_1 + y_2 \in Y$,

բ) ցանկացած $y \in Y$ տարրի և λ թվի համար $cy \in Y$:

Ցանկացած X գծային տարածություն ունի երկու տարրական ենթատարածություններ՝ $Y = \{o\}$ և $Y = X$:

Օրինակ 62. Դիցուք Y-ը (2×2) կարգի բոլոր սիմետրիկ մատրիցների բազմությունն է: Ցույց տալ, որ Y-ը $M_{2,2}$ գծային տարածության ենթատարածություն է:

Դիցուք $A, B \in Y$: Այսինքն, $A^T = A$ և $B^T = B$: Ունենք

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \in Y, \ (cA)^T = cA^T = cA \in Y : \bullet$$

Օրինակ 63. Դիցուք Y-ը (2×2) կարգի բոլոր ոչ հակադարձելի մատրիցների բազմությունն է: Ցույց տալ, որ Y-ը $M_{2,2}$ գծային տարածության ենթատարածություն չէ:

Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Պարզ է, որ A, B մատրիցները հակադարձելի չեն՝ $A, B \in Y$, սակայն

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ det(A+B) = 1 :$$

Հետևաբար՝ $A + B \notin Y : \bullet$

Օրինակ 64. Դիցուք

$$Y = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \geq 0\} :$$

Y բազմությունը կարելի է նույնացնել կոորդինատական հարթության առաջին քառորդի հետ: Ցույց տալ, որ այն R^2-ի ենթատարածություն չէ:

Ունենք

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

որն առաջին քառորդին չի պատկանում: •

Օրինակ 65. Կառուցենք ներդրված ենթատարածությունների հաջորդականություն: Համաձայն P_n-ի սահմանման

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n:$$

Մեկ ուրիշ օրինակ: Դիցուք W_5-ը $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների գծային տարածությունն է, իսկ W_4-ը $[0,1]$ հատվածի վրա ինտեգրելի ֆունկցիաների, W_3-ը $[0,1]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների, W_2-ը $[0,1]$ հատվածի վրա դիֆերենցելի ֆունկցիաների, W_1-ը $[0,1]$ հատվածի վրա որոշված բազմանդամների բազմություններն են: Ինչպես հայտնի է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացից

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5,$$

այսինք W_i-ն W_j-երի ենթատարածությունն է, եթե $i \le j$: •

Օրինակ 66. Պարզել, թե հետևյալ երկու բազմություններից, ո՞րն է R^2 գծային տարածության ենթատարածություն

ա) $x+2y=0$ ուղղին պատկանող կետերի բազմությունը,

բ) $x+2y=1$ ուղղին պատկանող կետերի բազմությունը:

Նկատենք, որ $x+2y=0$ ուղղին պատկանող R^2-ի կետերն ունեն $\begin{pmatrix} -2x \\ x \end{pmatrix}$ տեսքը: Դիցուք $x=\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$: Ունենք

$$x+y=\begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2(\alpha+\beta) \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix},$$

որտեղ $\gamma=\alpha+\beta$: Այսինքն $x+y$ տարրը պատկանում է ուղղին: Նույն եղանակով կարելի է համոզվել, որ եթե x տարրը պատկանում է $x+2y=0$ ուղղին, ապա λx-ը՝ նույնպես:

Ցույց տանք, որ $x+2y=1$ ուղղին պատկանող կետերի բազմությունը R^2-ի ենթատարածություն չէ: Նկատենք, որ $(0,0)$ կետը ուղղի վրա չի գտնվում, այսիքն R^2-ի զրոյական տարրը տրված ենթաբազմությանը չի պատկանում:

Կարելի է ցույց տալ, որ X-ը կլինի R^2-ի ենթատարածություն այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) X-ը պարունակի միայն R^2-ի զրոյական տարրը,

բ) X-ը համընկնում է R^2-ի հետ,

գ) X-ը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի կետերի բազմությունն է: •

Օրինակ 67. Պարզել, թե հետևյալ երկու բազմություններից, ո՞րն է R^3 գծային տարածության ենթատարածություն

$$X = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \in R\}, \qquad Y = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1, x_3 \in R\}:$$

Քանի որ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ տարրը չի պատկանում X բազմությանը, ապա այն R^3-ի ենթատարածություն չէ:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ տարրը պատկանում է Y բազմությանը:

Դիցուք $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$: Ունենք

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 + z_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

որտեղ $z_1 = x_1 + y_1, z_3 = x_3 + y_3$ և

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda(x_1 + x_3) \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 + z_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

որտեղ $z_1 = \lambda x_1, z_3 = \lambda x_3$: Այսինքն $x + y, \lambda x$ տարրերը պատկանում են Y բազմությանը: Հետևաբար Y-ը R^3-ի ենթատարածություն է:

Կարելի է ցույց տալ (դա թողնում ենք ընթերցողին), որ X-ը կլինի R^3-ի ենթատարածություն այն և միայն այն դեպքում, եթե

ա) X-ը բաղկացած է միայն $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ տարրից, բ) X-ը համընկնում է R^3-ի հետ,

գ) X-ը բաղկացած է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող որևէ ուղղի բոլոր կետերից,

դ) X-ը բաղկացած է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող որևէ հարթության բոլոր կետերից: •

---

151. Նկարագրել հետևյալ գծային տարածությունների զրոյական տարրերը

ա) R^4, բ) $C(-\infty,\infty)$, գ) $M_{2,3}$, դ) $M_{1,4}$, ե) P_3, զ) $M_{2,2}$:

152. Կարելի՞ է մեկ կամ երկու իրարից տարբեր տարրերից բաղկացած բազմությունները դարձնել գծային տարածություններ:

153. Գծային տարածությու՞ն է $W = \{\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}; \alpha \in R\}$ բազմությունը:

154. Գծային տարածությու՞ն է $W = \{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}; \beta \geq 0,\ \alpha \in R\}$ բազմությունը:

155. Գծային տարածությու՞ն է (2×2) կարգի հետևյալ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in R$$

տեսքն ունեցող մատրիցների բազմությունը:

156. Գծային տարածությու՞ն է (2×2) կարգի հետևյալ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

տեսքն ունեցող մատրիցների բազմությունը:

157. Գծային տարածությու՞ն է (2×2) կարգի հակադարձելի մատրիցների բազմությունը:

158. Գծային տարածությու՞ն է (2×2) կարգի անկյունագծային մատրիցների բազմությունը:

159. R^2-ը հետևյալ գործողություններով գծային տարածություն է, թե ոչ

ա) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix},$

բ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\end{pmatrix},$

գ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{c}\alpha_1\\ \sqrt{c}\beta_1\end{pmatrix},$

դ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\\ \beta_1\beta_2\end{pmatrix},\ c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\end{pmatrix}:$

160. R^3-ը հետևյալ գործողություններով գծային տարածություն է, թե ոչ

ա) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2\end{pmatrix},\quad c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\\ 0\end{pmatrix},$

բ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\\ c\gamma_1\end{pmatrix},$

գ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+1\\ \beta_1+\beta_2+1\\ \gamma_1+\gamma_2+1\end{pmatrix},\quad c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\\ c\gamma_1\end{pmatrix},$

դ) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+1\\ \beta_1+\beta_2+1\\ \gamma_1+\gamma_2+1\end{pmatrix},c\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\alpha_1+c-1\\ c\beta_1+c-1\\ c\gamma_1+c-1\end{pmatrix}:$

161. Ցույց տալ, որ հետևյալ բազմությունները գծային տարածություններ չեն

ա) դատարկ բազմությունը,

բ) տարածության վեկտորների բազմությունը՝ առանց այն վեկտորների, որոնք զուգահեռ են տրված ուղղին,

գ) բոլոր այն բազմանդամների բազմությունը, որոնց կարգը հավասար է n-ի,

դ) բոլոր այն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների բազմությունը, որոնց կարգը փոքր է կամ հավասար n-ի:

162. $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների հետևյալ բազմություններից որո՞նք են գծային տարածություններ

ա) $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաները,

բ) $[a, b]$ հատվածի վրա դիֆերենցելի ֆունկցիաները,

գ) $[a, b]$ հատվածի վրա ինտեգրելի ֆունկցիաները,

դ) $[a, b]$ հատվածի վրա սահմանափակ ֆունկցիաները,

ե) բոլոր ֆունկցիաները, որոնց համար $sup_{[a,b]}|f(x)| \leq 1$

զ) $[a, b]$ հատվածի վրա ոչ բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիաները,

է) բոլոր ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(a) = 0$ պայմանին,

ը) բոլոր ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(a) = 1$ պայմանին,

թ) բոլոր ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ պայմանին,

ժ) $[a, b]$ հատվածի վրա մոնոտոն աճող ֆունկցիաները,

ի) $[a, b]$ հատվածի վրա մոնոտոն ֆունկցիաները:

163. Դիցուք $V = R^n$: Ցույց տալ, որ W-ն V-ի ենթատարածություն է, եթե

ա) $V = R^4, \ W = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R\}$,

բ) $V = R^3, \ W = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_3 \end{pmatrix} ; \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R\}$,

գ) $V = M_{2,2}$, իսկ W-ն (2×2) կարգի

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցների բազմություն է,

դ) $V = M_{3,2}$, իսկ W-ն (3×2) կարգի

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

մատրիցների բազմություն է:

164. Ցույց տալ, որ W-ն տրված գծային տարածության ենթատարածություն չէ, եթե

ա) W-ն R^3-ի այն տարրերի բազմությունն է, որոնց վերջին կոորդինատը -1 է,

բ) W-ն R^2-ի այն տարրերի բազմությունն է, որոնց կոորդինատները ռացիոնալ թվեր են, **գ)** W-ն $C(-\infty,\infty)$-ի ոչ բացասական ֆունկցիաների բազմությունն է,

դ) W-ն $M_{n,n}$-ի զրոյական որոշիչ ունեցող մատրիցների բազմությունն է,

ե) W-ն $M_{n,n}$-ի ինքնանման մատրիցների բազմությունն է:

165. Հետևյալ բազմությունները համապատասխան գծային տարածությունների գծային ենթատարածություններ են, թե ոչ

ա) n չափանի վեկտորների բազմությունը, որոնց կոորդինատները ամբողջ թվեր են,

բ) n չափանի վեկտորների բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ պայմանին,

գ) n չափանի վեկտորների բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ հավասարմանը,

դ) n չափանի վեկտորների բազմությունը, որոնք $\{e_i\}_{i=1}^{k} \in R^n$ $(k \leq n)$ վեկտորների գծային կոմբինացիաներն են,

ե) զուգամետ հաջորդականությունների բազմությունը,

զ) հարթության այն վեկտորների համախումբը, որոնց սկզբնակետը գտնվում է $(0,0)$ կետում, իսկ վերջնակետը՝ տրված ուղղի վրա,

է) հարթության այն վեկտորների համախումբը, որոնց սկզբնակետը գտնվում է $(0,0)$ կետում, իսկ վերջնակետը չի գտնվում տրված ուղղի վրա,

ը) հարթության այն վեկտորների համախումբը, որոնց վերջնակետը գտնվում է առաջին քառորդում:

166. $C(-\infty,\infty)$ բազմության հետևյալ ենթաբազմություններից, որո՞նք են $C(-\infty,\infty)$ գծային տարածության ենթատարածություն

ա) $f(x) \geq 0$, **բ)** $f(-x) = f(x)$, **գ)** $f(-x) = -f(x)$,

դ) $f(x) = c$, **ե)** $f(0) = 0$, **զ)** $f(0) = 1$:

167. $M_{n,n}$ բազմության հետևյալ ենթաբազմություններից, որո՞նք են $M_{n,n}$ գծային տարածության ենթատարածություն

ա) վերին եռանկյունաձև մատրիցները,

բ) ամբողջ տարրերով մատրիցները,

գ) այն A մատրիցները, որոնք տեղափոխելի են տրված B մատրիցի հետ,

դ) ոչ հակադարձելի մատրիցները,
ե) հակադարձելի մատրիցները:

168. Դիցուք A-ն (2×3) կարգի մատրից է: Ապացուցել, որ

$$W = \left\{ x \in R^3 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

բազմությունը R^3-ի ենթատարածություն չէ:

169. Դիցուք A-ն $(m \times n)$ կարգի մատրից է: Ապացուցել, որ

$$W = \{x \in R^3 : Ax = o\}$$

բազմությունը R^n-ի ենթատարածություն է:

170. Դիցուք V-ն W գծային տարածության ենթատարածություն է: Ցույց տալ, որ V և W տարածությունների զրոյական տարրերը համընկնում են:

9. ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 10. Կասենք, որ V գծային տարածության v տարրը $u_1, \cdots, u_k \in V$ տարրերի գծային կոմբինացիա է, եթե կգտնվեն $c_1, \cdots, c_k$ հաստատուններ այնպիսիք, որ

$$v = c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k :$$

Օրինակ 68. Դիտարկենք R^3 գծային տարածության վեկտորների հետևյալ համախումբը

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \} :$$

v_1 վեկտորը v_2, v_3 վեկտորների գծային կոմբինացիան է, քանի որ

$$v_1 = 3v_2 + v_3 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 69. Դիտարկենք $M_{2,2}$ գծային տարածության վեկտորների հետևյալ համախումբը

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} :$$

v_1 վեկտորը է v_2, v_3, v_4 վեկտորների գծային կոմբինացիա, քանի որ

$$v_1 = v_2 + 2v_3 - v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 70. Տրված $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ վեկտորը ներկայացնել հետևյալ վեկտորների գծային կոմբինացիայով

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Գտնենք այնպիսի c_1, c_2, c_3 թվեր, որ $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$: Ունենք

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_3 \\ 2c_1 + c_2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 \end{pmatrix} :$$

Հավասարեցնելով համապատասխան կոորդինատները՝ կստանանք գծային հավասարումների համակարգ

$$\begin{aligned} &c_1 - c_3 = 1 \\ &2c_1 + c_2 = 1 \\ &3c_1 + 2c_2 + c_3 = 1, \end{aligned}$$

որի լուծումը պարամետրական տեսքով հետևյալն է

$$c_1 = 1 + c, \; c_2 = -1 - 2c, \; c_3 = c :$$

Որևէ լուծում ստանալու համար ընդունենք՝ $c = 1$: Կստանանք, $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1$ և

$$w = 2v_1 - 3v_2 + v_3 : \bullet$$

Օրինակ 71. Եթե հնարավոր է, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ վեկտորը ներկայացնել հետևյալ վեկտորների գծային կոմբինացիայով

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Վարվելով ինչպես նախորդ օրինակում կստանանք հետևյալ համակարգը

$$\begin{aligned} c_1 - c_3 &= 1 \\ 2c_1 + c_2 &= -2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 2, \end{aligned}$$

որը լուծում չունի: Հետևաբար w վեկտորը հնարավոր չէ ներկայացնել v_1, v_2, v_3 վեկտորների գծային կոմբինացիայով:•

Սահմանում 11. Կասենք, որ V գծային տարածության վեկտորների

$$S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

համախումբը ***գծորեն կախյալ է***, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $c_1, c_2, ..., c_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = o : \tag{17}$$

Եթե S համախումբը գծորեն կախյալ չէ, ապա ասում են, որ այն ***գծորեն անկախ է***, այսինքն, (17)-ից հետևում է, որ $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$:

Թեորեմ 19. Որպեսզի V գծային տարածության $S = \{v_1, ..., v_n\}$ համախումբը լինի գծորեն կախյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $v_1, ..., v_n$ վեկտորներից որևէ մեկը ներկայացվի մյուսների գծային կոմբինացիայով:

Օրինակ 72. Պարզել հետևյալ համախմբի գծորեն կախվածությունը կամ անկախությունը

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} :$$

Կազմենք հետևյալ վեկտորային հավասարումը

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = o : \tag{18}$$

Եթե (18)-ն ունենա միայն զրոյական լուծում, ապա S համախումբը կլինի գծորեն անկախ: Հակառակ դեպքում՝ գծորեն կախյալ: Ունենք

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_3 \\ 2c_1 + c_2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

որին համապատասխանում է հետևյալ համակարգը

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում, ապա S-ը գծորեն անկախ է:•

Օրինակ 73. Դիցուք $V = C[a, b]$: Ցույց տանք, որ

$$S = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$$

համախումբը գծորեն անկախ է:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^n = o$$

կամ որ նույնն է

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^n \equiv 0, \ x \in [a, b] :$$

Մասնավորապես, $x = 0$-ի համար ունենք $c_1 = 0$ և ուրեմն

$$c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^n = x(c_2 + c_3 x + \cdots + c_n x^{n-1}) \equiv 0:$$

Այստեղից ստանում ենք

$$c_2 + c_3 x + \cdots + c_n x^{n-1} \equiv 0:$$

Կրկնելով նույն քայլերը, կստանանք

$$c_2 = \cdots = c_n = 0: \bullet$$

Օրինակ 74. Պարզել հետևյալ համախմբի գծորեն կախվածությունը կամ անկախությունը

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2\}:$$

Կազմենք հետևյալ վեկտորային հավասարումը

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = o:$$

Այստեղից

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 &= 0: \end{aligned}$$

Համակարգն ունի անվերջ քանակությամբ լուծումներ

$$c_1 = 2c,\ c_2 = -c,\ c_3 = 3c:$$

Հետևաբար S-ը գծորեն կախյալ է: Ստացված լուծման մեջ վերցնելով $c = 1$՝ կստանանք

$$2v_1 - v_2 + 3v_3 = o: \bullet$$

171. Պարզել հետևյալ համախմբերի գծորեն կախվածությունը կամ անկախությունը

ա) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}\right\}$,

գ) $\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}\right\}$, դ) $\left\{\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$,

ե) $\left\{\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\3\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$:

172. Գտնել λ պարամետրի բոլոր այն արժեքները, երբ u վեկտորը $v_1,\cdots,v_s$ վեկտորների գծային կոմբինացիա է

ա) $v_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\-6\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}7\\-2\\\lambda\end{pmatrix}$,

բ) $v_1=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}5\\9\\\lambda\end{pmatrix}$:

173. t պարամետրի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում հետևյալ համախմբերը կլինեն գծորեն անկախ

ա) $\left\{\begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3t\end{pmatrix}\right\}$:

174. Դիցուք

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&5\\1&-2\end{pmatrix}:$$

Հետևյալ մատրիցներից որո՞նք են A և B մատրիցների գծային կոմբինացիա: Դրական պատասխանի դեպքում գտնել այդ կոմբինացիան

ա) $\begin{pmatrix}6&-19\\10&7\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}6&2\\9&11\end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix}-2&28\\1&-11\end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$:

175. Ապացուցել, որ

ա) երկու հավասար վեկտորներ ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,

բ) համեմատական վեկտորներ ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է (X տարածության x, y տարրերը կանվանենք համեմատական, եթե կգտնվի այնպիսի $\lambda \neq 0$, որ $x = \lambda y$),

գ) զրոյական վեկտոր պարունակող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,

դ) կախյալ ենթահամախումբ պարունակող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,

ե) անկախ համախմբի ցանկացած ենթահամախումբ գծորեն անկախ է:

176. Ապացուցել, որ եթե $\{a_1, \cdots, a_k\}$ համախումբը գծորեն անկախ է, իսկ $\{a_1, \cdots, a_k, b\}$ համախումբը՝ կախյալ, ապա b-ն կարելի է ներկայացնել $a_1, \cdots, a_k$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով:

177. Դիցուք $\{a_1, \cdots, a_r\}$ համախումբը գծորեն անկախ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած a_k վեկտոր $b_1, \cdots, b_s$ վեկտորների գծային կոմբինացիա է, ապա $r \leq s$:

178. λ պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում է $\{a_1, a_2\}$ համախմբի գծորեն անկախությունից հետևում է $\{\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2\}$ համախմբի գծորեն անկախությունը:

179. Դիցուք A-ն (3×3) կարգի հակադարձելի մատրից է: Ապացուցել, որ եթե $\{v_1, v_2, v_3\}$ համախումբը գծորեն անկախ է $M_{3,1}$ գծային տարածությունում, ապա $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ համախումբը նույնպես գծորեն անկախ է: Որևէ օրինակի օգնությամբ ցույց տալ, որ դա այդպես չէ, եթե A-ն սինգուլյար մատրից է:

180. Ցույց տալ, որ $\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ համախումբը գծորեն կախված է $[a, b]$-ում, եթե

ա) այդ ֆունկցիաներից գոնե մեկը նույնաբար զրո է,

բ) այդ ֆունկցիաներից գոնե երկուսը նույնաբար հավասար են:

181. Եթե $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են $[a, b]$-ում, ապա դրանք գծորեն կախյալ են ցանկացած $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ հատվածում:

182. Դիցուք $S = \{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ համախումբը գծորեն անկախ է $[a, b]$-ում: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ համախմբի մասին $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ հատվածում:

183. Դիցուք $S = \{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ համախումբը գծորեն անկախ է $[a_1, b_1] \subset [a, b]$-ում: Ցույց տալ, որ S համախումբը գծորեն անկախ է $[a, b]$-

ում:

184. Ապացուցել հետևյալ համախմբերի գծորեն անկախությունը ($x \in R^1$)

ա) $\{\sin x, \cos x\}$,

բ) $\{1, \sin x, \cos x\}$,

գ) $\{\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx\}$,

դ) $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx\}$,

ե) $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$,

զ) $\{1, \sin x, \sin^2 x, \cdots, \sin^n x\}$,

է) $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^n x\}$,

ը) $\{e^{a_1 x}, \cdots, e^{a_n x}\}$, $a_i \neq a_j$,

թ) $\{x^{a_1}, \cdots, x^{a_n}\}$, $a_i \neq a_j$:

185. Ցույց տալ, որ $\{x, |x|\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է $C[0,1]$ գծային տարածությունում, սակայն գծորեն անկախ է $C[-1,1]$-ում:

10. ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶԻՍ ԵՎ ՉԱՓՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում 12. X գծային տարածության գծորեն անկախ $S = \{e_1, ..., e_n\}$ համախումբն անվանում են X-ի ***բազիս***, եթե ցանկացած $x \in X$-ի համար գոյություն ունեն այնպիսի $x_i, i = \overline{1,n}$ թվեր, որ

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i :$$

Այս հավասարությունն անվանում են x տարրի *վերլուծություն ըստ* $\{e_1, ..., e_n\}$ *բազիսի*, իսկ x_i թվերը՝ x *տարրի (վեկտորի) կոորդինատներ* ըստ այդ բազիսի: Այսուհետև կօգտագործենք

$$(x)_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

նշանակումը:

Օրինակ 75. Ցույց տալ, որ

$$S = \{e_1, e_2, e_3\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

համախումբը R^3 գծային տարածության բազիս է:

Նկատենք, որ

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=o$$

վեկտորային հավասարումն ունի միայն զրոյական լուծում՝ $c_1=c_2=c_3=0$: Բացի այդ՝ R^3 գծային տարածության ցանկացած $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ տարր կարելի է ներկայացնել որպես S-ի տարրերի գծային կոմբինացիա

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\ :$$

Նույն եղանակով կարելի է ապացուցել, որ

$$S=\{e_1,\cdots,e_n\}=\{\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix}\}$$

համախումբը R^n-ի բազիս է: Այն անվանում են R^n-ի *տիպային բազիս:*•

Այսուհետև, եթե բազիսը չի նշվում, ապա հասկանում ենք տարրի վերլուծությունը ըստ տիպային բազիսի:

Օրինակ 76. Ցույց տալ, որ

$$S=\{e_1,e_2\}=\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$$

համախումբը R^2-ի բազիս է:

Դիցուք $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_1-c_2\end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$c_1+c_2=x_1,\qquad c_1-c_2=x_2\ :$$

Վերջինս ունի միակ լուծում

$$c_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad c_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} :$$

Հետևաբար

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} v_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} v_2 :$$

Մյուս կողմից

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = o$$

վեկտորային հավասարումն ունի միայն զրոյական լուծում, այսինքն՝ S-ը գծորեն անկախ է:•

Օրինակ 77. Ցույց տալ, որ

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}$$

համախումբը P_n գծային տարածության բազիս է:

S համախումբը գծորեն անկախ է և մինչև n կարգի ցանկացած բազմանդամ կարելի է ներկայացնել S-ի տարրերի գծային կոմբինացիայով: S համախումբն անվանում են P_n-ի ***տիպային բազիս:*** •

Օրինակ 78. Ինչպես նախորդ օրինակներում, կարելի է ցույց տալ, որ

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

համախումբը $M_{2,2}$ գծային տարածության բազիս է:

Նույն եղանակով կառուցված $M_{n,m}$ գծային տարածության բազիսն անվանում են ***տիպային բազիս:*** •

Թեորեմ 20. X գծային տարածության ցանկացած x տարրի x_i կոորդինատը միակ ձևով է որոշվում տրված $\{e_1, ..., e_n\}$ բազիսով: Ընդ որում, եթե x_i, y_i թվերը համապատասխանաբար x, y տարրերի i-րդ կոորդինատներն են ըստ $\{e_1, ..., e_n\}$ բազիսի, ապա $x_i + y_i$, λx_i թվերը համապատասխանաբար $x + y$, λx տարրերի i-րդ կոորդինատներն են:

Սահմանում 13. Կասենք, որ X գծային տարածության ***չափողականությունը*** n է՝ $dim X = n$, եթե կգտնվի n տարր ունեցող գծորեն անկախ համախումբ, իսկ ցանկացած $(n + 1)$ տարր ունեցող համախումբ գծորեն կախյալ է:

Սահմանում 14. X գծային տարածությունն անվանում են ***անվերջ չափանի*** $dimX = \infty$, եթե ցանկացած n բնական թվի համար X-ում կգտնվի n տարր ունեցող գծորեն անկախ համախումբ:

Թեորեմ 21. Եթե X գծային տարածության որևէ բազիս ունի n տարր, ապա

$$dimX = n :$$

Թեորեմ 22. Եթե X գծային տարածության չափողականությունը՝ $dimX = n$, ապա գոյություն ունի n տարրերից կազմված բազիս, ընդ որում որպես բազիս կարելի է վերցնել n տարրերից կազմված ցանկացած գծորեն անկախ համախումբ:

Դիտարկված օրինակներից հետևում է

ա) R^n գծային տարածությունը n չափանի գծային տարածություն է

$$dimR^n = n,$$

բ) P_n գծային տարածությունը $(n+1)$ չափանի գծային տարածություն է

$$dimP_n = n+1,$$

գ) $M_{n,m}$ գծային տարածությունը nm չափանի գծային տարածություն է

$$dimM_{n,m} = nm :$$

Թեորեմ 23. Եթե U-ն V գծային տարածության ենթատարածություն է, ապա

$$dimU \leq dimV :$$

Թեորեմ 24. Եթե U-ն V գծային տարածության ենթատարածություն է և $U \neq V$, ապա

$$dimU < dimV :$$

Սահմանում 15. Դիցուք V-ն գծային տարածություն է և $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$:

$$lin\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = \{v \in V,\ v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i\}$$

բազմությանն անվանում են $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ***տարրերով ծնված գծային թաղանթ,*** որտեղ $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ ցանկացած թվեր են:

$lin\{v_1, \cdots, v_n\}$ բազմությունը V-ի ենթատարածություն է, իսկ $v_1, \cdots, v_n$ տարրերի մաքսիմալ թվով գծորեն անկախ ցանկացած ենթահամախումբ բազիս է:

Օրինակ 79. Պարզել $U, V \subset R^3$ ենթատարածությունների չափողականությունը

ա) $U = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - \alpha \\ \beta \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in R\}$, բ) $V = \{\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix};\ \alpha \in R\}$:

U ենթատարածության ցանկացած տարր կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսով $U = lin\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$: $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ համախումբը գծորեն անկախ է: Հետևաբար՝ $dimU = 2$:

V ենթատարածության ցանկացած տարր կարելի է ներկայացնել

$$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

տեսքով: Հետևաբար՝ $dimV = 1$:●

Օրինակ 80. Դիցուք

$$W = lin\{v_1, v_2, v_3\},\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

Գտնել $dimW$:

Քանի որ $\{v_1, v_2, v_3\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է՝ $v_3 = 2v_1 - v_2$, իսկ $\{v_1, v_2\}$ համախումբը գծորեն անկախ է, ապա $dimW = 2$:●

Օրինակ 81. W-ն $M_{2,2}$ գծային տարածության սիմետրիկ մատրիցների ենթատարածությունն է: Գտնել $dimW$-ն:

Յանկացած (2×2) կարգի սիմետրիկ մատրից կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Հետևաբար W-ն

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

տարրերի վրա ձգված գծային թաղանթն է: Կարելի է ցույց տալ, որ $\{w_1, w_2, w_3\}$ համախումբը գծորեն անկախ է: Այսինքն՝ $dimW = 3$: •

Օրինակ 82. Ցույց տալ, որ

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

համախումբը $M_{5,1}$ գծային տարածության բազիս է:

Քանի որ $dimM_{5,1} = 5$ և S համախումբը բաղկացած է հինգ տարրից, ապա բավական է ցույց տալ, որ S-ը գծորեն անկախ է (ստուգել):•

Օրինակ 83. Դիցուք $x \in R^2$ տարրը $B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ բազիսում ունի $x = 3v_1 + 2v_2$ վերլուծությունը: Գտնել նրա կոորդինատները տիպային բազիսում:

Ունենք

$$x = 3v_1 + 2v_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}:$$

Հետևաբար $(x)_B=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, իսկ տիպային բազիսում $x=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$: ●

Օրինակ 84. Դիցուք $x\in R^3$ տարրը տիպային բազիսում ունի $x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ կոորդինատներ: Գտնել նրա կոորդինատները

$$B=\{u_1,u_2,u_3\}=\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}\}$$

բազիսում:

Ունենք

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$\begin{aligned}c_1+2c_3&=1\\-c_2+3c_3&=2\\c_1+2c_2-5c_3&=-1:\end{aligned}$$

Լուծելով ստացված համակարգը կստանանք՝ $c_1=5, c_2=-8, c_3=-2$:

Հետևաբար՝ $x=5u_1-8u_2-2u_3$ կամ $(x)_B=\begin{pmatrix}5\\-8\\-2\end{pmatrix}$: ●

Թեորեմ 25. Դիցուք X-ը n չափանի գծային տարածություն է և

$$S=\{v_1\cdots,v_n\}=\{\begin{pmatrix}v_{11}\\\cdots\\v_{1n}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}v_{n1}\\\cdots\\v_{nn}\end{pmatrix}\},$$

$$S' = \{u_1 \cdots, u_n\} = \{\begin{pmatrix} u_{11} \\ \cdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} u_{n1} \\ \cdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}\},$$

համախմբերը այդ տարածության բազիսներ են: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $(n \times n)$ կարգի հակադարձելի $A \equiv A_{S,S'}$ մատրից այնպիսին, որ

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} A_{S,S'}$$

և

$$(x)_{S'} = (A_{S,S'})^{-1}(x)_S :$$

A մատրիցն անվանում են S բազիսից S' բազիսին ***անցման մատրից:***

Օրինակ 85. R^3 գծային տարածությունում տրված են երկու բազիսներ

$$S = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

և

$$S' = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

Պահանջվում է գտնել

ա) S բազիսից S' բազիսին անցման մատրիցը,

բ) S' բազիսից S բազիսին անցման մատրիցը,

գ) $(v_1)_S, (v_1)_{S'}$ սյուները,

դ) $(x)_S$ սյունը, եթե $(x)_{S'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:

ա) Ունենք

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} A_{S,S'} :$$

Այստեղից

$$A_{S,S'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

բ) Փաստորեն պահանջվում է գտնել $(A_{S,S'})^{-1}$ մատրիցը

$$(A_{S,S'})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

գ) Ունենք $(e_1)_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Այստեղից

$$(e_1)_{S'} = (A_{S,S'})^{-1}(e_1)_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} :$$

դ) Ունենք

$$(x)_S = A_{S,S'}(x)_{S'} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} : \bullet$$

Սահմանում 16. Ցանկացած երկու X, Y գծային տարածություններ անվանում են *իզոմորֆ*, եթե այդ տարածությունների տարրերի միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք արտապատկերում այնպիսին, որ եթե $x_1, x_2 \in X$ տարրերը արտապատկերվում են համապատասխանաբար $y_1, y_2 \in Y$ տարրերին, ապա 1) $x_1 + x_2 \in X$ տարրն արտապատկերվում է $y_1 + y_2 \in Y$ տարրին, 2) $\lambda x_1 \in X$-ը արտապատկերվում է $\lambda y_1 \in Y$-ին:

Թեորեմ 26. Որպեսզի երկու գծային տարածություններ լինեն իզոմորֆ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց չափողականությունները համընկնեն:

186. Գրել R^6, $M_{4,1}$, $M_{2,4}$, P_4 գծային տարածությունների տիպային բազիսները:

187. Ինչու՞ հետևյալ համախմբերը R^2 գծային տարածության բազիսներ չեն

ա) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, **բ)** $\left\{\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\-10\end{pmatrix}\right\}$, **գ)** $\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$:

188. Ինչու՞ հետևյալ համախմբերը R^3 գծային տարածության բազիսներ չեն

ա) $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, **բ)** $\left\{\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$:

189. Ինչու՞ հետևյալ համախմբերը P_2 գծային տարածության բազիսներ չեն

ա) $\{1, 2x, x^2 - 4, 5x\}$, **բ)** $\{1 - x, 1 - x^2, 3x^2 - 2x - 1\}$:

190. Ինչու՞ հետևյալ համախմբերը $M_{2,2}$ գծային տարածության բազիսներ չեն

ա) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$,

բ) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & -4\\-4 & 3\end{pmatrix}\right\}$:

191. Հաշվել $lin\{a_1, \cdots, a_s\}$ գծային տարածության չափողականությունը

ա) $a_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\-3\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}3\\-11\\-1\\19\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1\\12\\2\\-16\end{pmatrix}$,

բ) $a_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix}1\\3\\-10\\1\\3\end{pmatrix}$:

192. Գտնել $lin\{a_1, \cdots, a_s\}$ գծային տարածության տարբեր բազիսներ

ա) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

բ) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$,

գ) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

193. Հետևյալ $(n \times n)$ կարգի մատրիցների բազմություններից որո՞նք են $(n \times n)$ կարգի բոլոր մատրիցների գծային տարածության ենթատարածություններ: Դրական պատասխանի դեպքում գտնել այդ ենթատարածության չափողականությունը

ա) զրոյական առաջին տողով մատրիցների բազմությունը,

բ) անկյունագծային մատրիցների բազմությունը,

գ) վերին եռանկյունաձև մատրիցների բազմությունը,

դ) սիմետրիկ մատրիցների բազմությունը,

ե) շեղսիմետրիկ մատրիցների բազմությունը,

զ) ոչ հակադարձելի մատրիցների բազմությունը:

194. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար ֆունկցիաների հետևյալ բազմությունները վերջավոր չափանի գծային տարածություններ են: Գտնել այդ տարածությունների չափողականությունը և բազիսը

ա) մինչև n-րդ կարգի բազմանդամների բազմությունը,

բ) զույգ կարգի բազմանդամները, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը,

գ) կենտ կարգի բազմանդամները, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը,

դ) մինչև n-րդ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամների բազմությունը,

ե) զույգ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամները, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը,

զ) կենտ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամները, որոնց կարգը չի գերազանցում n-ը, է) ֆունկցիաները, որոնք ներկայացվում են

$$f(x) = e^{ax}(a_o + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

տեսքով, որտեղ a-ն գամված իրական թիվ է:

195. Ապացուցել, որ ֆունկցիաների հետևյալ բազմությունները անվերջ չափանի գծային տարածություններ են

ա) բոլոր բազմանդամների բազմությունը,

բ) բոլոր եռանկյունաչափական բազմանդամների բազմությունը,

գ) հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը:

196. Ապացուցել, որ հետևյալ բազմությունները ենթատարածություններ են համապատասխան գծային տարածություններում: Գտնել դրանց բազիսը և չափողականությունը

ա) n չափանի այն վեկտորների բազմությունը, որոնց առաջին և վերջին կոորդինատները հավասար են,

բ) n չափանի այն վեկտորների բազմությունը, որոնց զույգ կարգահամարով կոորդինատները հավասար են 0-ի,

գ) n չափանի այն վեկտորների բազմությունը, որոնց զույգ կարգահամարով կոորդինատները հավասար են,

դ) n չափանի այն վեկտորների բազմությունը, որոնք ունեն $(\alpha, \beta, \alpha, \beta ...)$ տեսքը:

197. Պարզել թե հետևյալ պնդումներից ո՞րն է ճշմարիտ: Պատասխանը հիմնավորել

ա) Եթե $dimV = n$, ապա գոյություն ունի $n-1$ տարրերից բաղկացած այնպիսի համախումբ, որի տարրերի վրա ձգած գծային թաղանթը համընկնում է V-ի հետ,

բ) եթե $dimV = n$, ապա գոյություն ունի $n+1$ տարրերից բաղկացած այնպիսի համախումբ, որի տարրերի վրա ձգած գծային թաղանթը համընկնում է V-ի հետ,

գ) եթե $dimV = n$, ապա $n+1$ տարր ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն կախյալ է,

դ) եթե $dimV = n$, ապա $n-1$ տարր ունեցող ցանկացած համախումբ գծորեն անկախ է,

ե) եթե $dimV = n$ և $\{e_1, \cdots, e_m\}$-ը բազիս է V-ում, ապա $m > n$:

198. Ցույց տալ, որ եթե $S = \{e_1, \cdots, e_n\}$ համախումբը V գծային տարածության բազիս է և $c \neq 0$-ն իրական թիվ է, ապա $S' = \{ce_1, \cdots, ce_n\}$ համախումբը նույնպես V-ի բազիս է:

199. Տրված է x տարրի կոորդինատները S բազիսում: Գտնել այդ տարրի կոորդինատները տիպային բազիսում

ա) $S = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

բ) $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

գ) $S = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$:

200. Ինչպե՞ս կփոխվի մի բազիսից մյուսին անցման մատրիցը, եթե

ա) տեղերով փոխենք առաջին բազիսի երկու տարրերը,

բ) տեղերով փոխենք երկրորդ բազիսի երկու տարրերը,

գ) բազիսները գրենք հակառակ հաջորդականությամբ:

201. Ցույց տալ, որ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ համախումբը բազիս է և գտնել x վեկտորի կոորդինատները այդ բազիսում, եթե

ա) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$:

բ) $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$:

գ) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

202. Ապացուցել, որ հետևյալ համախմբերը բազիսներ են և գտնել միևնույն վեկտորի կոորդինատների կապը երկու բազիսներում

ա) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

բ) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}:$$

203. Դիցուք $x = (0,3,2)^T$: Գտնել x տարրի կոորդինատները $M_{3,1}$-ի տիպային բազիսում:

204. Դիցուք $p = x^2 + 11x + 4$: Գտնել p տարրի կոորդինատները P_2-ի տիպային բազիսում:

205. Դիցուք P-ն B'' բազիսից B' բազիսին անցման մատրիցն է, իսկ Q-ն B' բազիսից B բազիսին անցման մատրիցը: Գրել B'' բազիսից B-ին անցման մատրիցը:

11. ՄԱՏՐԻՑԻ ՌԱՆԳԸ: ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Սահմանում 17. A մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգն անվանում են A ***մատրիցի ռանգ*** և նշանակում են՝ $rangA$: Եթե մատրիցի բոլոր տարրերը զրո են, ապա համարում են, որ $rangA = 0$: Զրոյից տարբեր ամենաբարձր կարգի մինորներն անվանում են ***բազիսային մինորներ:*** Այն տողերը և սյուները, որոնց հատումից առաջանում է բազիսային մինորը՝ անվանում են ***բազիսային տողեր և բազիսային սյուներ:***

Թեորեմ 27. (***Բազիսային մինորի մասին***) Բազիսային տողերը (սյուները) գծորեն անկախ են: Մատրիցի ցանկացած տող (սյուն) կարելի է ներկայացնել բազիսային տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիայով:

Թեորեմ 28. Մատրիցի ռանգը հավասար է մաքսիմալ թվով գծորեն անկախ տողերի (սյուների) քանակին:

Թեորեմ 29. Որպեսզի քառակուսի մատրիցը լինի հակադարձելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա տողերը (սյուները) լինեն գծորեն անկախ:

Օրինակ 86. Հաշվել մատրիցի ռանգը *եզրող մինորների եղանակով:* Գտնել բազիսային մինորներից որևէ մեկը

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ մատրիցն ունի զրոյից տարբեր տարրեր, ուրեմն՝ $rangA \geq 1$: Գտնենք զրոյից տարբեր որևէ երկրորդ կարգի մինոր (եթե այդպիսին չկա, ուրեմն՝ $rangA = 1$): Մեր օրինակում այդպիսին է վերին ձախ անկյունում գտնվող

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

մինորը: Քանի որ $M_2 \neq 0$, ուրեմն՝ $rangA \geq 2$: M_2 մինորն ունի չորս երրորդ կարգի եզրող մինորներ

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \ M_3'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, M_3^{**} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12:$$

Հետևաբար՝ $rangA \geq 3$: M_3^{**} մինորն ունի միայն մեկ չորրորդ կարգի պարուրող մինոր

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0:$$

Հետևաբար՝ $rangA = 3$, իսկ M_3^{**} մինորը բազիսային մինոր է: Բազիսային են առաջին, երկրորդ, չորրորդ տողերը և սյուները: •

Թեորեմ 30. *Մատրիցի ռանգը չի փոխվի եթե իրականացնենք տարրական տողային կամ սյունային ձևափոխություններ:*

Օրինակ 87. Հաշվել մատրիցի ռանգը: Գտնել բազիսային տողերն ու սյուները

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}:$$

Առաջին սյունը բազմապատկենք $1/2$-ով, երկրորդ սյանը գումարենք ստացված սյունը, այնուհետև ստացված երկրորդ և մատրիցի հինգերորդ սյուները տեղափոխենք

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}:$$

Առանց փոխելու մատրիցի ռանգը վերջին սյունը կարելի է չգրել (ինչու՞): Երկրորդ տողից հանենք կրկնապատիկ առաջինը և երրորդ տողից հանենք առաջինը

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ երրորդ տողը հավասար է երկրորդի կրկնապատիկին, ուրեմն երկրորդ և երրորդ տողերը գծորեն կախյալ են և, օրինակ, երրորդ տողը կարելի է չգրել՝ առանց փոխելու մատրիցի ռանգը

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից՝ $rangA = 2$: Գտնենք բազիսային մինորը: Ամբողջ գործընթացը կրկին պատկերենք և վերջին մատրիցում շրջանագծերով նշենք բազիսային տողերն ու սյուները: Այնուհետև, վերհիշելով բոլոր տեղափոխությունները՝ վերջից շարժվենք սկիզբ

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսով՝ բազիսային են, օրինակ, առաջին և երկրորդ տողերը, առաջին և հինգերորդ սյուները: Բազիսային մինոր է, օրինակ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

մինորը: •

Դիտարկենք n անհայտով m գծային հավասարումների համասեռ համակարգ

$$Ax = o, \tag{19}$$

որտեղ $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $o = (0, \cdots, 0)^T$:

(19) համակարգի լուծումների բազմությունը նշանակենք L-ով:

Թեորեմ 31. L բազմությունը R^n գծային տարածության ենթատարածություն է և $dimL = n - r$, որտեղ r-ը A մատրիցի ռանգն է:

L գծային տարածության ցանկացած բազիս անվանում են ***լուծումների ֆունդամենտալ համախումբ:***

Սահմանում 18. Դիցուք $\{e_1, \cdots, e_{n-r}\}$-ը համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն է, իսկ $c_1, \cdots, c_{n-r}$-ը կամայական հաստատուններ են:

$$x = \sum_{k=1}^{n-r} c_k e_k \tag{20}$$

արտահայտությունն անվանում են համասեռ համակարգի ***ընդհանուր լուծում:***

Այսպիսով.

ա) c_k հաստատունների կամայական արժեքների դեպքում (20)-ով որոշվում է (19) համակարգի որևէ լուծում,

բ) (19) համակարգի կամայական x լուծման համար կգտնվեն այնպիսի $\{c_k\}_{k=1}^{n-r}$ թվեր, որ x-ը ներկայացվում է (20) տեսքով:

Թեորեմ 32. Որպեսզի (19) համասեռ համակարգն ունենա ոչ զրոյական լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որ $rangA < n$:

Դիտարկենք n անհայտով m գծային հավասարումների անհամասեռ համակարգը

$$Ax = b, \tag{22}$$

որտեղ $b = (b_1, \cdots, b_m)^T$:

Սահմանում 19. Համակարգն անվանում են ***համատեղելի***, եթե այն ունի գոնե մեկ լուծում:

Թեորեմ 33. *(Կրոնեկեր-Կապելլի)* (22) համակարգն համատեղելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$rang(A) = rang(A|b) :$$

Թեորեմ 34. (22) համակարգի ընդհանուր լուծումն ունի հետևյալ տեսքը

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n-r} c_k x_k, \tag{23}$$

որտեղ x_0-ն (22)-ի որևէ մասնակի լուծում է, իսկ $\{x_k\}_{k=1}^{n-r}$ համախումբը (22) համակարգին համապատասխանող համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն է:

Օրինակ 88. Գտնել հետևյալ համակարգի ընդհանուր լուծումը

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= -1 : \end{aligned}$$

Հեշտ է ստուգել, որ գործակիցների և ընդլայնված մատրիցների ռանգերն իրար հավասար են, քանի որ ընդլայնված մատրիցի վերջին սյունը բազմապատկած 6-ով հավասար է գործակիցների մատրիցի չորրորդ և հինգերորդ սյուների տարբերությանը: Հետևաբար համակարգը համատեղելի է: Դիտարկենք համապատասխան համասեռ համակարգը

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

և կառուցենք լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը:

Համակարգի մատրիցն է

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

որի ռանգը հավասար է 2-ի ($r = 2$): Լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը բաղկացած է 3 վեկտորներից՝ $n - r = 3$: Գտնենք A մատրիցի որևէ բազիսային մինոր, ասենք՝ հետևյալ երկրորդ կարգի մինորը

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} :$$

Հետևաբար վերջին հավասարումը կարելի է չդիտարկել, իսկ x_1, x_4, x_5 անհայտները համարել ազատ և դրանց պարունակող անդամները տեղափոխել աջ կողմ

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 &= -4x_1 - x_4 - 7x_5 : \end{aligned} \tag{21}$$

Լուծումների ֆունդամենտալ համախմբի տարրերը նշանակենք e_1, e_2, e_3-ով: e_1-ը գտնելու համար (21)-ում տեղադրենք $x_1 = 1, x_4 = x_5 = 0$, կստանանք

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= -2, \\ -2x_2 + 5x_3 &= -4, \end{aligned}$$

որն ունի միակ լուծում (ինչու՞)՝ $x_2 = 2$, $x_3 = 0$: Այսպիսով

$$e_1 = (1, 2, 0, 0, 0)^T :$$

(21) համակարգում տեղադրելով $x_1 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$ կստանանք՝ $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, այսինքն

$$e_2 = (0, 13, 5, 1, 0)^T :$$

Տեղադրելով $x_1 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, կստանանք՝ $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, այսինքն

$$e_3 = (0, 1, -1, 0, 1)^T :$$

Այս եղանակով կառուցված լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն անվանում են *նորմալ ֆունդամենտալ համախումբ*: Համակարգի ընդհանուր լուծումն է՝ $X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$, կամ որ նույնն է

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1, \\ x_2 &= 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 &= 5c_2 - c_3, \\ x_4 &= c_2, \\ x_5 &= c_3 : \end{aligned}$$

Այժմ գտնենք անհամասեռ համակարգի որևէ մասնակի լուծում: Ունենք

$$-x_2+3x_3=1-2x_1+2x_4-4x_5,$$
$$-2x_2+5x_3=1-4x_1-x_4-7x_5:$$

Տեղադրենք՝ $x_1=x_4=x_5=0$

$$-x_2+3x_3=1,$$
$$-2x_2+5x_3=1:$$

Այստեղից կգտնենք՝ $x_2=2, x_3=1$: Մասնակի լուծումն է

$$x_0=(0,2,1,0,0)^T:$$

Սկզբնական համակարգի ընդհանուր լուծումն է

$$x=x_0+c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3: \bullet$$

Թեորեմ 35. Դիցուք A-ն $(n\times n)$ կարգի մատրից է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են. **ա)** A-ն հակադարձելի մատրից է, **բ)** $Ax=b$-ն ունի միակ լուծում ցանկացած $(n\times 1)$ կարգի b սյան համար,
գ) $Ax=o$-ն ունի միայն զրոյական լուծում,
դ) $\det A\neq 0$,
ե) $rangA=n$,
զ) A մատրիցի տողերը գծորեն անկախ են,
է) A մատրիցի սյուները գծորեն անկախ են:

---

206. Հետևյալ մատրիցների ռանգերը հաշվել պարուրող մինորների եղանակով: Գտնել բազիսային մինորներից որևէ մեկը

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$:

207. Հետևյալ մատրիցների ռանգերը հաշվել տարրական տողային կամ սյունային ձևափոխություններով: Գտնել բազիսային մինորներից որևէ մեկը

ա) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 165 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 12 & -51 & 23 & 48 & 94 \\ 25 & 31 & 48 & 73 & -103 \\ 11 & -186 & 21 & 71 & 385 \\ 19 & 203 & 27 & 39 & 111 \end{pmatrix}$:

208. Հաշվել ռանգը՝ կախված λ պարամետրի արժեքներից

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 & 5 \\ \lambda & \lambda & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$:

209. Ապացուցել

ա) $rang(A+B) \leq rang(A) + rang(B)$,

բ) $rang(AB) \leq rang(A)$ և $rang(AB) \leq rang(B)$:

210. Կառուցել լուծումների նորմալ ֆունդամենտալ համախումբը և գտնել ընդհանուր լուծումը

ա) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0:$

բ) $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0,$
$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0,$
$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0:$

գ) $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0,$
$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0,$
$9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0:$

դ) $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0,$
$4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0,$
$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,$
$2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0:$

ե) $6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0,$
$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0,$
$6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0,$
$3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0:$

զ) $5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0:$

211. Ուսումնասիրել համատեղելիությունը, գտնել որևէ մասնակի լուծում և ընդհանուր լուծումը

ա) $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2:$

բ) $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$
$2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1:$

գ) $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7,$
$9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13:$

դ) $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2,$
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3:$

ե) $2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8,$
$4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9,$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7,$
$x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12:$

զ) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2,$
$6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3,$
$9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4:$

է) $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5,$
$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7,$
$4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18:$

ը) $9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4,$
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8:$

բ) $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3,$
$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7:$

ժ) $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2,$
$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8,$
$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2:$

ի) $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2,$
$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3,$
$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9,$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1:$

լ) $6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3,$
$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7,$
$9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2:$

212. Գտնել ընդհանուր լուծումը՝ կախված λ պարամետրի արժեքներից

ա) $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3,$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1,$
$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9,$
$7x_1 - 3x_2 + 74x_3 + 17x_4 = \lambda:$

բ) $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3,$
$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5,$
$x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11,$
$4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2:$

գ) $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2,$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4,$
$4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4,$
$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7:$

դ) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7,$
$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9,$
$\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11:$

ե) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7,$
$8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9:$

զ) $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1:$

t) $\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1:$

n) $(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + (1+\lambda x_2) + x_3 = \lambda,$
$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2:$

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

A մատրիցի ռանգը կարելի է հաշվել $MatrixRank[A]$ հրամանով: Դիտարկենք հետևյալ A մատրիցը

```
In[1]:= A = {{1, 2, 3, 4}, {-1, 0, 3, 2}, {3, 5, 12, -6}};
        % // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Հաշվենք A մատրիցի ռանգը

```
In[3]:= MatrixRank[A]
Out[3]= 3
```

Դիտարկենք հետևյալ A մատրիցը

```
In[4]:= A = {{1, 2}, {1, 2}}
Out[4]= {{1, 2}, {1, 2}}
```

$Ax = o$ համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը կարելի է ստանալ $NullSpace[A]$ հրամանով

```
In[5]:= NullSpace[ A ]
Out[5]= {{-2, 1}}
```

Ֆունդամենտալ համախումբը բաղկացած է միայն մեկ վեկտորից, քանի որ

```
In[7]:= MatrixRank[ A ]

Out[7]= 1
```

Եթե բազիսային վեկտորը բազմապատկենք A մատրիցով, կստանանք զրոյական վեկտոր

```
In[6]:= A . %[[1]]

Out[6]= {0, 0}
```

Ներմուծենք հետևյալ A մատրիցը

```
In[8]:= A = {{a, b, c}, {2 a, 2 b, 2 c}, {3 a, 3 b, 3 c}}

Out[8]= {{a, b, c}, {2 a, 2 b, 2 c}, {3 a, 3 b, 3 c}}
```

և գտնենք համապատասխան համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը

```
In[9]:= NullSpace[A]
```

Out[9]= $\left\{\left\{-\frac{c}{a}, 0, 1\right\}, \left\{-\frac{b}{a}, 1, 0\right\}\right\}$

Եթե A մատրիցը բազմապատկենք ֆունդամենտալ համախմբի վեկտորների գծային կոմբինացիայով, ապա կստացվի զրոյական վեկտորը

```
In[10]:= Simplify[A . (x %[[1]] + y %[[2]])]

Out[10]= {0, 0, 0}
```

12. ԵՆԹԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐ, ՀԱՏՈՒՄ ԵՎ ՈՒՂԻՂ ԳՈՒՄԱՐ

Սահմանում 20. R գծային տարածության $R_1, R_2 \subset R$ ենթատարածությունների *գումար*, *հատում*, *ուղիղ գումար* ասելով հասկանում են համապատասխանաբար հետևյալ բազմությունները

$R_1 + R_2 = \{z \in R,\ z = y + x,\ y \in R_1,\ x \in R_2\}$,

$R_1 \cap R_2 = \{z \in R,\ z \in R_1,$ և $z \in R_2\}$,

$R_1 \oplus R_2 = \{z \in R,$ որը միակ ձևով է ներկայացվում $z = y + x,\ y \in R_1,\ x \in R_2$ տեսքով $\}$:

Թեորեմ 36. Վերջավոր չափանի R գծային տարածության ցանկացած $R_1, R_2 \subset R$ ենթատարածությունների համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$dimR_1 + dimR_2 = dim(R_1 \cup R_2) + dim(R_1 \cap R_2) :$$

Թեորեմ 37. Որպեսզի R գծային տարածությունը ներկայացվի իր $R_1, R_2 \subset R$ ենթատարածությունների ուղիղ գումարի տեսքով անհրաժեշտ է և բավարար, որ

ա) $R_1 \cap R_2 = o$,

բ) $dimR = dimR_1 + dimR_2$:

Օրինակ 89. Դիցուք L-ը բոլոր ազատ եռաչափ վեկտորների գծային տարածությունն է, L_1, L_2-ը այն ազատ վեկտորների գծային տարածություններն են, որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են Oxy և Oxz հարթություններին: Պարզ է, որ $L = L_1 + L_2$, իսկ $L_1 \cap L_2$-ը այն ազատ վեկտորների գծային տարածությունն է, որոնք զուգահեռ են Ox առանցքին: Ցույց տանք, որ $L \neq L_1 \oplus L_2$: Իրոք, ցանկացած $x \in R$ վեկտոր վերլուծենք ըստ $\{e_1, e_2, e_3\}$ տիպային բազիսի

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 :$$

Վերջին արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքերով

$$x = u_1 + u_2,\ u_1 = x_1e_1 + x_2e_2 \in L_1,\ u_2 = x_3e_3 \in L_2$$

և

$$x = v_1 + v_2,\ v_1 = x_2e_2 \in L_1,\ v_2 = x_1e_1 + x_3e_3 \in L_2 :$$

Այսինքն՝ $x = y + z$, $y \in L_1$, $z \in L_2$ ներկայացումը միակը չէ:•

Օրինակ 90. Դիցուք L-ը բոլոր ազատ եռաչափ վեկտորների գծային տարածությունն է, L_1, L_2-ը բոլոր այն ազատ վեկտորների տարածությունները են, որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են Oxy հարթությանը և Oz առանցքին: Պարզ է, որ $dimL_1 = 2$, $dimL_2 = 1$, $L_1 \cap L_2 = o$ և համաձայն թեորեմ 37-ի՝ $L = L_1 \oplus L_2$: •

Օրինակ 91. Հաշվել $L_1 = lin\{a_1, a_2, a_3\}$ և $L_2 = lin\{b_1, b_2, b_3\}$ ենթատարածությունների հատման և գումարի չափողականությունները, եթե

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Կազմենք հետևյալ երեք մատրիցները

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ունենք՝

$$rangA = dimL_1 = 3, \quad rangB = dimL_2 = 2,$$

$$rangC = dim(L_1 + L_2) = 3,$$

որտեղից

$$dim(L_1 \cap L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 + L_2) = 3 + 2 - 3 = 2 : \bullet$$

213. Ցույց տալ, որ գծային տարածության ենթատարածությունների գումարը և հատումը ենթատարածություններ են:

214. Ի՞նչ է իրենից ներկայացնում քառակուսի մատրիցների գծային տարածության P և Q ենթատարածությունների գումարը և հատումը, եթե

ա) P-ն սիմետրիկ մատրիցների ենթատարածությունն է, Q-ն վերին եռանկյունաձև մատրիցների ենթատարածությունն է,

բ) P-ն սիմետրիկ մատրիցների ենթատարածությունն է, Q-ն շեղսիմետրիկ մատրիցների ենթատարածությունն է,

գ) P-ն հետևյալ տեսքի մատրիցների ենթատարածությունն է

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

Q-ն վերին եռանկյունաձև մատրիցների ենթատարածությունն է:

215. Գտնել $L_1 = lin\{a_1, \cdots, a_k\}$, $L_2 = lin\{b_1, \cdots, b_s\}$ ենթատարածությունների գումարի և հատման չափողականությունները, եթե

ա) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

բ) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:

216. Գտնել $L_1 = lin\{a_1, \cdots, a_k\}$, $L_2 = lin\{b_1, \cdots, b_s\}$ ենթատարածությունների գումարի և հատման բազիսները

ա) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, բ) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

գ) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

217. Դիցուք L_1-ը և L_2-ը R գծային տարածության ենթատարածություններ են: Ապացուցել

ա) եթե $L_1 \subseteq L_2$, ապա $dimL_1 \leq dimL_2$, ընդ որում հավասարություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում երբ $L_1 = L_2$,

բ) եթե $dim(L_1 + L_2) = 1 + dim(L_1 \cap L_2)$, ապա $L_1 + L_2$ գումարը հավասար է ենթատարածություններից որևէ մեկին, իսկ $L_1 \cap L_2$ հատումը՝ մյուսին,

գ) եթե $dimL_1 + dimL_2 > dimR$, ապա $L_1 \cap L_2 \neq o$:

218. Ապացուցել, որ $R^2 = R^1 \oplus R^1$:

219. Դիցուք L, L_1, L_2-ը R-ի ենթատարածություններ են: Ապացուցել, որ L-ը այն և միայն այն դեպքում կներկայացվի որպես L_1 և L_2-ի ուղիղ գումար, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները

ա) $L_1 \subset L$ և $L_2 \subset L$,

բ) ցանկացած $x \in L$ տարր միարժեքորեն ներկայացվում է $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$:

220. Ապացուցել, որ $L = L_1 + L_2$ գումարը այն և միայն այն դեպքում կլինի ուղիղ գումար, եթե զրոնե մեկ տարր՝ $x \in L$, միարժեքորեն ներկայացվում է $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ տեսքով:

221. Դիցուք $L = L_1 \oplus L_2$: Ապացուցել, որ $dimL = dimL_1 + dimL_2$, ընդ որում, L_1 և L_2 տարածությունների կամայական բազիսներ միասին կազմում են L-ի բազիս:

222. Ապացուցել, որ ցանկացած $L_1 \subset L$ ենթատարածության համար կգտնվի այնպիսի $L_2 \subset L$ ենթատարածություն, որ $L = L_1 \oplus L_2$:

13. ՄԱՏՐԻՑԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ՎԵԿՏՈՐ: ԿԵԼԻ-ՀԱՄԻԼՏՈՆԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Օրինակ 92. Մի քաղաքում լույս է տեսնում երկու թերթ՝ "Լուրեր" և "Ազդ": "Լուրեր" կարդում են քաղաքի բնակչության 38%-ը, իսկ մնացած մասը կարդում են "Ազդ": Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուրը կարդում է միայն մեկ թերթ: Ամեն տարի "Լուրեր" կարդացողների 10%-ը սկսում է կարդալ "Ազդ", իսկ "Ազդ" կարդացողների միայն 7%-ն է սկսում կարդալ "Լուրեր": Ինչպիսի՞ն կլինի "Ազդ" և "Լուրեր" կարդացողների թիվը տարիներ անց:

Յուրաքանչյուր 100 հոգուց 38-ը կարդում են "Լուրեր", 62-ը՝ "Ազդ": Մեկ տարի անց իրավիճակն այսպիսին է

$0.9 \cdot 38 + 0.07 \cdot 62 = 38.54$ "Լուրեր" կարդացողները

$0.1 \cdot 38 + 0.93 \cdot 62 = 61.46$ "Ազդ" կարդացողները:

Նույնը կարելի է գրել մատրիցային տեսքով

$$P\begin{pmatrix}38\\62\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.9 & 0.07\\0.1 & 0.93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}38\\62\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}38.54\\61.46\end{pmatrix}:$$

v_n վեկտորով նշանակենք n-րդ տարում յուրաքանչյուր 100 բնակչից "Լուրեր" (առաջին կոորդինատ) և "Ազդ" (երկրորդ կոորդինատ) կարդացողների թիվը: Նախորդ հաշվարկը հնարավորություն տվեց գտնել $v_1 = (38.54, 61.46)^T$: Հասկանալի է, որ $v_n = Pv_{n-1}$, որի օգնությամբ կարելի է ստանալ կարդացողների քանակությունը, ասենք, 5-րդ և 7-րդ տարիներին

$$v_5 = \begin{pmatrix}39.67\\60.33\end{pmatrix},\quad v_7 = \begin{pmatrix}40.14\\59.86\end{pmatrix}:$$

Այսպիսով, "Լուրեր" կարդացողների թիվը գնալով աճում է, չնայած որ, տարեցտարի աճի տեմպերը դանդաղում են:

Այժմ ենթադրենք, որ մի որոշ ժամանակ անց կարդացողների քանակը կայունանում է և տարիների ընթացքում չի փոխվում: Դա նշանակում է, որ թերթ կարդացողների քանակը նկարագրվում է մի այնպիսի v վեկտորով, որի համար

$$Pv = v:$$

Դիցուք $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, ընդ որում $\alpha + \beta = 100$: Ունենք

$$P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

որը համարժեք է հետևյալ համակարգին

$$0.9\alpha + 0.07\beta = \alpha$$
$$0.1\alpha + 0.93\beta = \beta :$$

Այստեղից $\alpha \approx 41.18$ և $\beta \approx 58.82$: Փաստորեն, որոշ ժամանակ անց, "Լուրեր" կկարդան 100 հոգուց մոտավորապես 41.18-ը, իսկ "Ազդ"՝ 58.82-ը, որից հետո իրավիճակն այլևս չի փոփոխվի:

Նույն պատասխանին հանգենք այլ դատողություններով: Նշանակենք $u = v_1 - v$: Ունենք

$$u = \begin{pmatrix} 38 \\ 62 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 41.18 \\ 58.82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.18 \\ 3.18 \end{pmatrix} :$$

Հեշտ է ստուգել, որ

$$Pu = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.07 \\ 0.1 & 0.93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.18 \\ 3.18 \end{pmatrix} = 0.83u,$$

$$v_2 = Pv_1 = P(v + u) = v + 0.83u,$$

$$v_3 = Pv_2 = Pv + 0.83Pu = v + (0.83)^2 u,$$

$$v_n = v + (0.83)^{n-1} u, \tag{24}$$

որտեղից

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v :$$

Նկատենք, որ (24) բանաձևը հնարավորություն է տալիս հաշվել v_n-ը՝ առանց կատարելու մատրիցային բազմապատկումներ: Անհրաժեշտ է գտնել միայն v և u վեկտորները:●

Սահմանում 21. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: λ թիվն անվանում են A մատրիցի ***սեփական արժեք,*** եթե

$$Ax = \lambda x$$

հավասարումն ունի ոչ զրոյական լուծում: Այդ լուծումն անվանում են λ սեփական արժեքին համապատասխանող ***սեփական վեկտոր:***

Օրինակ 93. Հաշվել $A^{10}b$ արտադրյալը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

Գտնենք A մատրիցի սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտորները: Դիցուք $x = (x_1, x_2)^T$ և $Ax = \lambda x$: Նույնը գրենք համակարգի տեսքով

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2, \end{aligned}$$

կամ որ նույնն է

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + (3 - \lambda)x_2 &= 0 : \end{aligned}$$

Պահանջենք, որ համակարգի գործակիցների մատրիցը լինի ո՛չ հակադարձելի, հակառակ դեպքում՝ համակարգը կունենա միայն զրոյական լուծում

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 :$$

Այստեղից՝ $\lambda = 2$ կամ $\lambda = 4$-ը մատրիցի սեփական արժեքներն են: Գտնենք սեփական վեկտորները: Եթե $\lambda = 2$, ապա

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0, \end{aligned}$$

որի ընդհանուր լուծումն է

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Մասնավորապես, եթե $c = 1$ ապա $\lambda = 2$ սեփական արժեքին կհամապատասխանի $x = (-1, 1)^T$ սեփական վեկտորը, այսինքն՝ $Ax = 2x$: Եթե $\lambda = 4$, ապա

$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$-x_1 + x_2 = 0,$$

որի ընդհանուր լուծումն է

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Եթե $c = 1$, ապա $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$-ը կլինի $\lambda = 4$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորը, այսինքն՝ $Ay = 4y$: b-ն ներկայացնենք x և y սեփական վեկտորների գծային կոմբինացիայի տեսքով

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y :$$

Որտեղից

$$Ab = -\frac{1}{2}Ax + \frac{3}{2}Ay = -\frac{1}{2}(2x) + \frac{3}{2}(4y) :$$

$$A^2b = -\frac{1}{2}(2^2x) + \frac{3}{2}(4^2Y) :$$

Պարզ է, որ

$$A^{10}b = -\frac{1}{2}(2^{10}x) + \frac{3}{2}(4^{10}y) = \begin{pmatrix} 1572352 \\ 1573376 \end{pmatrix} :$$

Նկատենք, որ

$$A^nb = -\frac{1}{2}(2^nx) + \frac{3}{2}(4^ny)$$

բանաձևի օգնությամբ կարելի է հաշվել A^nb արտադրյալը ցանկացած բնական n-ի համար:●

Սահմանում 22. $p(\lambda) = det(A - \lambda E)$ բազմանդամն անվանում են A մատրիցի ***բնութագրիչ բազմանդամ***, իսկ $p(\lambda) = 0$ հավասարումը՝ A մատրիցի ***բնութագրիչ հավասարում:***

Թեորեմ 38. Որպեսզի λ թիվը լինի A մատրիցի սեփական արժեք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն հանդիսանա բնութագրիչ հավասարման արմատ:

Նկատենք, որ եթե A մատրիցը $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա $p(\lambda)$-ն n-րդ կարգի բազմանդամ է: Ենթադրենք, որ λ_1 թիվը $p(\lambda)$ բնութագրիչ հավասարման արմատ է: Համաձայն Բեզուի թեորեմի $p(\lambda)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $(\lambda - \lambda_1)$ արտահայտության վրա, այսինքն՝ $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)q(\lambda)$, որտեղ $q(\lambda)$-ն $(n-1)$-րդ կարգի բազմանդամ է: Եթե λ_1 թիվը նաև $q(\lambda)$ բազմանդամի արմատ է, ապա նույն եղանակով՝ $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 r(\lambda)$: Այսպես շարունակելով կհանգենք հետևյալ վերլուծությանը

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} s(\lambda),$$

որտեղ $s(\lambda)$-ն $(n - k_1)$-րդ կարգի բազմանդամ է և $s(\lambda_1) \neq 0$: Մասնավորապես, եթե $k_1 = n$, ապա և $s(\lambda) = 1$: k_1 թիվն անվանում են λ_1 սեփական արժեքի ***հանրահաշվական պատիկություն:*** Նախորդ օրինակում $\lambda = 2, \lambda = 4$ սեփական արժեքներն ունեին մեկական պատիկություն: Այսպիսի սեփական արժեքներն անվանում են ***պարզ սեփական արժեքներ:***

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, λ թիվը նրա սեփական արժեքը, իսկ x և y-ը λ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորները: Այդ դեպքում $ax + by$ վեկտորը, ցանկացած a և b $(a^2 + b^2 \neq 0)$ հաստատունների դեպքում, նույնպես կլինի λ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտոր , քանի որ

$$A(ax + by) = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by):$$

λ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորների բազմությունը զրոյական վեկտորի հետ R^n-ի գծային ենթատարածություն է, որն անվանում են λ սեփական արժեքին համապատասխանող ***սեփական ենթատարածություն:*** Սեփական ենթատարածության չափողականությունն անվանում են λ սեփական արժեքի ***երկրաչափական պատիկություն:*** Երկրաչափական պատիկությունը ցույց է տալիս, թե λ սեփական արժեքն ամենաշատը քանի գծորեն անկախ սեփական վեկտոր կարող է ունենալ: λ սեփական արժեքի երկրաչափական պատիկությունը հավասար է $rang(A - \lambda E)$:

Թեորեմ 39. λ սեփական արժեքի երկրաչափական պատիկությունը փոքր է կամ հավասար հանրահաշվական պատիկությունից:

Օրինակ 94. Գտնել հետևյալ մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ստացված պատասխանն օգտագործել $A^{100}b$ արտադրյալը հաշվելու համար, եթե $b = (2, 2, 8)^T$:

Կազմենք բնութագրիչ հավասարումը և գտնենք նրա արմատները

$$det(A - \lambda E) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0,$$

որտեղից՝ $\lambda = 1$ և $\lambda = 3$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքի հանրահաշվական պատիկությունը երկուս է, իսկ $\lambda = 3$-ինը՝ մեկ:

Դիցուք $\lambda = 1$: Լուծենք $(A - E)x = o$ համակարգը

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $rang(A - E) = 1$, ապա լուծումների գծային տարածությունը երկու չափանի է, հետևաբար գոյություն ունեն երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ, որոնք համապատասխանում են $\lambda = 1$ սեփական արժեքին: Այսինքն՝ $\lambda = 1$ սեփական արժեքն ունի երկու երկրաչափական պատիկություն: Հիշեցնենք, որ գծորեն անկախ սեփական վեկտորները կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համախումբ: Որպես գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ կարելի է վերցնել

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$\lambda = 3$ սեփական արժեքի սեփական ենթատարածությունը մեկ չափանի է՝ նրա երկրաչափական պատիկությունը հավասար է մեկի: Նրա սեփական ենթատարածության բազիսն է

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

Առաջարկում ենք ստուգել, որ $\{e_1, e_2, e_3\}$ համախումբը գծորեն անկախ է, հետևաբար այն R^3 գծային տարածության բազիս է, որին պատկանում է b-ն

$$b = e_1 + 2e_2 + 3e_3 :$$

Այսպիսով՝

$$A^{100}b = A^{100}e_1 + 2A^{100}e_2 + 3A^{100}e_3 = e_1 + 2e_2 + 3^{100}3e_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 3^{101} \\ 2 \\ 2 \cdot 3^{101} + 2 \end{pmatrix} : \bullet$$

Թեորեմ 40. Տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են:

Նախորդ օրինակում նկարագրված եղանակը ոչ միշտ է հնարավոր իրականացնել:

Օրինակ 95. Հաշվել $A^{100}b$ արտադրյալը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1$ և $\lambda = 3$: $\lambda = 3$ սեփական արժեքը ունի երկու հանրահաշվական պատիկություն, սակայն նրա սեփական ենթատարածությունը մեկ չափանի է: Հետևաբար այս դեպքում սեփական վեկտորներից կազմված բազիս R^3 տարածությունում հնարավոր չէ կառուցել, որի արդյունքում $b \in R^3$ վեկտորը չի ներկայացվում սեփական վեկտորների գծային կոմբինացիայով և, ուրեմն, նախորդ օրինակում նկարագրված եղանակը կիրառել հնարավոր չէ: Այսպիսով, նկարագրված եղանակը հնարավոր է կիրառել միայն այն դեպքում, երբ բոլոր սեփական արժեքների հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունները համընկնում են:$\bullet$

Որոշ մատրիցների սեփական արժեքները առանձնապես հեշտ է հաշվել՝ անկախ մատրիցի կարգից:

Թեորեմ 41. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի եռանկյունաձև մատրից է, ապա գլխավոր անկյունագծի տարրերը նրա սեփական արժեքներն են:

Օրինակ 96. Գտնել հետևյալ մատրիցի սեփական արժեքները

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)\lambda(-4-\lambda)(3-\lambda),$$

որտեղից՝ $\lambda = -1, 2, 0, -4, 3$: •

Օրինակ 97. Գտնել հետևյալ մատրիցի սեփական արժեքները

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} :$$

$\lambda = 2, 1, -3$:•

Թեորեմ 42. *(Կեյլի-Համիլտոն)* Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է և $p(\lambda) = 0$ հավասարումը նրա բնութագրիչ հավասարումն է: Այդ դեպքում $p(A) = O$:

Օրինակ 98. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda = 0 :$$

Հաշվենք

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Կեյլի-Համիլտոնի թեորեմը հնարավորություն է տալիս A մատրիցի A^k աստիճաններն արտահայտել ավելի ցածր կարգի աստիճաններով, որտեղ $k > n$,:

Օրինակ 99. Դիցուք A-ն (2×2) կարգի մատրից է և

$$c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

նրա բնութագրիչ հավասարումն է: Համաձայն Կեյլի-Համիլտոնի թեորեմի

$$c_0 E + c_1 A + A^2 = 0,$$

որտեղից

$$A^2 = -c_1 A - c_0 E :$$

Այս հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք A-ով

$$A^3 = -c_1 A^2 - c_0 A :$$

Շարունակելով՝

$$A^4 = -c_1 A^3 - c_0 A^2$$

և այլն:

Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է $\lambda^2 - 5\lambda = 0$: Հետևաբար $A^2 - 5A = 0$ և $A^3 = 5A^2$: Այսպիսով

$$A^2 = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{pmatrix} :$$

Կարելի է այսպես շարունակել և հաշվել ավելի բարձր կարգի աստիճանները: •

Սահմանում 23. A մատրիցի սեփական արժեքների բազմությունն անվանում են A մատրիցի *սպեկտր* և նշանակում են $\lambda(A)$-ով:

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A)\}$$

թիվն անվանում են A մատրիցի *սպեկտրային շառավիղ*:

---

223. Գտնել հետևյալ մատրիցների սեփական արժեքները և սեփական ենթատարածությունների բազիսները

ա) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

224. Գտնել հետևյալ մատրիցների սեփական արժեքները և սեփական ենթատարածությունների բազիսները

ա) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$:

225. Գտնել հետևյալ մատրիցների սեփական արժեքները և սեփական ենթատարածությունների բազիսները

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

226. Ցույց տալ, որ $\lambda = 0$-ն A-ի սեփական արժեք է, այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն հակադարձելի չէ:

227. Ցույց տալ, որ (2×2) կարգի մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0 :$$

228. Ցույց տալ, որ եռանկյունաձև մատրիցի սեփական արժեքները գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող տարրերն են:

229. Ցույց տալ, որ եթե λ-ն A-ի սեփական արժեքն է, ապա λ^2-ն A^2 մատրիցի սեփական արժեքն է: Եվ ընդհանրապես՝ λ^n-ը A^n-ի սեփական արժեքն է ցանկացած բնական n-ի համար:

230. Հաշվել $A^{10}b$ արտադրյալը, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

բ) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$

231. Հաշվել $A^n b$ արտադրյալը ցանկացած բնական n-ի համար, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

բ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$

232. Ստուգել Կելի-Համիլտոնի թեորեմը

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

մատրիցի համար:

233. Օգտվելով Կելի-Համիլտոնի թեորեմից հաշվել

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցի A^2, A^3, A^4, A^5 աստիճանները:

234. Օգտվելով Կելի-Համիլտոնի թեորեմից հաշվել

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

մատրիցի A^3, A^4 աստիճանները:
235. Դիցուք $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ թվերը $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի իրարից տարբեր սեփական արժեքներն են: Ապացուցել, որ

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$Tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n :$$

236. Որո՞նք են ինքնանման մատրիցների հնարավոր սեփական արժեքները:
237. Որո՞նք են ինքնաչեզոքացնող մատրիցների հնարավոր սեփական արժեքները:
238. Դիցուք $A \in M_{n,n}$, $det(A) \neq 0$ և λ_i թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են: Ապացուցել, որ λ_i^{-1}-ը A^{-1} մատրիցի սեփական արժեքներն են: Ի՞նչ կարելի է ասել սեփական վեկտորների մասին: **239.** Դիցուք λ_i թվերը $A \in M_{n,n}$ մատրիցի սեփական արժեքներն են: Ապացուցել, որ λ_i^k թվերը A^k մատրիցի սեփական արժեքներն են:
240. Ցույց տալ, որ A և A^T մատրիցներն ունեն նույն սեփական արժեքները: Ի՞նչ կարելի է ասել սեփական վեկտորների մասին:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը

```
In[1]:= A = (2  1
             3 -1)
Out[1]= {{2, 1}, {3, -1}}
```

Կազմենք նրա բնութագրիչ բազմանդամը, որտեղ λ-ն անկախ փոփոխական է

```
In[2]:= p[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ]
Out[2]= -5 - λ + λ^2
```

Գտնենք բնութագրիչ բազմանդամի արմատները, որոնք էլ կլինեն A մատրիցի սեփական արժեքները

```
In[3]:= Roots[p[λ] == 0, λ]
```

Out[3]= $\lambda == \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right) \,||\, \lambda == \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right)$

Մատրիցի սեփական արժեքները հաշվենք միանգամից

```
In[4]:= {λ1, λ2} = Eigenvalues[A]
```

Out[4]= $\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right)\right\}$

Գտնենք յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորները

```
In[5]:= {u, v} = Eigenvectors[A]
```

Out[5]= $\left\{\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{21}\right), 1\right\}, \left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1-\sqrt{21}\right), 1\right\}\right\}$

Սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները կարելի է գտնել միանգամից՝ մեկ հրամանի օգնությամբ

```
In[6]:= Eigensystem[A]
```

Out[6]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right)\right\}, \left\{\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{21}\right), 1\right\}, \left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1-\sqrt{21}\right), 1\right\}\right\}\right\}$

Սկզբում գրված են սեփական արժեքները, այնուհետև, յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորները: Ստուգենք, որ $Au = \lambda_1 u$ և $Av = \lambda_2 v$

```
In[7]:= Expand[{A.u - λ1 u, A.v - λ2 v}]
Out[7]= {{0, 0}, {0, 0}}
```

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը

```
In[8]:= F = {{0.4, 0.6}, {0.525, 0.475}}
Out[8]= {{0.4 , 0.6 }, {0.525 , 0.475 }}
```

և հաշվենք նրա երրորդ աստիճանը

```
In[9]:= MatrixPower[F, 3]
Out[9]= {{0.465625 , 0.534375 }, {0.467578 , 0.532422 }}
```

Նույնը կարելի է ստանալ այլ եղանակով

```
In[10]:= F . F . F
Out[10]= {{0.465625 , 0.534375 }, {0.467578 , 0.532422 }}
```

$MatrixPower[F]$ հրամանը ավելի արդյունավետ է աշխատում հատկապես բարձր կարգի աստիճանները հաշվելիս, քան մատրիցային արտադրյալներ հաշվելու եղանակը: Հաշվենք, օրինակ, տրված մատրիցի միլիոներորդ աստիճանը

```
In[11]:= MatrixPower[F, 10^6]
Out[11]= {{0.466667 , 0.533333 }, {0.466667 , 0.533333 }}
```

ՄԱՐԿՈՎՅԱՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐ

Վերադառնանք օրինակ 92-ին և այն ուսումնասիրենք հավանականային տեսանկյունից: Կարելի է ասել, որ Սիս քաղաքում յուրաքանչյուր թերթ կարդացող կարող է գտնվել միայն երկու տարբեր վիճակներում՝ 1 վիճակում, եթե նա կարդում է "Լուրեր" և 2 վիճակում, եթե կարդում է "Ազդ": Ասելով, որ "Լուրեր" կարդացողների 10%-ը յուրաքանչյուր տարի սկսում է կարդալ "Ազդ" նշանակում է, որ 1 վիճակից 2 վիճակին անցնելու հավանականությունը 0.1 է, որը P մատրիցում p_{21} տարրն է: Ընդհանրապես, p_{ij} տարրը ցույց է տալիս j վիճակից i վիճակին անցնելու հավանականությունը: Ինչպես գիտենք, P մատրիցն անվանում են ***հավանականային*** կամ ***ստոխաստիկ մատրից:*** Այն պրոցեսները, որոնց հավանականային մատրիցի տարրերը ժամանակի ընթացքում չեն փոփոխվում, անվանում են ***Մարկովյան պրոցեսներ:***

Մարկովյան պրոցեսներում համակարգի վիճակը նկարագրվում է n չափանի վեկտորով, որն անվանում են ***հավանականային վեկտոր:*** Եթե հավանականային վեկտորը նշանակենք v_n-ով, ապա

$$v_1 = Pv_0,\ v_2 = Pv_1 = P^2v_0, \cdots, v_n = P^nv_0 :$$

$v_0, v_1, \cdots, v_n$ հաջորդականությունն անվանում են ***Մարկովյան շղթա:***

Թեորեմ 43. Եթե $p_{ij} > 0$, ապա գոյություն ունի միակ x հավանականային վեկտոր, որի համար $Pv = v$: Եթե v_0-ն ցանկացած հավանականային վեկտոր է, ապա

$$\lim_{n\to\infty} P^nv_0 = v :$$

v-ն անվանում են ***հավասարակշռության վեկտոր:***

Օրինակ 100. Վարձով մեքենաներ տրամադրող ֆիրման ունի երեք գրասենյակներ A, B, C քաղաքներում: Աղյուսակում ներկայացված են տվյալներ, թե ինչպիսի հավանականությամբ մի քաղաքում վարձված ավտոմեքենան կհայտնվի մյուս երկու քաղաքներում կամ կմնա նույն քաղաքում: Ենթադրվում է, որ ֆիրման մեքենաների տեղափոխմամբ չի զբաղվում և օրվա վերջում մեքենաները հանգրվանում են A, B, C քաղաքներից որևէ մեկում:

		վերադարձել են	
վարձված են	A	B	C
A	0.7	0.1	0.2
B	0.2	0.6	0.2
C	0.5	0.3	0.2

Պահանջվում է պարզել մեքենաների տեղաբաշխումն օրեր անց: Հավանականային վեկտորը նշանակենք v_n-ով, որը ցույց է տալիս, թե n օր անց ինչպիսին է մեքենաների տեղաբաշխումը: Ենթադրենք սկզբում A, B, C քաղաքներում մեքենաների քանակը եղել է համապատասխանաբար a_0, b_0, c_0, իսկ n օր անց՝ a_n, b_n, c_n: Այսինքն

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} :$$

Առաջին օրվա վերջում

$$a_1 = 0.7a_0 + 0.2b_0 + 0.5c_0,$$

$$b_1 = 0.1a_0 + 0.6b_0 + 0.3c_0,$$

$$c_1 = 0.2a_0 + 0.2b_0 + 0.2c_0 :$$

Հավանականային մատրիցն է

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} :$$

Ընդհանրապես $v_n = Pv_{n-1}$: ●

ԱՆԴՐԱԴԱՐՁ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ

k-րդ կարգի ցանկացած գծային անդրադարձ առնչություն ունի հետևյալ տեսքը

$$f(n+1) = a_n f(n) + a_{n-1} f(n-1) + \cdots + a_{n-k} f(n-k) + b : \quad (25)$$

Եթե $b=0$, ապա

$$f(n+1)=a_n f(n)+a_{n-1}f(n-1)+\cdots+a_{n-k}f(n-k), \qquad (26)$$

անդրադարձ առնչությունն անվանում են համասեռ:

Օրինակ 101. Դիտարկենք Ֆիբոնաչիի անդրադարձ առնչությունը

$$f(n+1)=f(n)+f(n-1),\ f(0)=1,\ f(1)=1,$$

որը կարելի է գրել նաև մատրիցային տեսքով

$$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{1-\sqrt5}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{1+\sqrt5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix}:$$

Երկրորդ տողից կստանանք

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]: \bullet$$

V-ով նշանակենք այն ֆունկցիաների գծային տարածությունը, որոնք բնական թվերի բազմությունն արտապատկերում են իրական թվերի բազմությանը: S-ով նշանակենք (26) համասեռ առնչության լուծումների բազմությունը: Պարզ է, որ $S\subset V$ և S-ը դատարկ չէ, քանի որ $f\equiv 0$ ֆունկցիան (26)-ի լուծում է: Դիցուք $f\in S$: Դիտարկենք

$$f \overset{T}{\longmapsto} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(k) \end{pmatrix}$$

գծային արտապատկերումը: Քանի որ (26) առնչության լուծումը միարժեքորեն որոշվում է $f(0),\cdots,f(k)$ արժեքներով, ապա T օպերատորն իրականացնում է փոխմիարժեք արտապատկերում՝ $T : S \to R^{k+1}$ և ուրեմն՝ $dimS = k+1$: Սա նշանակում է, որ (26)-ի լուծումների բազմությունը նկարագրելու համար պետք է գտնել S տարածության բազիսը: Այդ նպատակով (26)-ը գրենք մատրիցային տեսքով

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-k+1} & a_{n-k} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ \vdots \\ f(n-k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \\ \vdots \\ f(n-k+1) \end{pmatrix}:$$

Ստացված մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$\lambda^{k+1} + a_n\lambda^k + a_{n-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_{n-k} = 0:$$

Սահմանափակվենք այն դեպքի քննարկմամբ, երբ բնութագրիչ բազմանդամն ունի միայն պարզ իրական արմատներ՝ $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$: Դիտարկենք λ_j^n, $j = 1, \cdots, k+1$ ֆունկցիաները: Կարելի է ցույց տալ, որ λ_j^n ֆունկցիաները (26)-ի լուծում են: Ավելին՝ $\{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_{k+1}^n\}$ համախումբը գծորեն անկախ է: Ուրեմն, (26) հավասարման ցանկացած լուծում կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$f(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_{k+1}\lambda_{k+1}^n:$$

$c_1, \cdots, c_{k+1}$ հաստատունները կգտնվեն $f(0), \cdots, f(k)$ տվյալներից:

Օրինակ 102. Կրկին դիտարկենք Ֆիբոնաչիի անդրադարձ առնչությունը

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1), \; f(0) = 1, \; f(1) = 1,$$

որը գրենք մատրիցային տեսքով

$$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}:$$

Ստացված մատրիցի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} :$$

Այստեղից

$$f(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n :$$

c_1, c_2 հաստատունները գտնելու համար օգտվենք $f(0) = f(1) = 1$ պայմաններից, որտեղից

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} : \bullet$$

Դիտարկենք անհամասեռ առնչություն

Օրինակ 103.

$$f(n+1) = 2f(n) + 1, \quad f(1) = 1 :$$

Նախ ուսումնասիրենք համասեռը

$$0 = -f(n) + 2f(n-1) :$$

Վարվելով ինչպես նախորդ օրինակում

$$f(n) = c_1 2^n :$$

Գտնենք անհամասեռ առնչության որևէ մասնակի լուծում

$$f(n) = -1,$$

որտեղից համասեռի ցանկացած լուծում ունի հետևյալ տեսքը

$$f(n) = c_1 2^n - 1 :$$

Օգտվելով $f(1) = 1$ պայմանից, կստանանք $c_1 = 1$ և $f(n) = 2^n - 1$:

●

241. Հետևյալ վարժությունները վերաբերում են օրինակ 100-ին

ա) Ենթադրենք երկուշաբթի առավոտյան A, B, C քաղաքներում եղել են հավասար քանակությամբ ավտոմեքենաներ: Ինչպիսի՞ն կլինի մեքենաների տեղաբաշխումը երեքշաբթի, չորեքշաբթի:

բ) Գտնել P հավանականային մատրիցի սեփական վեկտորները և պատասխանը օգտագործել գտնելու համար մեքենաների տեղաբաշխումը երկու շաբաթ անց:

գ) Ինչպիսի՞ն է մեքենաների տեղաբաշխումը հավասարակշռության վիճակում:

դ) Առանց օգտվելու թեորեմ 43-ից ցույց տալ, որ համակարգը միշտ կգա նույն հավասարակշռության վիճակին՝ անկախ սկզբնական վիճակից:

242. Գտնել հետևյալ մատրիցների հավասարակշռության վեկտորները`

ա) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$:

243. Ցույց տալ, որ ցանկացած (2×2) կարգի P հավանականային մատրիցի համար $x = (1, -1)^T$-ն սեփական վեկտոր է: Ապացուցել թեորեմ 43-ը 2×2 կարգի մատրիցների համար:

244. Դիցուք համակարգի հավանականային մատրիցն է

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

և $v_0 = (1, 0)^T$: Հաշվել $P^n v_0$ վեկտորները մինչև դրանք համընկնեն հավասարակշռության վեկտորի հետ՝ ստորակետից հետո երկու նիշի ճշտությամբ:

245. Լուծել նախորդ խնդիրը, եթե

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}:$$

246. Նախորդ երկու խնդիրներում ապացուցել, որ $(1, -1)^T$-ը սեփական վեկտոր է: Գտնել համապատասխան սեփական արժեքը: Ինչպես օրինակ 92-ում, ցույց տալ, որ այդ երկու դեպքերում թեորեմ 43-ը ճիշտ է:

247. Եթե ես այսօր ունեմ լավ տրամադրություն, ապա 80% հավանականությամբ ես վաղն էլ կունենամ լավ տրամադրություն: Եթե ես այսօր մռայլ եմ, ապա 60% հավանականությամբ ես վաղը կունենամ լավ տրամադրություն:

ա) Գրել համակարգի հավանականային մատրիցը:

բ) Եթե ես այսօր ունեմ լավ տրամադրություն, ապա ինչպիսի՞ հավանականությամբ երեք օր հետո իմ տրամադրությունը լավ կլինի:

գ) Ընդհանրապես, ինչպիսի՞ տոկոսային հարաբերությամբ ես ունեմ լավ տրամադրություն:

248. Շուկայում կան հացահատիկ վաճառող երեք ֆիրմաներ՝ X, Y, Z: Ամեն ամիս X-ից գնումներ կատարողների 40%-ը սկսում են գնումներ կատարել կամ Y-ից կամ Z-ից (հավասար քանակությամբ): Նմանապես՝ Y-ի 30%-ը և Z-ի 20%-ը սկսում են գնումներ կատարել մյուսներից (հավասար քանակությամբ):

ա) Գրել հավանականային մատրիցը:

բ) Ի վերջո շուկան ինչպիսի՞ հարաբերակցությամբ կբաշխվի:

249. Ցույց տալ, որ ցանկացած միավոր մատրից հավանականային մատրից է: Թեորեմ 43-ի պնդումներից ո՞րը ճիշտ չէ միավոր մատրիցի համար:

250. Ցույց տալ, որ հավանականային մատրիցների արտադրյալը հավանականային մատրից է:

251. Դիցուք

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}:$$

ա) Բավարարու՞մ է P մատրիցը թեորեմ 43-ի պահանջներին:

բ) Ցույց տալ, որ P^2 մատրիցը բավարարում է թեորեմ 43-ի պահանջներին: Օգտագործելով այս արդյունքը՝ ցույց տալ, որ բոլոր v հավանականային վեկտորների համար

$$\lim_{n\to\infty} P^n v = x,$$

որտեղ x-ը միակ հավանականային վեկտորն է, որի համար $P^2x = x$ և $Px = x$:

252. Լուծել հետևյալ անդրադարձ առնչությունները

ա) $f(n+1) = 5f(n) - 6f(n-1),\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,$

բ) $f(n+1) = 4f(n-1),\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,$

գ) $f(n+1) = 6f(n) + 7f(n-1) + 6f(n-2),\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 3$:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

MATHEMATICA ծրագրում անդրադարձ առնչությունները կարելի է լուծել $RSolve[eqns, f[n], n]$ հրամանով: Լուծենք

$$a(n) = 3a(n-1) + 1,\ a(1) = 1$$

անդրադարձ առնչությունը:

Ունենք

```
In[1]:= RSolve[{a[n] == 3 a[n-1]+1, a[1]==1}, a[n], n]
```

Out[1]= $\left\{\left\{a[n] \to \frac{1}{2}\left(-1+3^{n}\right)\right\}\right\}$

Լուծենք մեկ այլ առնչություն

```
In[2]:= RSolve[{f[n] + f[n - 1] == f[n + 1], f[0] == 0, f[1] == 1},
          f[n], n]
```

Out[2]= $\left\{\left\{f[n] \to -\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$

14. ՄԱՏՐԻՑԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՔԻ

Երկու n-րդ կարգի A և B քառակուսի մատրիցներ անվանում են ***նման***, եթե կգտնվի P հակադարձելի մատրից այնպիսին, որ

$$B = PAP^{-1} :$$

երկու նման մատրիցներ ունեն նույն բնութագրիչ հավասարումները:

Դիցուք A-ն քառակուսի մատրից է: Եթե կգտնվի այնպիսի P հակադարձելի մատրից, որ $P^{-1}AP$ մատրիցն անկյունագծային է, ապա ասում են, որ A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Դիցուք A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, այսինքն՝

$$P^{-1}AP = D,$$

որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է: Այստեղից A մատրիցի համար կստանանք հետևյալ վերլուծությունը

$$A = PDP^{-1}:$$

Թեորեմ 44. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են.

- A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի,
- A-ն ունի n հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ:

Թեորեմ 45. Եթե A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, ապա P մատրիցի սյուները՝ A մատրիցի գծորեն անկախ սեփական վեկտորներն են, իսկ $P^{-1}AP$ անկյունագծային մատրիցի գլխավոր անկյունագծի տարրերը A-ի սեփական արժեքներն են:

Օրինակ 104. Դիտարկենք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

A-ի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1; 5$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքի սեփական ենթատարածության բազիսն է $p_1 = (1, 1, 0)^T$, իսկ $\lambda = 5$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածության բազիսն է $p_2 = (-1, 1, 0)^T$, $p_3 = (0, 0, 1)^T$ տարրերի համախումբը: Ինչպես հայտնի է, p_1, p_2, p_3 համախումբը գծորեն անկախ է: Հետևաբար

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

և

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Նկատենք, որ P մատրիցի սյուները կարելի է տեղափոխել: •

Այսպիսով, A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, եթե յուրաքանչյուր սեփական արժեքի հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունները համընկնում են: Բացի այդ, քանի որ տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա ճիշտ է հետևյալը.

Թեորեմ 46. Եթե A $(n \times n)$ կարգի մատրիցն ունի n իրարից տարբեր սեփական արժեքներ, ապա այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Օրինակ 105. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցն ունի երեք իրարից տարբեր սեփական արժեքներ՝ $\lambda = 4; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$ և ուրեմն այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Հաշվել այն P մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի:•

Թեորեմ 46-ի հակառակը պնդումը ճիշտ չէ.

Օրինակ 106. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

Չնայած A-ի $\lambda = 3$ սեփական արժեքը կրկնապատիկ է, սակայն այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի (այն արդեն անկյունագծային է):•

Օրինակ 107. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցն ունի երկու պատիկությամբ $\lambda = -2$ սեփական արժեք: Սակայն այս սեփական արժեքի սեփական ենթատարածությունը մեկ չափանի է, հետևաբար երկու գծորեն անկախ սեփական ֆունկցիա հնարավոր չէ գտնել: Մատրիցը հնարավոր չէ բերել անկյունագծային տեսքի:•

Օրինակ 108. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի համար իրականացնել $A = PDP^{-1}$ վերլուծություն, որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է: Ստացված վերլուծության օգնությամբ հաշվել A^{100}-ը: A մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1; 3$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանում են երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ՝ $x_1 = (-1,2,0)^T$, $x_2 = (0,0,1)^T$, իսկ $\lambda = 3$ սեփական արժեքին միայն մեկ՝ $y = (1,0,2)^T$: Այսպիսով

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

Այսինքն $A = PDP^{-1}$: Այստեղից $A^2 = PD^2P^{-1}$ և, ընդհանրապես, $A^n = PD^nP^{-1}$: Հետևաբար՝

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{100} & \frac{1}{2}(3^{100}-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(3^{100}-1) & 3^{100}-1 & 1 \end{pmatrix} : \bullet$$

Սահմանում 24. $A = (a_{ij})$ մատրիցն անվանում են ***ոչ բացասական մատրից*** $(A \geq 0)$, եթե $a_{ij} \geq 0$ և ***դրական մատրից*** $(A > 0)$, եթե $a_{ij} > 0$:

Թեորեմ 47. ***(Պերրոն)*** Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի դրական մատրից է, ապա

- $\rho(A) > 0$,
- $\rho(A)$-ն A մատրիցի սեփական արժեք է,
- գոյություն ունի այնպիսի $x > 0$, $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $x_i > 0$, որի համար $Ax = \rho(A)x$:

Այս թեորեմը ընդհանրացվում է նաև ոչ բացասական մատրիցների համար՝ լրացուցիչ ենթադրությամբ.

Թեորեմ 48. ***(Ֆրոբենիուս-Պերրոն)*** Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի ոչ բացասական մատրից է և ինչ-որ բնական m թվի համար $A^m > 0$, ապա ճիշտ են նախորդ թեորեմի պնդումները:

Դիտարկենք այս թեորեմների կիրառություններից.

Օրինակ 109. Վիճակագրական ֆիզիկայում անհրաժեշտություն է առաջանում գնահատել հետևյալ մեծությունը

$$Z = Tr(AG^N B)$$

մեծ N-երի դեպքում: Z-ն անվանում են վիճակագրական գումար: Ենթադրվում է, որ G-ն $(n \times n)$ կարգի դրական մատրից է, իսկ A, B-ն համապատասխանաբար $(1 \times n)$ և $(n \times 1)$ կարգի մատրիցներ: Պարզության համար ենթադրենք, որ G մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի՝ $G = PLP^{-1}$: Ունենք

$$Z = Tr(APL^N P^{-1}B) = Tr(L^N P^{-1}BAP) = Tr(L^N D),$$

որտեղ $D \equiv P^{-1}BAP$: D մատրիցի տարրերը նշանակենք d_{ij}-ով: $\rho(G), \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$-ով նշանակենք G մատրիցի սեփական արժեքները

$$Z = \rho(G)^N d_{11} + \lambda_1^N d_{22} + \cdots + \lambda_{n-1}^N d_{nn} =$$

$$\rho(G)^N \left(d_{11} + \left(\frac{\lambda_1}{\rho(G)}\right)^N d_{22} + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\rho(G)}\right)^N d_{nn} \right):$$

Քանի որ

$$\left|\frac{\lambda_i}{\rho(G)}\right| < 1,$$

ապա

$$Z \sim \rho(G)^N d_{11}, \ N \to \infty:$$

Ընթերցողին առաջարկում ենք նույն եղանակով ուսումնասիրել

$$\begin{pmatrix} 1 & \sigma s \\ 1 & s \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v & v & v \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

մատրիցները, որտեղ $\sigma, s, v, q > 0$: •

253. Գտնել այն P մատրիցը, որը տրված A մատրիցը բերում է անկյունագծային տեսքի: Հաշվել $P^{-1}AP$ արտադրյալը

ա) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, դ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

254. Պարզել, թե հետևյալ A մատրիցներից որը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Դրական պատասխանի դեպքում հաշվել $P^{-1}AP$ արտադրյալը

ա) $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, դ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

ե) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, զ) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

255. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է և P-ն հակադարձելի է: Ապացուցել հետևյալ նույնությունները

ա) $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$,

բ) $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ ցանկացած բնական k-ի համար:

256. Օգտվելով նախորդ խնդրից հաշվել

ա) A^{10}-ը եթե $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

բ) A^6-ը եթե $A = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$,

գ) A^8-ը եթե $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$:

257. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ

ա) A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, եթե $(a-d)^2+4bc>0$,

բ) A-ն չի կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, եթե $(a-d)^2+4bc<0$:

258. Դիցուք A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի և այն ունի միայն ± 1 սեփական արժեքներ: Ցույց տալ, որ $A^2 = E$:

259. Դիցուք A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի և այն ունի միայն $\lambda = 0; 1$ սեփական արժեքներ: Ցույց տալ, որ $A^2 = A$:

260. Դիցուք A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Ցույց տալ, որ եթե A-ն ունի միայն $\lambda = \pm 1$ սեփական արժեքներ, ապա $A = A^{-1}$:

261. Ցույց տալ, որ ոչ զրոյական նիլպոտենտ մատրիցները չեն բերվում անկյունագծային տեսքի:

262. Ցույց տալ, որ եթե A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի և գոյություն ունի A^{-1}-ը, ապա այն նույնպես կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

A մատրիցը բերենք անկյունագծային տեսքի: Անկյունագծային մատրիցի գլխավոր անկյունագիծը կազմված է մատրիցի սեփական արժեքներից

In[12]:=

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \; // \; \mathbf{N};$$

```
{values, vectors} = Eigensystem[A];
diag = DiagonalMatrix[values];
% // MatrixForm
```

Out[15]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 14.9901 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.72699 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.27955 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.562502 \end{pmatrix}$$

Այն մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի կազմված է A մատրիցի սեփական վեկտորներից

In[16]:=
```
ch = Transpose[vectors];
% // MatrixForm
```
Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.278736 & -0.217944 & -0.847457 & -0.713683 \\ 0.411127 & 0.454619 & 0.407251 & -0.406348 \\ 0.797578 & -0.796445 & 0.179532 & -0.00537884 \\ 0.342272 & 0.333911 & 0.289363 & 0.570534 \end{pmatrix}$$

Ստուգենք

In[18]:=
```
Chop[ch.diag.Inverse[ch]] // MatrixForm
```
Out[18]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 2. & 3. & 2. \\ 5. & 3. & 1. & 8. \\ 6. & 2. & 8. & 9. \\ 4. & 2. & 1. & 7. \end{pmatrix}$$

Տրված մատրիցը կարելի է միանգամից բերել անկյունագծային տեսքի՝ օգտվելով $JordanDecomposition[A]$ հրամանից, որի պատասխանը երկու մատրիցներ են՝ j և s: Տրված A մատրիցը ներկայացվում է $A = jsj^{-1}$ տեսքով: Եթե A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, ապա s-ը անկյունագծային մատրից է

In[19]:=
```
A = {{4, 2, 2}, {2, 4, 2}, {2, 2, 4}};
{j, s} = JordanDecomposition[A];
{j // MatrixForm, s // MatrixForm}
```
Out[21]=

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

Ստուգենք

In[22]:=
```
(j.s.Inverse[j] // Chop) == A
```
Out[22]=
```
True
```

Գ Լ Ո Ւ Խ   Ե Ր Ր Ո Ր Դ

ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

15. ՍԿԱԼՅԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ: ԿՈՇԻ-ՇՎԱՐՑԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՆՈՐՄ: ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 25. X գծային տարածությունն անվանում են *էվկլիդեսյան տարածություն,* եթե

ա) ցանկացած $x, y \in X$ տարրերի համապատասխանության մեջ է դրվում իրական թիվ, որը նշանակում են (x, y)-ով և անվանում են x, y տարրերի *սկալյար արտադրյալ*,

բ) վերը նշված համապատասխանությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով ցանկացած $x, y \in X$ տարրերի և $\lambda \in R^1$ թվի համար

1.$(x, y) = (y, x)$,

2.$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

3.$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

4.$(x, x) > 0$, եթե $x \neq o$, և $(o, o) = 0$:

Օրինակ 110. R^n գծային տարածությունում $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ և $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

որն անվանում են *էվկլիդեսյան կամ տիպային սկալյար արտադրյալ:* Ցույց տանք, որ այն օժտված է վերևում սահմանված բոլոր հատկություններով

1. $\quad (x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = (y, x)$:

2. Եթե $z = (z_1, \cdots, z_n)$, ապա

$$(x + y, z) = (x_1 + y_1) z_1 + \cdots + (x_n + y_n) z_n =$$

$$= (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) =$$

$$= (x,z) + (y,z) :$$

3. $(\lambda x, y) = (\lambda x_1)y_1 + \cdots + (\lambda x_n)y_n = \lambda(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) = \lambda(x,y)$:

4. $(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

որտեղից հետևում է վերջին հատկությունը:

R^n գծային տարածությունը էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալով, կնշանակենք E^n-ով:•

R^n-ում սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել նաև այլ կերպ:

Օրինակ 111. R^2 գծային տարածությունում $x = (x_1, x_2)$ և $y = (y_1, y_2)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 :$$

Ցույց տանք, որ այն օժտված է 1-4 հատկություններով:

1. $(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 = y_1x_1 + 2y_2x_2 = (y,x)$:

2. Եթե $z = (z_1, \cdots, z_n)^T$, ապա

$$(x+y,z) = (x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 =$$

$$= (x_1z_1 + 2x_2z_2) + (y_1z_1 + 2y_2z_2) =$$

$$(x,z) + (y,z) :$$

3. $(\lambda x, y) = (\lambda x_1)y_1 + 2(\lambda x_2)y_2 = \lambda(x_1y_1 + 2x_2y_2) = \lambda(x,y)$:

4. $(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0$: • Նախորդ օրինակում սահմանված սկալյար արտադրյալը կարելի է ընդհանրացնել հետևյալ եղանակով:

Օրինակ 112. R^n գծային տարածությունում $x = (x_1, \cdots, x_n)$ և $y = (y_1, \cdots, y_n)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(x,y) = \omega_1x_1y_1 + \cdots + \omega_nx_ny_n,$$

որտեղ $\omega_i > 0$ թվերին անվանում են ***կշիռներ:*** Այս եղանակով կառուցված էվկլիդեսյան տարածությունն անվանում են ***կշռային էվկլիդեսյան տարածություն:*** •

Եթե նախորդ օրինակում ω_i թվերից որևէ մեկը լինի բացասական կամ զրո, ապա սկալյար արտադրյալն այդպես սահմանել չի կարելի (ինչու*):

Օրինակ 113. R^3 գծային տարածությունում $x = (x_1, x_2, x_3)$ և $y = (y_1, y_2, y_3)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_3 :$$

Ցույց տանք, որ 4. հատկությունը տեղի չունի: Եթե, օրինակ, $x = (1, 2, 1)^T$, ապա

$$(x, x) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -6 < 0 :$$

Սա նշանակում է, որ R^3 գծային տարածությունը վերոհիշյալ սկալյար արտադրյալով էվկլիդեսյան տարածություն չէ: •

Սահմանում 26. Դիցուք $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ և $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ սիմետրիկ մատրից է:

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

բազմանդամն անվանում են ***քառակուսային ձև:*** Քառակուսային ձևն անվանում են *դրական որոշված,* եթե $Q(x_1, \cdots, x_n)$ ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ բոլոր $x \neq o$ տարրերի համար:

Օրինակ 114. Դիցուք A-ն այնպիսի $(n \times n)$ կարգի սիմետրիկ մատրից է, որին համապատասխանող քառակուսային ձևը դրական որոշված է: R^n գծային տարածությունում $x = (x_1, \cdots, x_n)$ և $y = (y_1, \cdots, y_n)$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանենք՝

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ii} x_i y_j :$$

Ստուգել 1-4 հատկությունները:

Եթե $A = E$, ապա սահմանված սկալյար արտադրյալը էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալն է: Եթե A-ն անկյունագծային մատրից է, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվում են $\omega_1, \cdots, \omega_n$ դրական թվեր, ապա սահմանված սկալյար արտադրյալը համընկնում է օրինակ 114-ում սահմանվածի հետ:•

Օրինակ 115. Ապացուցել, որ P_2 գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) :$$

Ցույց տանք 1-4 հատկությունների ճշմարտացիությունը.

1. $(f, g) = (g, f)$, քանի որ թվերի բազմապատկումն օժտված է տեղափոխելիության հատկությամբ:

2. Ցույց տանք, որ $(f+h,g)=(f,g)+(h,g)$: Ունենք

$$(f+h,g)=$$

$$=(f(-1)+h(-1))g(-1)+(f(0)+h(0))g(0)+(f(1)+h(1))g(1)=$$

$$(f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1))+$$

$$+(h(-1)g(-1)+h(0)g(0)+h(1)g(1))=$$

$$=(f,g)+(h,g):$$

3. Ցույց տանք, որ $(\lambda f,g)=\lambda(f,q)$: Ունենք

$$(\lambda f,g)=\lambda f(-1)g(-1)+\lambda f(0)g(0)+\lambda f(1)g(1)=$$

$$\lambda(f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1))=\lambda(f,g):$$

4.

$$(f,f)=f^2(-1)+f^2(0)+f^2(1)\geq 0:$$

Այստեղից

$$f(-1)=f(0)=f(1)=0:$$

Քանի որ f-ը չի կարող ունենալ երկուսից ավել արմատ (ինչու՞), ապա $f\equiv 0$:●

Օրինակ 116. $M_{2,2}$ գծային տարածության

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

տարրերի սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ

$$(A,B)=a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}:$$

Ստուգել: ●

Օրինակ 117. $C[a,b]$ գծային տարածության f,g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx:$$

Ցույց տանք 1-4 հատկությունների ճշմարտացիությունը:

1. $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=(g,f)$:

2.
$$(f+g,h)=\int_a^b (f(x)+g(x))h(x)dx=$$
$$=\int_a^b f(x)h(x)dx+\int_a^b g(x)h(x)dx=$$
$$=(f,h)+(g,h):$$

3. $(\lambda f,g)=\int_a^b (\lambda f(x))g(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx=\lambda(f,g)$:

4. $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$ և $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $f\equiv 0$:•

Թեորեմ 49. Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածությունում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$,
$(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$,
$(x,o)=(o,x)=0$:

Թեորեմ 50. *(Կոշի-Շվարցի անհավասարություն)* էվկլիդեսյան տարածության ցանկացած x,y տարրերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$(x,y)^2\leq (x,x)(y,y):$$

Օրինակ 118. Դիցուք $C[0,1]$ գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է ինչպես օրինակ 117-ում: $f(x)=1$ և $g(x)=x$ ֆունկցիաների համար ստուգել Կոշի-Շվարցի անհավասարությունը:

Ունենք

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$
$$(f,f)=\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1 dx=1,$$
$$(g,g)=\int_0^1 g^2(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}:$$

Իսկապես
$$(f,g)^2 = \frac{1}{4} \le (f,f)(g,g) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} : \bullet$$

Սահմանում 27. X գծային տարածությունն անվանում են *նորմավորված տարածություն*, եթե

ա) ցանկացած $x \in X$ տարրի համապատասխանության մեջ է դրված ոչ բացասական թիվ, որը նշանակում են $||x||$ և անվանում են *x տարրի նորմ*,

բ) վերը նշված համապատասխանությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով

1. $||x|| > 0$, եթե $x \neq o$, և $||o|| = 0$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||$,
3. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$ *(եռանկյան անհավասարություն)*:

Օրինակ 119. Որպես $A \in M_{n,n}$ մատրիցի նորմը սահմանենք հետևյալ
$$||A|| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$
ոչ բացասական թիվը: Ստուգենք 1-3 աքսիոմները

1. $||A|| > 0$ և $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$,
2. $||\lambda A|| = \sum_{i,j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |\lambda|\,||A||$,
3. $||A+B|| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \le \sum_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) = ||A|| + ||B|| : \bullet$

Թեորեմ 51. Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածություն
$$||x|| = \sqrt{(x,x)}$$
նորմով նորմավորված տարածություն է:

Թեորեմի հակառակ պնդումը ճիշտ չէ (տես վարժություն 276):

Եթե $||x|| = 1$, ապա x տարրն անվանում են *միավոր (նորմավորված) տարր*: Ցանկացած $x \neq o$ տարրի համար $\frac{x}{||x||}$ տարրը միավոր է:

Սահմանում 28. Նորմավորված տարածության x, y տարրերի հեռավորություն անվանում են
$$d(x,y) = ||x-y||$$

մեծությունը:

Օրինակ 120. Դիցուք P_n գծային տարածության $p(x)=p_0+p_1x+\dots+p_nx^n$, $q(x)=q_0+q_1x+\dots+q_nx^n$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$(p,q)=p_0q_0+\dots+p_nq_n$$

օրենքով: $p(x)=1-2x^2$, $q(x)=4-2x+x^2$, $r(x)=x+2x^2$ բազմանդամների համար հաշվել (p,q), (q,r), $||q||$, $d(p,q)$ մեծությունները:

Ունենք

$$(p,q)=p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2=1\cdot 4+0\cdot(-2)+(-2)\cdot 1=2,$$

$$(q,r)=4\cdot 0+(-2)\cdot 1+1\cdot 2=0,$$

$$||q||=\sqrt{(q,q)}=\sqrt{4^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{21},$$

$$d(p,q)=||p-q||=||(1-2x^2)-(4-2x+x^2)||=||-3+2x-3x^2||=$$

$$\sqrt{(-3)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{22}:\ \bullet$$

Թեորեմ 52. *(Կոշի-Շվարցի անհավասարություն)* Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածության x,y տարրերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը

$$|(x,y)|\le ||x||\ ||y||:$$

---

263. Կարելի՞ է R^2 գծային տարածությունում $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ օրենքով

ա) $(x,y)=x_1y_1-2x_2y_2$,

բ) $(x,y)=2x_1y_1+3x_2y_2$,

գ) $(x,y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$,

դ) $(x,y)=x_1y_1$,

ե) $(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$,

զ) $(x,y)=x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2$:

264. R^2 գծային տարածությունում $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է $(x,y)=3x_1y_1+x_2y_2$ օրենքով:

$x = (-4, 3)^T, y = (0, 5)^T$ տարրերի համար հաշվել $(x, y), ||x||, d(x, y)$ մեծությունները:

265. R^3 գծային տարածությունում $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

օրենքով: $x = (8, -3, -1)^T$, $y = (-5, 4, 9)^T$ տարրերի համար հաշվել (x, y), $||x||$, $d(x, y)$ մեծությունները:

266. Կարելի՞ է $M_{2,2}$ գծային տարածությունում

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ օրենքով

ա) $(A, B) = a_1a_2 - b_2b_1 + c_1c_2 - d_1d_2$,

բ) $(A, B) = a_1a_2 + d_1d_2$,

267. $M_{2,2}$ գծային տարածությունում

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է $(A, B) = 2a_1a_2 + b_2b_1 + c_1c_2 + 2d_1d_2$ օրենքով:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցների համար հաշվել $(A, B), ||A||, d(A, B)$ մեծությունները:

268. $C[-1, 1]$ գծային տարածությունում f, g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx :$$

$f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1$ ֆունկցիաների համար հաշվել $(f, g), ||f||$, $d(f, g)$ մեծությունները:

269. P_2 գծային տարածությունում $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2, q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$ տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$(p, q) = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 :$$

$p(x) = 1 - x + 3x^2, q(x) = x - x^2$ տարրերի համար հաշվել (p, q), $||p||$, $d(p, q)$ մեծությունները:

270. Դիցուք X էվկլիդեսյան տարածության y տարրը և a իրական թիվը գանված են: $(x, y) = a$ պայմանին բավարարող x տարրերի բազմությունը X-ի ենթատարածություն է, թե՞ ոչ:

271. Կարելի՞ է $M_{n,n}$ գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանել հետևյալ կերպ

$$(A, B) = Tr(B^T A) :$$

272. Ապացուցել անհավասարությունը ցանկացած $f, g \in C[a, b]$ ֆունկցիաների համար

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx :$$

273. Ապացուցել անհավասարությունը ցանկացած $a_1, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_n$ իրական թվերի համար

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \le \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 :$$

274. Ապացուցել անհավասարությունը ցանկացած $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$, a_{ik} իրական թվերի համար

$$\left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i y_k \right)^2 \le \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \right) \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} y_i y_k \right),$$

որտեղ $A = (a_{ik})$ մատրիցը սիմետրիկ է և նրանով ծնված քառակուսային ձևը դրական որոշված է:

275. Ապացուցել, որ ցանկացած էվկլիդեսյան տարածությունում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 :$$

276. Ապացուցել. որպեսզի R նորմավորված տարածությունում հնարավոր լինի սահմանել տարրերի սկալյար արտադրյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ տարածության ցանկացած x, y տարրերի համար տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) :$$

Դիտարկել սկալյար արտադրյալի հետևյալ սահմանումը

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) :$$

277. Ապացուցել անհավասարությունը ($f, g \in C[a,b]$)

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} :$$

278. Ցանկացած $a_1, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_n$ իրական թվերի համար ապացուցել անհավասարությունը

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2} :$$

279. Ցանկացած $x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$ իրական թվերի համար ապացուցել անհավասարությունը

$$\left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x_i+y_i)(x_k+y_k)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_ix_k\right)^{1/2} + \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}y_iy_k\right)^{1/2},$$

որտեղ $A = (a_{ik})$ մատրիցը սիմետրիկ է, իսկ րանով ծնված քառակուսային ձևը՝ դրական որոշված:

16. ՏԱՐՐԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ: ՕՐԹՈՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ԲԱԶԻՍ:

Էվկլիդեսյան տարածության $u, v\ (u, v \neq o)$ տարրերի կազմած անկյուն սահմանում են

$$\cos\theta = \frac{(u, v)}{||u||\ ||v||}$$

մեծությունը (համաձայն Կոշի-Շվարցի անհավասարության $|\cos\theta| \leq 1$):

Էվկլիդեսյան տարածության u, v տարրերն անվանում են ***օրթոգոնալ***, եթե

$$(u, v) = 0 :$$

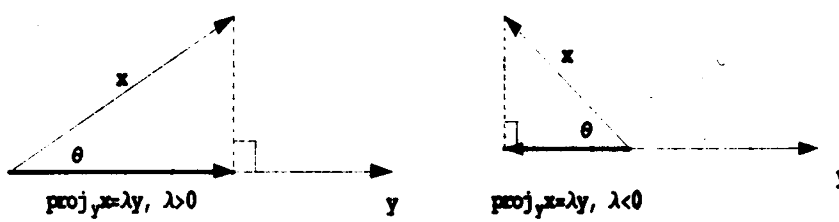
Թեորեմ 53. ***(Պյութագորասի թեորեմ)*** u և v տարրերը կլինեն օրթոգոնալ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 :$$

Դիցուք u, v-ն հարթության վրա տրված երկու վեկտորներ են ($u, v \in R^2$): Եթե v-ն զրոյական չէ, ապա u վեկտորը կարելի է օրթոգոնալ պրոյեկտել v վեկտորի ուղղության վրա՝ տես նկ. 14: Ստացված վեկտորը նշանակենք $proj_v u$: Նկարից հասկանալի է, որ

$$proj_v u = \frac{(u, v)}{(v, v)} v,$$

որտեղ (u, v)-ով նշանակված է R^2-ի էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալը:



նկ. 14

Այս գաղափարը կարելի է ընդհանրացնել ցանկացած էվկլիդեսյան տարածության համար:

Սահմանում 29. Դիցուք u, v-ն U էվկլիդեսյան տարածության տարրեր են և $v \neq o$: u տարրի ***օրթոգոնալ պրոյեկցիա*** v տարրի վրա կանվանենք $proj_v u = \frac{(u,v)}{(v,v)} v$ տարրը:

Եթե $||v|| = 1$, ապա $proj_v u = (u, v)v$:

Օրինակ 121. Դիտարկենք R^3 գծային տարածությունը էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալով: Հաշվել $u = (6, 2, 4)$ տարրի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $v = (1, 2, 0)$ տարրի վրա:

Քանի որ $(u, v) = 10$ և $||v||^2 = 5$, ապա

$$proj_v u = \frac{10}{5}(1, 2, 0) = (2, 4, 0) : \bullet$$

Նախորդ օրինակում $u - proj_v u = (6, 2, 4) - (2, 4, 0) = (4, -2, 4)$ տարրը օրթոգոնալ է $v = (1, 2, 0)$ տարրին: Սա տեղի ունի ցանկացած դեպքում:

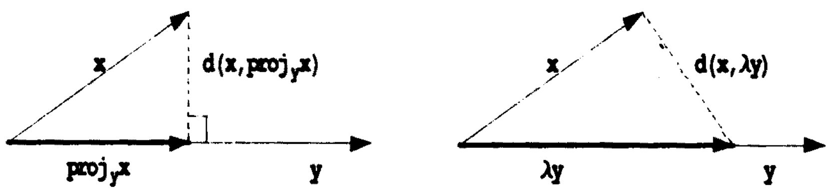
Թեորեմ 54. Դիցուք u, v-ն U էվկլիդեսյան տարածության տարրեր են և $v \neq o$: Այդ դեպքում

$$(u - proj_v u, v) = 0,$$

ավելին

$$d(u, proj_v u) < d(u, \lambda v), \quad \lambda \neq \frac{(u, v)}{(v, v)} :$$

Այլ կերպ ասած, բոլոր հնարավոր λv վեկտորներից u-ին ամենամոտը $proj_v u$ վեկտորն է (նկ. 15):



Նկ. 15

Օրինակ 122. Դիցուք $C[0, 1]$ տարածության f, g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

օրենքով: Գտնել $f(x) = 1$ ֆունկցիայի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $g(x) = x$ տարրի վրա:

Ունենք

$$proj_g f = \frac{(f,g)}{(g,g)}g = \frac{1/2}{1/3}x = \frac{3}{2}x : \bullet$$

Սահմանում 30. Էվկլիդեսյան տարածության S համախումբն անվանում են *օրթոգոնալ համախումբ*, եթե S-ի բոլոր տարրերը փոխադարձ օրթոգոնալ են: Իսկ եթե S-ի բոլոր տարրերը նաև միավոր են, ապա S-ն անվանում են *օրթոնորմալ համախումբ*: Եթե S-ը բազիս է, ապա այն անվանում են համապատասխանաբար՝ *օրթոգոնալ բազիս* և *օրթոնորմալ բազիս*:

Օրինակ 123. Դիտարկենք R^n գծային տարածությունը էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալով: Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն ստուգել, որ R^n-ի տիպային բազիսը օրթոնորմալ է:$\bullet$

Օրինակ 124. Դիտարկենք R^3 գծային տարածությունը էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալով: Ցույց տանք, որ

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

համախումբը R^3-ի օրթոնորմալ բազիս է: Իսկապես,

$$(v_1, v_2) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = 0, \ (v_1, v_3) = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 = 0,$$

$$(v_2, v_3) = -\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = 0 :$$

Այնուհետև

$$||v_1|| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1, \ ||v_2|| = \sqrt{\frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{8}{9}} = 1,$$

$$||v_3|| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1 :$$

Մյուս կողմից, կարելի է ցույց տալ, որ S-ը գծորեն անկախ համախումբ է:$\bullet$

Նախորդ օրինակում S համախմբի զծորեն անկախությունը կարելի էր չստուգել, քանի որ ճիշտ է հետևյալը.

Թեորեմ 55. Եթե $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$-ը V էվկլիդեսյան տարածության զրոյական տարրը չպարունակող օրթոգոնալ համախումբ է, ապա այն գծորեն անկախ է: Եթե $dimV = n$, ապա n ոչ զրոյական տարր պարունակող ցանկացած օրթոգոնալ համախումբ օրթոգոնալ բազիս է:

Օրինակ 125. Դիցուք P_3 գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է ինչպես օրինակ 117-ում: Ստուգել, որ $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ համախումբը օրթոնորմալ է:•

Օրինակ 126. Դիցուք $C[0, 2\pi]$ գծային տարածությունում f, g տարրերի սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ

$$S = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx\}$$

համախումբը օրթոգոնալ է: Իսկապես

$$(\sin mx, \cos nx) = 0$$

և

$$(\sin nx, \sin mx) = 0, \ (\cos mx, \cos nx) = 0, \ n \neq m :$$

Սակայն S-ը օրթոնորմալ համախումբ չէ, քանի որ

$$||1||^2 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi, \ ||\sin nx||^2 = ||\cos nx||^2|| = \pi :$$

Օրթոնորմալ համախումբ ստանալու համար հարկավոր է S-ի յուրաքանչյուր տարր նորմավորել: Ակնհայտ է, որ

$$S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,$$

$$\cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\}$$

համախումբը օրթոնորմալ է: •

Նշենք օրթոնորմալ բազիսի որոշ առավելություններ ոչ օրթոնորմալ բազիսի նկատմամբ: Դիցուք u, v-ն U էվկլիդեսյան տարածության տարրեր են, իսկ $S = \{e_1, \cdots, e_n\}$-ը՝ նրա բազիսը: Կգտնվեն այնպիսի $u_1, \cdots, u_n$, $v_1, \cdots, v_n$ թվեր, որ

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n, \ v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n :$$

Հաշվենք (u, v) սկալյար արտադրյալը

$$(u, v) = (u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n, v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (e_i, e_j) u_i v_j :$$

Ստացված արդյունքը համեմատեք օրինակ 116-ում սահմանված սկալյար արտադրյալի հետ: Եթե S բազիսը օրթնորմալ է, ապա (u, v) արտադրյալն ավելի պարզ տեսք ունի

$$(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} (e_i, e_j) u_i v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

(պատասխանը համեմատեք էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալի հետ):

Ինչպես գիտենք, u_i կոորդինատները գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել գծային հավասարումների համակարգ: Եթե S-ը օրթոնորմալ բազիս է, ապա u_i-երի հաշվումը անհամեմատ հեշտանում է:

Թեորեմ 56. Եթե $S = \{e_1, \cdots, e_n\}$-ը U էվկլիդեսյան տարածության օրթոնորմալ բազիս է, ապա u տարրը S բազիսում ունի հետևյալ ներկայացումը

$$u = (u, e_1) e_1 + (u, e_2) e_2 + \cdots + (u, e_n) e_n :$$

(u, e_i) թվերն անվանում են ***Ֆուրիեի գործակիցներ:***

Օրինակ 127. Գտնել $u = (5, -5, 2)$ տարրի կոորդինատները

$$S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{ \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

բազիսում:

S-ը օրթոնորմալ է: Ունենք

$$(u, u_1) = -1,\ (u, u_2) = -7,\ (u, u_3) = 2 :$$

Այնուհետև, $u = -u_1 - 7u_2 + 2u_3$: •

Դիցուք R-ը էվկլիդեսյան տարածություն է և $e_i \in R$, $i = \overline{1,m}$: Դիտարկենք *Գրամի որոշիչը*

$$G(e_1, \cdots, e_k) = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_m) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_m, e_1) & (e_m, e_2) & \cdots & (e_m, e_m) \end{vmatrix} :$$

Թեորեմ 57. Որպեսզի $\{e_1, \cdots, e_m\}$ համախումբը լինի գծորեն անկախ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $G(e_1, \cdots, e_m) \neq 0$:

Օրինակ 128. Ցույց տանք, որ E^n էվկլիդեսյան տարածության

$$S = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,2,3)^T, (0,1,2)^T, (-2,0,1)^T\}$$

համախումբը գծորեն անկախ է:

Ունենք

$$(e_1, e_1) = 14, (e_1, e_2) = 8, (e_1, e_3) = 1,$$

$$(e_2, e_2) = 5, (e_2, e_3) = 2, (e_3, e_3) = 5,$$

$$G(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 14 & 8 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 350+32+8-10-28-200 = 152 \neq 0 : \bullet$$

Օրինակ 129. $C[a, b]$ գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,\ f, g \in C[-1, 1] :$$

Ցույց տանք, որ

$$S_1 = \{f_1, f_2, f_3\} = \{1, x, x^2\}$$

համախումբը գծորեն անկախ է $C[-1, 1]$-ում, իսկ

$$S_2 = \{1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx\}$$

համախումբը՝ $C[-\pi, \pi]$-ում:

Ունենք

$$(f_1, f_1) = 2, (f_1, f_2) = 0, (f_1, f_3) = 2/3,$$

$$(f_2, f_2) = 2/3, (f, f_3) = 0, (f_3, f_3) = 2/5,$$

$$G(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} = -16/45 \neq 0 :$$

S_2 համախմբի համար ունենք

$$G(1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\pi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \pi \end{vmatrix} = 2\pi^{2n+1} \neq 0 :$$

Խորհուրդ ենք տալիս այս տեսանկյունից քննարկել օրինակ 74-ը և 184 վարժությունը: •

Օրինակ 130. Որպեսզի R էվկլիդեսյան տարածության $\{e_1, \cdots, e_m\}$ համախումբը լինի գծորեն կախյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$G(e_1, \cdots, e_m) = 0 :$$

Դիտարկենք հետևյալ գծային կոմբինացիան

$$\sum_{i=1}^{m} c_i e_i = 0,$$

որտեղից

$$(e_j, \sum_{i=1}^{m} c_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i (e_j, e_i) = 0, \ \ j = 1, \cdots, m :$$

Ստացված համակարգի որոշիչը Գրամի որոշիչն է:

Եթե $\{e_1, \cdots, e_m\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է, ապա դիտարկված գծային կոմբինացիան տեղի ունի ինչ որ $c_1, \cdots, c_m$ թվերի համար, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ: Սա իր հերթին նշանակում է, որ ստացված համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, այսինքն Գրամի որոշիչը զրո է:

Հակառակը, եթե Գրամի որոշիչը զրո է, ապա ստացված համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, ինչը նշանակում է, որ տրված համախումբը գծորեն կախյալ է:●

---

280. Գտնել տրված վեկտորների կազմած անկյունը

ա) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, եթե $(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2$,

բ) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, եթե $(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$,

գ) $f(x) = x, g(x) = x^2$, եթե $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$:

281. Գտնել $proj_v u, proj_u v$ տարրերը

ա) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, բ) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

282. Դիցուք $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$: Ցույց տալ, որ u, v տարրերը օրթոգոնալ են, եթե $(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2$: Օրթոգոնա՞լ են այս տարրերը E^2 տարածությունում:

283. Գտնել $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ տարրերին օրթոգոնալ և նորմավորված տարր:

284. Ցույց տալ հետևյալ տարրերի օրթոգոնալությունը և համախումբը լրացնել մինչև օրթոգոնալ բազիս ա) $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-3\end{pmatrix}$:

285. Հետևյալ համախմբերը լրացնել մինչև օրթոնորմավորված բազիս

ա) $\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$:

286. Գտնել $u = (0,-4,3)^T$ տարրին օրթոգոնալ բոլոր տարրերը:

287. Պարզել, թե հետևյալ համախմբերից ո՞րն է օրթոգոնալ, օրթոնորմալ կամ էլ ոչ մեկը, ոչ էլ՝ մյուսը

ա) $\left\{\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\begin{pmatrix}-6\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\}$,

գ) $\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{10}/10\\0\\0\\3\sqrt{10}/10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\sqrt{10}/10\\0\\0\\\sqrt{10}/10\end{pmatrix}\right\}$:

288. Ցույց տալ, որ $\left\{\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}\right\}$ համախումբը օրթոնորմալ է:

289. Գտնել x տարրի կոորդինատները B օրթոնորմալ բազիսում

ա) $x = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, B = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{13}}{13}\\\frac{3\sqrt{13}}{13}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{13}}{13}\\\frac{2\sqrt{13}}{13}\end{pmatrix}\right\}$,

բ) $x = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, B = \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\0\\\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{10}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\right\}$,

q) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, B = \{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$:

290. Ապացուցել, որ եթե x տարրը օրթոգոնալ է $u_1, \cdots, u_n$ տարրերին, ապա այն օրթոգոնալ է $lin\{u_1, \cdots, u_m\}$ գծային տարածության ցանկացած տարրի:

291. Օգտվելով Գրամի որոշիչից հետազոտել տրված համախմբերի գծային կախվածությունը տրված I միջակայքում

ա)$\{2x-1, 2x+1, x\}$, $I = [-1, 1]$,

բ)$\{x, |x|\}$, $I = [-1, 1]$,

գ)$\{x^3, x^2|x|, x\}$, $I = [0, 1]$,

դ)$\{x^3, x^2|x|, x\}$, $I = [-1, 1]$,

ե)$\{x^{k_1}, x^{k_2}, \cdots, x^{k_m}\}$, $k_i \neq k_j$, $i \neq j$, $I = (a, b)$, $b > a > 0$,

զ)$\{e^{p_1 x}, \cdots, x^{m_1} e^{p_1 x}, e^{p_2 x}, \cdots, x^{m_2} e^{p_2 x}, \cdots, e^{p_k x}, \cdots, x^{m_k} e^{p_k x}\}$,

$m_j \geq 0$ ամբողջ թվեր են, $p_i \neq p_j$, $i \neq j$, $I = (a, b)$:

292. Դիցուք $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$-ը R^n-ի օրթոնորմալ համախումբ է: Ապացուցել, որ ցանկացած $v \in R^n$ տարրի համար ճիշտ է ***Բեսելի անհավասարությունը***

$$||v||^2 \geq \sum_{i=1}^{m} (v, u_i)^2 :$$

293. Դիցուք $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ համախումբը օրթոնորմալ բազիս է R^n-ում: Ապացուցել, որ $v \in R^n$ ցանկացած տարրի համար ճիշտ է ***Պարսևալի հավասարությունը***

$$||v||^2 = |(v, u_1)|^2 + |(v, u_2)|^2 + \cdots + |(v, u_n)|^2 :$$

294. Ապացուցել, որ

$$||u + v|| = ||u - v||$$

հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ u, v տարրերը օրթոգոնալ են:

295. Ցույց տալ, որ $\{v_1, \cdots, v_k\}$ գծորեն անկախ համախմբի Գրամի որոշիչը դրական է:

17. ԳՐԱՄ-ՇՄԻԴՏԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼԱՑՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ

Դիցուք $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ համախումբը V էվկլիդեսյան տարածության որևէ բազիս է: Կառուցենք նոր՝ $B' = \{w_1, \cdots, w_n\}$ բազիս հետևյալ եղանակով

$$w_1 = v_1, \; w_2 = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1, \; w_3 = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2,$$

$$w_n = v_n - \frac{(v_n, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(v_n, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 - \cdots - \frac{(v_n, w_{n-1})}{(w_{n-1}, w_{n-1})} w_{n-1} :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ B'-ը V տարածության օրթոգոնալ բազիս է: Ավելին, եթե

$$u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$$

ապա $B'' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ համախումբը կլինի V տարածության օրթոնորմալ բազիս և $lin\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = lin\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$:

Գծորեն անկախ համախմբի օրթոգոնալացման այսպիսի եղանակն անվանում են *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակ:*

Թեորեմ 58. Յանկացած վերջավոր չափանի էվկլիդեսյան տարածությունում գոյություն ունի օրթնորմավորված բազիս:

Օրինակ 131. Դիտարկենք R^2-ի հետևյալ բազիսը

$$B = \{v_1, v_2\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} :$$

Կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

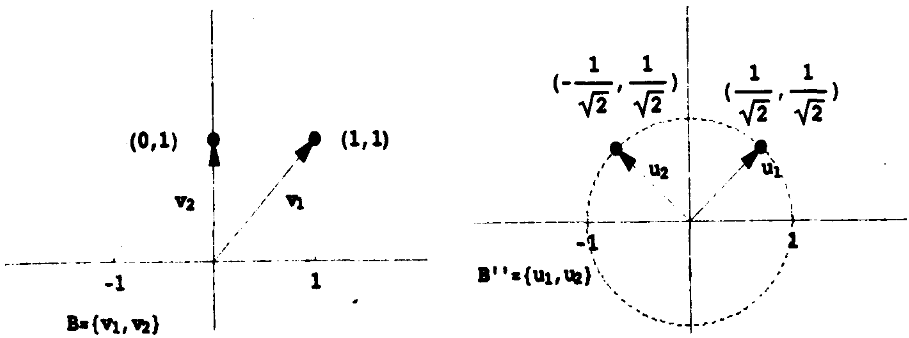
$$w_2 = v_2 = \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} :$$

$B' = \{w_1, w_2\}$ համախումբը R^2-ի օրթոգոնալ բազիս է: Նորմավորենք ստացված համախումբը

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} :$$

$B'' = \{u_1, u_2\}$ համախումբը R^2-ի օրթոնորմավորված բազիս է (տես նկ. 16): Ուշադրություն դարձնենք այն փաստի վրա, որ եթե օրթոգոնալացման եղանակը կիրառենք $\{v_2, v_1\}$ բազիսի համար, ապա կստացվի միանգամայն այլ պատասխան: •



Նկ. 16

Օրինակ 132. Դիտարկենք P_2 գծային տարածությունը

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

սկալյար արտադրյալով: P_2-ում դիտարկենք հետևյալ բազիսը

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\} :$$

B համախմբի նկատմամբ կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը:

$$w_1 = v_1 = 1, \; w_2 = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 = x - \frac{0}{2} 1 = x,$$

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 = x^2 - \frac{2/3}{2} 1 - \frac{0}{2/3} x = x^2 - \frac{1}{3} :$$

Ստացված համախումբը նորմավորենք

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ u_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x,\ u_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1):$$

$B'' = \{u_1, u_2, u_3\}$ համախումբը P_2-ի օրթոնորմալ բազիս է: Այս բազմանդամներն անվանում են *Լեժանդրի նորմավորված բազմանդամներ*:●

Օրինակ 133. Կառուցել v_1, v_2 տարրերով ծնված գծային թաղանթի օրթոնորմավորված բազիսը, եթե

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

Հեշտ է ստուգել, որ u և v տարրերը գծորեն անկախ են: Կիրառելով օրթոգոնալիզացիայի եղանակը կստանանք

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսով, $\{u_1, u_2\}$ համախումբը $lin\{v_1, v_2\}$ գծային տարածության օրթոնորմավորված բազիս է:●

---

296. Հետևյալ համախմբերից ո՞րն է օրթոնորմալ: Հակառակ դեպքում, եթե հնարավոր է, կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$,

գ) $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$, դ) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$:

297. Հետևյալ համախմբերից ո՞րն է օրթոնորմալ: Հակառակ դեպքում, եթե հնարավոր է, կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T\right\}$,

բ) $\left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T,\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T\right\}$,

գ) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T\right\}$:

298. Հետևյալ համախմբերից ո՞րն է օրթոնորմալ: Հակառակ դեպքում, եթե հնարավոր է, կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $\left\{\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)^T,\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)^T\right\}$,

գ) $\left\{\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-17\\-1\end{pmatrix}\right\}$,

դ) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)^T,\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T\right\}$:

299. Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը կիրառել հետևյալ համախմբերի նկատմամբ

ա) $\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, բ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

գ) $\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$, դ) $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$:

300. Դիցուք

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}:$$

Օրթոնորմավորել $\{u_1,u_2,u_3\}$ և $\{u_1,u_3,u_2\}$ համախմբերը:

301. Դիցուք

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \quad v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T:$$

Ցույց տալ, որ $\{u, v\}$ համախումբը օրթոնորմալ է R^2-ում $(u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ սկալյար արտադրյալով, սակայն օրթոնորմալ չէ տիպային սկալյար արտադրյալով: Օրթոնորմավորել:

302. P_2 գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \ q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

$$(p, q) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2:$$

Հետևյալ համախմբերից, ո՞րն է օրթոնորմալ: Հակառակ դեպքում՝ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $\left\{\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}, \frac{x^2+x-1}{\sqrt{3}}\right\}$, **բ)** $\{x^2, x^2+x, x^2+2x+1\}$,

գ) $\{x^2-1, x-1\}$, **դ)** $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(x^2-2x+1)\right\}$:

303. R^2-ում սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \ (u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2:$$

Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը կիրառել

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$$

համախմբի նկատմամբ:

304. R^3-ում սկալյար արտադրյալը սահմանված է $(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ օրենքով: Օրթոնորմավորել $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ համախումբը:

305. P_2 գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

օրենքով: Օրթոնորմավորել $\{1, x, x^2\}$ համախումբը:

306. M_{22} գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}, \ (u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

օրենքով: Պարզել, թե հետևյալ համախմբերից, ո՞րն է օրթոնորմալ: Հակառակ դեպքում՝ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$,

բ) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$:

307. Կառուցել հետևյալ տարրերով ծնված գծային թաղանթի օրթոգոնալ բազիսը

ա) $(1, 2, 2, -1)^T$, $(1, 1, -5, 3)^T$, $(3, 2, 8, -7)^T$,

բ) $(1, 1, -1, -2)^T$, $(5, 8, -2, -3)^T$, $(3, 9, 3, 8)^T$,

գ) $(2, 1, 3, -1)^T$, $(7, 4, 3, -3)^T$, $(1, 1, -6, 0)^T$, $(5, 7, 7, 8)^T$:

308. Կառուցել հետևյալ համասեռ համակարգի լուծումների գծային տարածության օրթոնորմալ բազիսը

ա) $2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$
$x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4$:

բ) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$:

309. Դիցուք $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է U էվկլիդեսյան տարածությունում: Նկարագրել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակի կիրառման արդյունքը S համախմբի նկատմամբ:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը կարելի է իրականացնել

$$GramSchmidt[\{v_1, \cdots, v_n\}]$$

հրամանի օգնությամբ, որը տրված $\{v_1, \cdots, v_n\}$ համախումբը (պարտադիր չէ, որ այն լինի գծորեն անկախ) ձևափոխում է $\{u_1, \cdots, u_n\}$ օրթոնորմավորված համախմբի: Այդ հրամանը գտնվում է LinearAlgebra'Orthogonalization' լրացուցիչ փաթեթում:

Իրականացնենք նշված հրամանը

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(2,-1,2)^T, (0,2,1)^T, (1,0,-1)^T\}$$

համախմբի համար: Որպես սկալյար արտադրյալ ընդունվում է R^3-ի էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալը

In[1]:=
```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`;
{u1, u2, u3} =
  GramSchmidt[{{2, -1, 2}, {0, 2, 1}, {1, 0, -1}}]
```

Out[2]= $\left\{\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}\right\}$

Ստուգենք, որ ստացված համախումբը օրթոնորմալ է

In[3]:=
```
{u1.u1, u2.u2, u3.u3, u1.u2, u1.u3, u2.u3}
```

Out[3]= {1, 1, 1, 0, 0, 0}

Նույն համակարգը կարելի է օրթոգոնալացնել առանց նորմավորելու

In[4]:=
```
{u1, u2, u3} =
  GramSchmidt[{{2, -1, 2}, {0, 2, 1}, {1, 0, -1}},
   Normalized -> False]
```

Out[4]= $\left\{\{2, -1, 2\}, \{0, 2, 1\}, \left\{1, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right\}\right\}$

Ստուգենք

In[5]:=
```
{u1.u1, u2.u2, u3.u3, u1.u2, u1.u3, u2.u3}
```

Out[5]= $\left\{9, 5, \frac{9}{5}, 0, 0, 0\right\}$

Այժմ օրթոգոնալացման եղանակը կիրառենք

$$v_1 = 1,\ v_2 = 2x + 1,\ v_3 = x^2 - x - 1,\ v_4 = x^3 + x$$

ֆունկցիաների նկատմամբ: Սկալյար արտադրյալը սահմանենք

$$(v_i, v_j) = \int_{-1}^{1} v_i v_j dx$$

In[6]:=
```
GramSchmidt[{1, 2 x + 1, x^2 - x - 1, x^3 + x},
  InnerProduct → (∫_{-1}^{1} #1 #2 dx &)]
```

Out[6]=

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,x,\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right),\ \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(-\frac{3x}{5}+x^3\right)\right\}$$

P_2 գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանված է ինչպես օրինակ 130-ում: Նույն $\{v_1, v_2, v_3,\ v_4\}$ համախումբը օրթոգոնալացնենք այս նոր սկալյար արտադրյալի նկատմամբ

In[7]:=
```
GramSchmidt[{1, 2 x + 1, x^2 - x - 1, x^3 + x},
  InnerProduct →
   (PadRight[CoefficientList[#1, x], 4] .
     PadRight[CoefficientList[#2, x], 4] &)]
```

Out[7]=
```
{1, x, x^2, x^3}
```

Դիտարկենք հետևյալ գծորեն կախյալ համախումբը: *GramSchmidt*[] հրամանը չի հայտնաբերում գծորեն կախվածությունը

In[8]:=
```
dat = ({0, 0, 1.},
       {1., 0, 0},
       {-0.12988785514152842, 0.3997814966837186,
           0.5468181006215335},
       {1.013982920708332, -0.02721531177817664,
          -0.1856796639629260 7}};
GramSchmidt[dat]
```

Out[9]=
```
{{0, 0, 1.}, {1., 0, 0.}, {0., 1., 0.}, {0., -1., 0.}}
```

Այն դեպքում, երբ համախմբի տարրերի կոորդինատները թվեր են (և ոչ թե սիմվոլներ) և պահանջվում է համախումբը օրթոգոնալացնել էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալով՝ կարելի է օգտագործել մեկ այլ հրաման, որն այս դեպքում աշխատում է, ինչպես հարկն է

```
In[10]:= Householder[dat]

Out[10]= {{0., 0., -1.}, {-1., 0., 0.}, {0., 1., 0.}, {0., 0., 0.}}
```

էվկլիդեսյան տարածության u տարրի օրթոգոնալ պրոյեկցիան v տարրի վրա կարելի է գտնել $Projection[u, v]$ հրամանով

```
In[11]:= Projection[{6, 2, 4}, {1, 2, 0}]

Out[11]= {2, 4, 0}
```

18. ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

Օրինակ 134. $x'y'$-կոորդինատական համակարգը ստացվում է xy-ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգը սկզբնակետի նկատմամբ ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ θ անկյունով պտտելով: Գտնել xy և $x'y'$ կոորդինատական համակարգերում Q կետի կոորդինատների կապը:

Q կետի կոորդինատները համապատասխան կոորդինատական համակարգերում նշանակենք՝ (x, y) և (x', y'): Ինչպես հայտնի է,

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta,$$

կամ մատրիցային տեսքով

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

Դիտարկենք

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Հաշվենք PP^T, P^TP արտադրյալները

$$PP^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^TP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Այսինքն $PP^T = P^TP = E$: Այս առնչությունը հնարավորություն է տալիս հաշվել P մատրիցի հակադարձը՝ $P^{-1} = P^T$, որի օգնությամբ կարելի է (x, y) կոորդինատներն արտահայտել (x', y') կոորդինատներով

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

կամ համակարգի տեսքով

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta : \bullet$$

Սահմանում 31. A քառակուսի մատրիցն անվանում են ***օրթոգոնալ մատրից***, եթե

$$AA^T = A^TA = E :$$

Թեորեմ 59. Դիցուք A-ն քառակուսի մատրից է: Հետևյալ պնդումները համարժեք են

- A մատրիցն օրթոգոնալ է,
- A մատրիցի սյուները կազմում են օրթոնորմավորված համախումբ,
- A մատրիցի տողերը կազմում են օրթոնորմավորված համախումբ:

Օրինակ 135.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի տողերն են

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad e_2 = (0, 0, 1)^T, \quad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T :$$

Ունենք

$$(e_1,e_2)=(e_1,e_3)=(e_2,e_3)=0,\ (e_1,e_1)=(e_2,e_2)=(e_3,e_3)=1:$$

Հետևաբար A-ն օրթոգոնալ մատրից է: Ստուգել, որ A մատրիցի սյուները և կազմում են օրթոնորմավորված համախումբ:•

Դիցուք $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ համախումբը V էվկլիդեսյան տարածության *բազիս* է: Այսինքն, ցանկացած v տարրի համար կգտնվեն այնպիսի $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ թվեր, որ $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$: Ենթադրենք, որ B'-ը մեկ այլ բազիս է և v տարրն այդ բազիսում ունի $\alpha_1',\cdots,\alpha_n'$ կոորդինատներ: P-ով նշանակենք B բազիսից B'-ին անցման մատրիցը: Ունենք $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')^T=P(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T$: Եթե որպես սկալյար արտադրյալ ընդունենք տիպային սկալյար արտադրյալը, ապա ինչպիսի՞ն պետք է լինի P մատրիցը, որպեսզի $\|x\|=\|Px\|$: Պարզվում է, որ այդպիսի հատկությամբ օժտված են օրթոգոնալ մատրիցները: Ավելին, եթե B և B' բազիսները լինեն օրթոնորմալ, ապա անցման մատրիցը անպայման կլինի օրթոգոնալ (ստուգել):

---

310. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից որոնք են օրթոգոնալ մատրիցներ

ա) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$,

ե) $\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\frac12\\ \frac12&-\frac56&\frac16&\frac16\\ \frac12&\frac16&\frac16&-\frac56\\ \frac12&\frac16&-\frac56&\frac16\end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac12&0\\0&\frac{1}{\sqrt3}&0&1\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac12&0\end{pmatrix}$:

311. Ցույց տալ, որ հետևյալ մատրիցներն օրթոգոնալ են θ պարամետրի ցանկացած արժեքի դեպքում: Հաշվել մատրիցների հակադարձները

ա) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$:

312. a, b, c, d հաստատունների ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում A մատրիցը կլինի օրթոգոնալ մատրից

$$A = d\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}:$$

313. a, b, c, d հաստատունների ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում A մատրիցը կլինի օրթոգոնալ մատրից

$$A = d\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & d \end{pmatrix}:$$

314. Ապացուցել, որ A և A^T մատրիցներն օրթոգոնալ են միաժամանակ:

315. Ապացուցել, որ $(n \times n)$ կարգի մատրիցը օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերը օրթոնորմալ են:

316. Ապացուցել, որ $(n \times n)$ կարգի մատրիցը օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա սյուները օրթոնորմալ են:

317. Ապացուցել, որ եթե P-ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա $detP = \pm 1$:

318. Ապացուցել, որ օրթոգոնալ մատրիցն ունի օրթոգոնալ հակադարձ:

319. Ապացուցել, որ եթե A և B մատրիցներն օրթոգոնալ են, ապա այդպիսին են նաև AB և BA մատրիցները:

320. Ե՞րբ օրթոգոնալ մատրիցը կլինի անկյունագծային:

321. Ի՞նչ կարելի է ասել օրթոգոնալ մատրիցների գումարի մասին: Դիտարկել օրինակներ:

19. ՄԱՏՐԻՑԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՔԻ՝ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՄԱՏՐԻՑԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Թեորեմ 60. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի սիմետրիկ մատրից է, ապա

- A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի,
- A-ի սեփական արժեքների հանրահաշվական պատիկությունների գումարը n է,
- յուրաքանչյուր սեփական արժեքի հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունները հավասար են:

Օրինակ 136. Դիտարկենք հետևյալ սիմետրիկ մատրիցը

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 :$$

Համաձայն թեորեմ 60-ի $\lambda = 4$ սեփական արժեքին համապատասխանում է 4 գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ, $\lambda = 1$ սեփական արժեքին՝ երկու, իսկ $\lambda = 2$ սեփական արժեքին՝ միայն մեկ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր: Այսինքն, մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:•

Թեորեմ 61. Եթե A-ն սիմետրիկ մատրից է, ապա մատրիցի տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են:

Օրինակ 137. Դիտարկենք հետևյալ սիմետրիկ մատրիցը

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4) :$$

$\lambda_1 = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանող յուրաքանչյուր սեփական վեկտոր ունի հետևյալ տեսքը

$$x_1 = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}, \quad s \neq 0,$$

իսկ $\lambda_2 = 4$ սեփական արժեքին համապատասխանող յուրաքանչյուր սեփական վեկտոր՝ հետևյալ տեսքը

$$x_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 :$$

Ցույց տանք, որ x_1, x_2 սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են

$$(x_1, x_2) = st - st = 0 : \bullet$$

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: Եթե գոյություն ունի այնպիսի P օրթոգոնալ մատրից, որ $P^{-1}AP = P^TAP$ մատրիցը անկյունագծային է, ապա ասում են, որ A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի օրթոգոնալ մատրիցով:

Թեորեմ 62. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են.

- A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի օրթոգոնալ մատրիցով,
- A -ն ունի n սեփական վեկտորներ, որոնք կազմում են օրթոնորմալ համախումբ,
- A-ն սիմետրիկ մատրից է:

Օրինակ 138.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցն ունի $\lambda = 8$ սեփական արժեք մեկ պատիկությամբ և $\lambda = 2$ սեփական արժեք երկու պատիկությամբ: $\lambda = 2$ սեփական արժեքին համապատասխանում են երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ՝ $v_1 = (-1,1,0)^T, v_2 = (-1,0,1)^T$: v_1, v_2 համախմբի նկատմամբ կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

$$u_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T :$$

$\lambda = 8$ սեփական արժեքին համապատասխանում է $v_3 = (1,1,1)$ սեփական վեկտորը, որը նորմավորելուց հետո կընդունի հետևյալ տեսքը

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T :$$

Այստեղից կստանանք P օրթոգոնալ մատրիցը

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} :$$

Ստուգել, որ P^TAP-ն անկյունագծային մատրից է:•

---

322. Գտնել այն P օրթոգոնալ մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի: Հաշվել $P^{-1}AP$ մատրիցը

ա) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, գ) $A = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$,

դ) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$:

323. Գտնել այն P օրթոգոնալ մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի:

$$\text{ա) } A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \text{բ) } A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$\text{գ) } A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \text{դ) } A=\begin{pmatrix}5&-2&0&0\\-2&2&0&0\\0&0&5&-2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}:$$

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Տրված m սիմետրիկ մատրիցը օրթոգոնալ ձևափոխությամբ անկյունագծային տեսքի կարելի է բերել $SchurDecomposition[m]$ հրամանով, որը վերադարձնում է երկու մատրիցներ՝ q և t, որտեղ q մատրիցը օրթոգոնալ է, t-ն՝ անկյունագծային և $m = qtq^T$: Դիտարկենք հետևյալ սիմետրիկ մատրիցը և այն ձևափոխենք անկյունագծային տեսքի

```
In[1]:=  m = ( 1  -2  4
              -2   2  3
               4   3  5 ) // N;
         {q, t} = SchurDecomposition[m] // Chop;
         {q // MatrixForm, t // MatrixForm}

Out[3]= {( 0.683688    0.602924    0.411161
           0.524972   -0.797694    0.296798
          -0.506927   -0.0129304   0.861892 ),
         ( -3.50155   0        0
            0         3.5603   0
            0         0        7.94125 )}
```

Ստուգենք, որ q մատրիցը օրթոգոնալ է

```
In[4]:= ((q.Transpose[q]) // Chop) ==
          ((Transpose[q].q) // Chop) == (IdentityMatrix[3])

Out[4]= True
```

Ստուգենք պատասխանը

```
In[5]:= q.t.Transpose[q] == m

Out[5]= True
```

20. ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԼՐԱՑՈՒՄ: ՄԱՏՐԻՑԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԵՆԹԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 32. V էվկլիդեսյան տարածության V_1, V_2 ենթատարածություններն անվանում են *օրթոգոնալ ենթատարածություններ,* եթե V_1-ի յուրաքանչյուր տարր օրթոգոնալ է V_2-ի բոլոր տարրերին: Գրում են՝ $V_1 \perp V_2$:

Օրինակ 139. Դիտարկենք հետևյալ երկու ենթատարածությունները

$$V_1 = lin\{v_1, v_2\} = lin\{(1,0,1)^T, (1,1,0)^T\},$$

$$V_2 = lin\{v_3\} = lin\{(-1,1,1)^T\} :$$

Քանի որ $(v_1, v_3) = 0$ և $(v_2, v_3) = 0$, ապա V_1 և V_2 ենթատարածությունները օրթոգոնալ են:●

Սահմանում 33. Դիցուք U-ն V էվկլիդեսյան տարածության որևէ ենթատարածություն է: V-ի բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք օրթոգոնալ են U-ի ցանկացած տարրի, անվանում են U ենթատարածության *օրթոգոնալ լրացում:* U-ի օրթոգոնալ լրացումը նշանակում են $U^{\perp}$-ով:

Թեորեմ 63. էվկլիդեսյան տարածության U ենթատարածության $U^{\perp}$ օրթոգոնալ լրացումը ևս ենթատարածություն է:

Թեորեմ 64. Ցանկացած էվկլիդեսյան տարածություն կարելի է ներկայացնել իր որևէ ենթատարածության և նրա օրթոգոնալ լրացման ուղիղ գումարի տեսքով:

Օրինակ 140. Դիցուք

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \end{array} :$$

Գտնել R^4 գծային տարածության $S = lin\{v_1, v_2\}$ ենթատարածության օրթոգոնալ լրացումը:

$u \in R^4$ տարրը կպատկանի $S^\perp$ տարածությանը, եթե $(u, v_1) = (u, v_2) = 0$: Սա նշանակում է, որ $U^\perp$ տարածությունը բաղկացած է բոլոր այն u տարրերից, որոնք բավարարում են $A^T u = o$ պայմանին

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Ստացված համասեռ համակարգման լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը $S^\perp$ տարածության բազիսն է

$$u_1 = (-2, 1, 0, 0)^T, \quad u_2 = (-1, 0, 1, 0)^T :$$

Այսպիսով $S^\perp = lin(u_1, u_2)$: Համաձայն թեորեմ 66-ի $R^4 = S \oplus S^\perp$: Այսինքն՝ $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ համախումբը R^4-ի բազիս է:•

Կասենք, որ u տարրը օրթոգոնալ է U ենթատարածությանը և կնշանակենք $u \perp U$, եթե այն օրթոգոնալ է U-ի ցանկացած տարրի:

Կասենք, որ v_1 տարրը v տարրի պրոյեկցիան է S ենթատարածության վրա և կնշանակենք $v_1 = proj_S v$, եթե

$$v = v_1 + v_2, \; v_1 \in S, \; v_2 \in S^\perp :$$

Այստեղից հետևում է, որ $v_2 = v - proj_S v$: Այսինքն՝ $v - proj_S v$ տարրը օրթոգոնալ է s ենթատարածությանը:

Թեորեմ 65. Եթե $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ համախումբը $S \subset V$ ենթատարածության օրթոնորմալ բազիս է և $v \in V$, ապա

$$proj_S v = (v, u_1)u_1 + (v, u_2)u_2 + \cdots + (v, u_m)u_m :$$

Օրինակ 141. Գտնել $v = (1, 1, 3)^T$ տարրի պրոյեկցիան $S \subset R^3$ ենթատարածության վրա, եթե

$$S = lin(w_1, w_2) = lin\{(0, 3, 1)^T, (2, 0, 0)^T\} :$$

Նկատենք, որ $\{w_1, w_2\}$ համախումբը օրթոգոնալ է: Հետևյալ համախումբը

$$\{u_1, u_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{10}}w_1, \frac{1}{2}w_2\} = \{(0, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})^T, (1, 0, 0)^T\}$$

S-ի օրթոնորմալ բազիսն է: Այստեղից

$$proj_S v = (v, u_1)u_1 + (v, u_2)u_2 = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^T : \bullet$$

Թեորեմ 66. Դիցուք $S \subset V$ և $v \in V$: Ցանկացած u տարրի համար S ենթատարածությունից, եթե $u \neq proj_S v$, ապա

$$||v - proj_S v|| < ||v - u|| :$$

Այլ կերպ ասած S ենթատարածության բոլոր տարրերից v տարրին ամենամոտը $proj_S v$ տարրն է:

Սահմանում 34. Դիցուք A-ն $(m \times n)$ կարգի մատրից է: Սահմանենք *A մատրիցի զրոյական ենթատարածություն* կամ *A մատրիցի կորիզ*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in R^n : \ Ax = o\}$$

և *A մատրիցի պատկեր*

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in R^m : \ y = Ax\} :$$

$\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^T)$, $\mathcal{R}(A^T)$ ենթատարածություններն անվանում են *A մատրիցի ֆունդամենտալ ենթատարածություններ:*

Օրինակ 142. Գտնել հետևյալ մատրիցի

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \end{array}$$

ֆունդամենտալ ենթատարածությունները:

$rangA = 2$: Բազիսային սյուներն են v_1, v_3-ը: Հետևաբար $\mathcal{R}(A) = lin\{v_1, v_3\}$: $\mathcal{N}(A)$ ենթատարածության բազիսը $Ax = o$ համասեռ համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն է՝

$$\mathcal{N}(A) = lin\{(-2, 1, 0)^T\},$$

ընդ որում

$$dim(\mathcal{N}(A)) = n - r = 3 - 2 = 1,$$

որտեղ r-ը A մատրիցի ռանգն է, իսկ n-ը՝ $Ax = o$ համակարգի անհայտների քանակն է: Նույն ձևով՝ $\mathcal{R}(A^T) = lin\{u_1, u_2\}$, $\mathcal{N}(A^T) = lin\{(0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$:•

Թեորեմ 67. Եթե A-ն $(m \times n)$ կարգի մատրից է, ապա
- $\mathcal{N}(A^T) \perp \mathcal{R}(A)$
- $\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T)$ • $R^m = \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A)$
- $R^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T)$: Այստեղից.

Թեորեմ 68. ***(Ֆրեդհոլմի այլընտրանքը)*** Կամ $Ax = o$ համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում և այդ դեպքում $Ax = b$ համակարգն ունի միակ լուծում ցանկացած b-ի համար, կամ $Ax = o$ համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում և $Ax = b$ համակարգը համատեղելի է (և անորոշ) այն և միայն այն դեպքում, եթե b վեկտորը օրթոգոնալ է $A^T x = o$ համակարգի բոլոր լուծումներին:

Օրինակ 143. Դիտարկենք $Ax = b_1$ և $Ax = b_2$ համակարգերը, որտեղ A-ն նույնն է ինչ օրինակ 142-ում,

$$b_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \ b_2 = (0, 1, 0, 1)^T :$$

Օրինակ 142-ից ունենք $\mathcal{N}(A^T)$ ենթատարածության բազիսը: Քանի որ $b_1 \perp \mathcal{N}(A^T)$, ապա $Ax = b_1$ համակարգն ունի անվերջ քանակությամբ լուծումներ, իսկ b_2-ը օրթոգոնալ չէ $\mathcal{N}(A^T)$-ին, հետևաբար՝ $Ax = b_2$ համակարգն անհամատեղելի է:●

---

324. Պարզել հետևյալ ենթատարածությունների օրթոգոնալությունը

ա) $S_1 = lin\{(2,1,-1)^T,(0,1,1)^T\},\ S_2 = lin\{(-1,2,0)^T\}$,

բ) $S_1 = lin\{(2,1,6)^T,(0,1,0)^T\},\ S_2 = lin\{(-3,0,1)^T\}$,

գ) $S_1 = lin\{(-1,1,-1,1)^T,(0,2,-2,0)^T\}$,
$S_2 = lin\{(1,1,1,1)^T\}$,

դ) $S_1 = lin\{(0,0,2,1)^T,(0,0,1,-2)^T\}$,
$S_2 = lin\{(3,2,0,0)^T,(0,1,-2,2)^T\}$:

325. Գտնել $U = lin\{u_1,u_2,u_3\}$ գծային տարածության օրթոգոնալ լրացման բազիսը, եթե

$$u_1 = (1,0,2,1)^T,\ u_2 = (2,1,2,3)^T,\ u_3 = (0,1,-2,1)^T :$$

326. Գտնել $U = lin\{u_1,u_2\}$ գծային տարածության օրթոգոնալ լրացման բազիսը, եթե

$$u_1 = (1,2,0,0)^T,\ u_2 = (0,1,0,1)^T :$$

Կառուցել $(U^\perp)^\perp$ տարածության բազիսը:

327. Գտնել $v = (1,0,1,1)^T$ տարրի պրոյեկցիան

$$S = lin\{(0,0,-1,1)^T,(0,1,1,1)^T\}$$

ենթատարածության վրա:

328. Գտնել $v = (2,3,4)^T$ տարրի պրոյեկցիան

$$S = lin\{(1,0,1)^T,(0,1,1)^T\}$$

ենթատարածության վրա:

329. Գտնել $b = (2,-2,1)^T$ տարրի պրոյեկցիան ImA ենթատարածության վրա, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

330. Գտնել A մատրիցի ֆունդամենտալ ենթատարածությունների բազիսները

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

331. Դիցուք V_1, V_2, V_3-ը V էվկլիդեսյան տարածության ենթատարածություններ են: Ապացուցել հետևյալ նույնությունները

$$(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1, \ (V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}, \ (V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp},$$

$$V^{\perp} = \{o\}, \ \{o\}^{\perp} = V,$$

որտեղ $\{o\}$-ն զրոյական ենթատարածությունն է:

332. V էվկլիդեսյան տարածության $x = (4, -1, -3, 4)^T$ տարրը ներկայացնել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_2 \in V^{\perp}$ և

$$V = lin\{v_1, v_2, v_3\},$$

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \ v_2 = (1, 2, 2, -1)^T, \ v_3 = (1, 0, 0, 3)^T :$$

333. V էվկլիդեսյան տարածության $x = (5, 2, -2, 2)^T$ տարրը ներկայացնել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_2 \in V^{\perp}$ և

$$V = lin\{v_1, v_2, v_3\},$$

$$v_1 = (2, 1, 1, -1)^T, \ v_2 = (1, 1, 3, 0)^T, \ v_3 = (1, 2, 8, 1)^T :$$

334. V-ով նշանակենք հետևյալ համակարգի

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

լուծումների գծային տարածությունը: $x \in V, \ x = (7, -4, -1, 2)^T$ տարրը ներկայացնել $x = x_1 + x_2$ տեսքով, որտեղ $x_2 \in V^{\perp}$:

335. Դիցուք S-ը V էվկլիդեսյան տարածության ենթատարածություն է: Ցույց տալ, որ եթե $x = x_1 + x_2, \ y = y_1 + y_2, \ x_1, y_1 \in S, \ x_2, y_2 \in S^{\perp}$,

ապա $z = x + y$ տարրը կարելի է ներկայացնել $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in S$, $z_2 \in S^{\perp}$ տեսքով:

336. Ցույց տալ, որ էվկլիդեսյան տարածության ցանկացած երկու ենթատարածություններում կարելի է ընտրել այնպիսի $e_1, \cdots, e_k$ և $f_1, \cdots, f_s$ օրթոնորմավորված բազիսներ, որ $(e_i, f_j) = 0$, եթե $i \neq j$ և $(e_i, f_i) \geq 0$:

21. ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

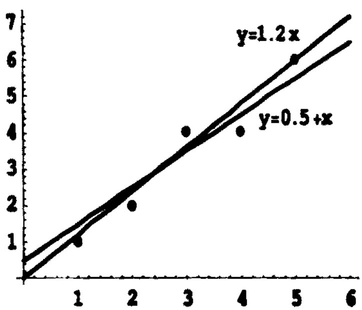
Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը առաջանում է վիճակագրությունում տարբեր մաթեմատիկական մոդելներ կառուցելիս:

Օրինակ 144. Տրված է հետևյալ կետերի բազմությունը

$$(x_1, y_1) = (1,1), (x_2, y_2) = (2,2), (x_3, y_3) = (3,4),$$

$$(x_4, y_4) = (4,4), (x_5, y_5) = (5,6) :$$

Պահանջվում է գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը լավագույն ձևով է (տես ներքևում) մոտարկում տրված բազմությունը: Նախ խնդիրը լուծենք գրաֆիկորեն՝ "աչքաչափով": Կոորդինատական հարթությունում պատկերենք տրված կետերը և տանենք այնպիսի ուղիղներ, որոնք անցնում են պատկերված կետերին մոտ: Օրինակ, նկ 17-ում պատկերված են $y = x + 0.5$ և $y = 1.2x$ ուղիղների գրաֆիկները:

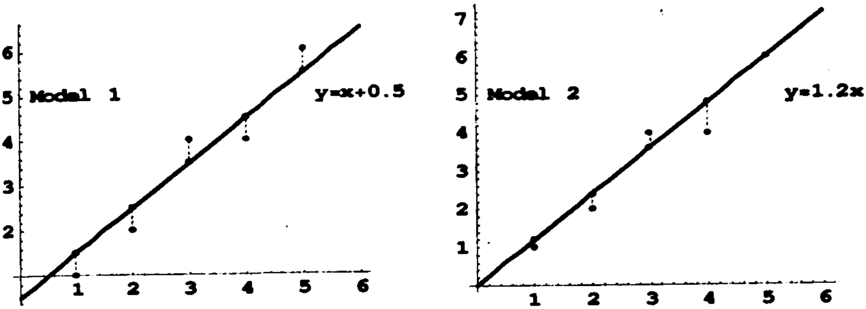


նկ.17

Պարզելու համար թե ո՞ր $y = f(x)$ ֆունկցիան է ավելի լավ մոտարկում

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

կետերը, կարելի է վարվել այսպես. հաշվել $f(x_i)$ արժեքների և տրված y_i արժեքների տարբերությունները, որոնք նկ. 18-ում պատկերված են կետագծով: Այնուհետև, տարբերությունները բարձրացնել քառակուսի և գումարել: Ստացված մեծությունն անվանում են *միջին քառակուսային սխալ:* Տրված կետերի բազմությանն ամենալավը մոտարկում է այն ուղիղը, որին համապատասխանող միջին քառակուսային սխալը նվազագույնն է:



Նկ.18

Երկու գծային մոդելների միջին քառակուսային սխալի հաշվման պրոցեսը նկարագրված է հետևյալ աղյուսակում

$y(x) = 0.5+x$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	1	1.5	$(-0.5)^2$
2	2	2.5	$(-0.5)^2$
3	4	3.5	0.5^2
4	4	4.5	$(-0.5)^2$
5	6	5.5	-0.5^2

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i - y(x_i))^2 = 1.25$$

$y(x) = 1.2x$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	1	1.2	$(-0.2)^2$
2	2	2.4	$(-0.4)^2$
3	4	3.6	0.4^2
4	4	4.8	$(-0.8)^2$
5	6	6.0	0.0^2

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i - y(x_i))^2 = 1.00$$

Համաձայն այս աղյուսակի, երկու ուղիղներից հարկավոր է ընտրել $y(x) = 1.2x$-ը:

Այն գծային մոդելը, որը բոլոր հնարավոր գծային մոդելներից ամենալավն է մոտարկում տրված կետերի բազմությանը միջին քառակուսային իմաստով, անվանում են *գծային ռեգրեսիա*, իսկ որոնման եղանակը՝ *փոքրագույն քառակուսիների եղանակ*:

$y(x) = 1.2x$ ֆունկցիան խնդրի վերջնական լուծումը չէ: Հնարավոր է, որ գտնվեն այնպիսի ուղիղներ, որոնք ավելի են փոքրացնում միջին քառակուսային սխալը: •

Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը. Դիցուք $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $b = (b_i)$, $i = \overline{1,n}$: Գտնել

$$Ax = b \tag{27}$$

համակարգի այնպիսի լուծում, որի համար միջին քառակուսային սխալը

$$e^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - b_i\right)^2$$

փոքրագույնն է:

(27) համակարգը կարող է և համատեղելի չլինել, հակառակ դեպքում, լուծելով (27) համակարգը մեզ հայտնի եղանակներով, կգտնենք խնդրի այնպիսի լուծում, որի համար $e = 0$:

Համաձայն ֆունկցիայի էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի ունենք

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial x_s} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k - b_i\right)a_{is} = 0, \; s = \overline{1,m},$$

որը կարելի է գրառել նաև մատրիցային տեսքով

$$A^T Ax = A^T b : \tag{28}$$

Բացի այդ

$$\frac{\partial^2(e^2)}{\partial x_s^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{is}^2 > 0 :$$

Հետևաբար, եթե (28) համակարգն ունի լուծում, ապա այն փոքրագույն քառակուսիների խնդրի լուծում է: (28) համակարգն անվանում են (27) համակարգին համապատասխանող *նորմալ համակարգ*:

Թեորեմ 69. Նորմալ համակարգը միշտ համատեղելի է:

Նորմալ համակարգի լուծումն անվանում են (27) համակարգի *անիսկական լուծում*: Եթե (27) համակարգը համատեղելի է, ապա անիսկական լուծումը նրա սովորական լուծումն է: Եթե նորմալ համակարգն ունի անվերջ քանակությամբ լուծումներ՝ $x = (x_1, \cdots, x_m)$, ապա սովորաբար ընտրում են այն մեկը, որի համար $x_1^2 + \cdots + x_m^2$ արտահայտությունը փոքրագույնն է: Այդպիսի լուծումն անվանում են *նորմալ անիսկական լուծում:*

Թեորեմ 70. Եթե A-ն $(m \times n)$ կարգի մատրից է և $rang(A) = n$, ապա նորմալ համակարգն ունի միակ լուծում:

Վերադառնանք նախորդ օրինակին

Օրինակ 144 (շարունակություն). Պահանջվող գծային ֆունկցիան գտնելու համար հարկավոր է լուծել

$$Ax = b$$

համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}:$$

Այս համակարգն անհամատեղելի է, քանի որ տրված կետերը չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա: Կազմենք համապատասխան նորմալ համակարգը

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A^T A = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}, \ A^T b = \begin{pmatrix} 63 \\ 17 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից՝

$$55x_1 + 15x_2 = 63$$

$$15x_1 + 5x_2 = 17:$$

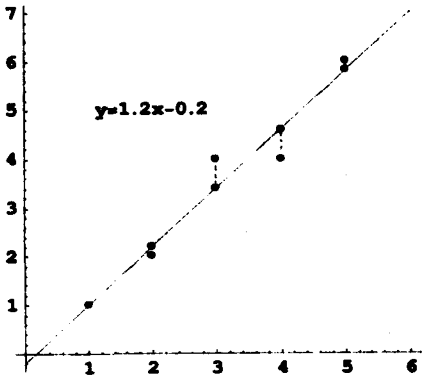
Ստացված համակարգն ունի միակ լուծում

$$x_1 = 1.2, \ x_2 = -0.2:$$

Փոքրագույն քառակուսիների գծային խնդրի լուծումն է

$$y(x) = 1.2x - 0.2$$

գծային ֆունկցիան (տես նկ. 19):



նկ.19

$$y(x) = 1.2x - 0.2$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	1	1	0.0^2
2	2	2.2	$(-0.2)^2$
3	4	3.4	$(-0.6)^2$
4	4	4.6	$(-0.6)^2$
5	6	5.8	0.2^2

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - y(x_i))^2 = 0.8$$

Աղյուսակում հաշված է $y(x) = 1.2x - 0.2$ ֆունկցիային համապատասխանող միջին քառակուսային սխալը, որը ինչպես և սպասվում էր, ավելի փոքր է նախորդ աղյուսակում ստացված սխալներից:•

Նույն խնդիրը ուսումնասիրենք օրթոգոնալության և պրոյեկցիայի գաղափարների օգնությամբ: Եթե $Ax = b$ համակարգն անհամատեղելի է, ապա ցանկալի է գտնել այնպիսի x լուծում, որի համար $||Ax - b||^2$ մեծությունը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Նկատենք, որ եթե օգտագործվում է էվկլիդեսյան սկալյար արտադրյալը, ապա $||Ax - b||^2$ մեծությունը միջին քառակուսային սխալն է:

Քանի որ $Ax = b$ համակարգն անհամատեղելի է, ապա b վեկտորը չի պատկանում ImA տարածությանը: Հետևաբար մենք որոնում ենք $\mathcal{R}(A)$ տարածությունից այնպիսի Ax վեկտոր, որն ամենամոտն է b-ին: Մենք գիտենք, որ այդպիսի վեկտոր է $Ax = proj_{\mathcal{R}(A)}b$ վեկտորը: Քանի որ $Ax - b = proj_{\mathcal{R}(A)}b - b$ վեկտորը օրթոգոնալ է $\mathcal{R}(A)$ տարածությանը, ապա $b = proj_{\mathcal{R}(A)}b - b$ վեկտորը $\mathcal{R}(A^T)$ տարածությունից է, որը համընկնում է $\mathcal{N}(A^T)$ տարածության հետ: Հետևաբար

$$A^T(Ax - b)) = o$$

կամ

$$A^T Ax = A^T b,$$

որը $Ax = b$ համակարգին համապատասխանող նորմալ համակարգն է: •

Օրինակ 145. Գտնել $b = (1, 1, 3)^T$ վեկտորի պրոյեկցիան $\mathcal{R}(A)$ տարածության վրա, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

Նշված պրոյեկցիան գտնելու համար լուծենք $Ax = b$ փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ A^T b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

Նորմալ համակարգն է

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

որի լուծումն է

$$x_1 = \frac{3}{5}, \ x_2 = \frac{1}{2} :$$

Գտնենք b-ի պրոյեկցիան

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} : \bullet$$

Ընդհանրապես, տրված

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$$

կետերի բազմությունը կարելի է մոտարկել $f_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով

$$b(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x) :$$

Այս դեպքում (34) համակարգն ունի հետևյալ տեսքը

$$b(x_i) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x_i), \quad i = \overline{1,m} :$$

Օրինակ 146. Աղյուսակում ներկայացված է մի պետության բնակչության թիվը տարբեր տարիներին: Պահանջվում է որոշել, թե ինչպիսին կլինի բնակչության թիվը 2010թ.:

Տարի	1970	1975	1980	1985	1990
Բնակչություն(մլն.)	3.7	4.1	4.5	4.8	5.3

Աղյուսակում ներկայացված տվյալները մոտարկենք $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ բազմանդամի օգնությամբ: Դիցուք $x = 0$-ն համապատասխանում է 1980թ.-ին: Հետևաբար, հարկավոր է մոտարկել հետևյալ կետերի բազմությունը

$$(-10, 3.7), (-5, 4.1), (0, 4.5), (5, 4.8), (10, 5.3) :$$

Փոքրագույն քառակուսիների խնդրի լուծումն է

$$y(x) = 4.4657143 + 0.078x + 0.0002857x^2$$

ֆունկցիան: Որտեղից՝ $y(30) \approx 7.1$ միլիարդ:●

---

337. Գտնել $Ax = b$ համակարգի փոքրագույն քառակուսիների խնդրի լուծումը, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

338. Համակարգի ջերմաստիճանը ժամանակից կախված է գծայնորեն՝ $T(t) = a + bt$: Որոշել a և b հաստատունների արժեքները՝ օգտվելով աղյուսակում ներկայացված տվյալներից

t	0.5	1.1	1.5	2.1	2.3
T	32.0	33.0	34.2	35.1	35.7 :

339. Լուծել նախորդ խնդիրը՝ ենթադրելով, որ ջերմաստիճանի կախումը ժամանակից արտահայտվում է $T(t) = a+b\ lnt$ օրենքով: Ո՞ր ֆունկցիան է ավելի լավ համարվում փորձի տվյալներին:

340. Լուծել նախորդ խնդիրը՝ ենթադրելով, որ ջերմաստիճանի կախումը ժամանակից արտահայտվում է $T(t) = a+bt+ct^2$ օրենքով: 1,2,3 խնդիրներում առաջարկված կախվածություններից ո՞րն է ավելի լավ համարվում փորձի տվյալներին:

341. Աղյուսակում ներկայացված է մի պետության բնակչության թիվը տարբեր տարիներին: Պահանջվում է որոշել, թե որքա՞ն է լինելու բնակչության թիվը 2010թ.-ին:

Տարի	1980	1985	1990	1995
Բնակչություն(մլն.)	227	237	249	262:

342. Փոքրագույն քառակուսիների գծային խնդիրը լուծել հետևյալ տվյալներով: Հաշվել միջին քառակուսային սխալը

ա) $(-2,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$,

բ) $(0,4)$, $(1,3)$, $(1,1)$, $(2,0)$:

343. Փոքրագույն քառակուսիների գծային խնդիրը լուծել հետևյալ տվյալներով

ա) $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$,

բ) $(-3,0)$, $(1,4)$, $(2,6)$,

գ) $(-3,4)$, $(-1,2)$, $(1,1)$, $(3,0)$,

դ) $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$:

344. Փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը լուծել նախորդ խնդրում ներկայացված տըվյալներով: Լուծումը փնտրել երկրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով:

MATHEMATICA-ում փոքրագույն քառակուսիների խնդիրը լուծվում է

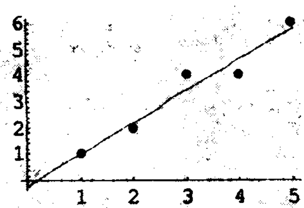
$$Fit[data, \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}, x]$$

հրամանի օգնությամբ, որտեղ data-ն մոտարկվող տվյալներն են, f_1, f_2, $\cdots$, f_n-ը այն ֆունկցիաները, որոնց գծային կոմբինացիայի տեսքով մոտարկվում են data տվյալները, իսկ x-ը մոտարկող ֆունկցիայի արգումենտն է: Այս հրամանը իրականացնենք օրինակ 1-ում առաջարկված տվյալների համար: Լուծումը փնտրենք գծային ֆունկցիայի տեսքով

```
In[1]:= data = {{1, 1}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 4}, {5, 6}};
        g1[x_] = Fit[data, {1, x}, x]

Out[2]= -0.2 + 1.2 x
```

Գծենք $g1[x]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

```
In[3]:= gr1 = ListPlot[data, PlotStyle → PointSize[0.04],
            PlotRange → All, DisplayFunction → Identity];
        gr2 = Plot[g1[x], {x, 0, 5}, PlotRange → All,
            DisplayFunction → Identity];
        Show[gr1, gr2, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```




```
Out[5]= - Graphics -
```

Հաշվենք միջին քառակուսային սխալը

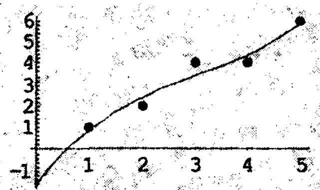
```
In[6]:= dt = Transpose[data];
        Apply[Plus, (g1[dt[[1]]] - dt[[2]])^2]

Out[7]= 0.8
```

Խնդրի լուծումը փնտրենք երրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով

```
In[8]:= g2[x_] = Fit[data, {1, x, x^2, x^3}, x]

Out[8]= -1.6 + 3.16667 x - 0.75 x^2 + 0.0833333 x^3
```

Գծենք $g2[x]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

```
In[9]:= gr3 = Plot[g2[x], {x, 0, 5}, PlotRange → All,
            DisplayFunction → Identity];
        Show[gr1, gr3, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```




```
Out[10]= - Graphics -
```

Հաշվենք միջին քառակուսային սխալը: Ինչպես և սպասվում էր, այն ավելի փոքր է քան նախորդ դեպքում

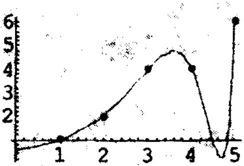
```
In[11]:= Apply[Plus, (g2[dt[[1]]] - dt[[2]])^2]

Out[11]= 0.7
```

Խնդրի լուծումը փնտրենք էքսպոնենտների գծային կոմբինացիայի տեսքով

In[12]:=
```
g3[x_] = Fit[data, {1, E^x, E^(2x), E^(3x)}, x]
```
Out[12]=
```
0.246387 + 0.280448 e^x - 0.00518502 e^(2 x) + 0.0000239641 e^(3 x)
```

Գծենք $g3[x]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

In[13]:=
```
gr4 = Plot[g3[x], {x, 0, 5}, PlotRange -> All,
    DisplayFunction -> Identity];
Show[gr1, gr4, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Out[14]=
```
- Graphics -
```

Հաշվենք միջին քառակուսային սխալը

In[15]:=
```
Apply[Plus, (g3[dt[[1]]] - dt[[2]])^2]
```
Out[15]=
```
0.00322991
```

Չնայած լուծումը փնտրում ենք չորս ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով, սակայն սխալը բավական փոքր է:

Լուծումը փնտրենք չորրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով: Այս դեպքում միջին քառակուսային սխալը հավասար է զրոյի: Դա նշանակում է, որ բազմանդամի գրաֆիկն անցնում է տրված կետերով, այսինքն այն ինտերպոլյացիոն բազմանդամ է:

In[16]:=
```
Fit[data, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x]
```
Out[16]=
```
11. - 20.5833 x + 13.7083 x^2 - 3.41667 x^3 + 0.291667 x^4
```

Նույն ինտերպոլյացիոն բազմանդամը կարելի է ստանալ նաև InterpolatingPolynomial հրամանի օգնությամբ:

```
In[17]:= InterpolatingPolynomial[data, x] // N // Expand

Out[17]= 11. - 20.5833 x + 13.7083 x^2 - 3.41667 x^3 + 0.291667 x^4
```

22. ՄԻՋԻՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄ

Հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում տրված f ֆունկցիան մոտարկել մեկ այլ g ֆունկցիայով: Դիցուք f ֆունկցիան պատկանում է $C[a,b]$ գծային տարածությանը, որտեղ սկալյար արտադրյալը սահմանված է հետևյալ կերպ

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx, \;\; f_1, f_2 \in C[a,b]$$

օրենքով: Սովորաբար g ֆունկցիան ընտրում են $C[a,b]$ տարածության տրված W ենթատարածությունից: Հարկավոր է պայմանավորվել նաև թե ի՞նչ է նշանակում լավագույն մոտարկում: Բնական եղանակներից մեկը՝ պահանջել, որ

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

մակերեսը լինի փոքրագույնը: Եվ քանի որ բացարձակ արժեք պարունակող ինտեգրալները դժվար է հաշվել սովորաբար պահանջում են, որ

$$I = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

արտահայտության արժեքը լինի փոքրագույնը: Այս պայմանին բավարարող $g \in W$ ֆունկցիան անվանում են f ֆունկցիայի *փոքրագույն կամ միջին քառակուսային մոտարկում* W էվկլիդեսյան տարածության նկատմամբ:

Օրինակ 147. Տրված $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$ ֆունկցիան մոտարկենք g ֆունկցիայով, եթե

1. $g(x) = a_0 + a_1 x,\ x \in [0,1]$,
2. $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ x \in [0,1]$,
3. $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x,\ x \in [0,1]$:

Սկսենք 1. դեպքից: Հարկավոր է գտնել այնպիսի a_0, a_1 հաստատուններ, որպեսզի I-ն լինի փոքրագույնը

$$I(a_0,a_1) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \int_0^1 (e^x - a_0 - a_1 x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1) - 2a_0(e-1) - 2a_1 + a_0^2 + a_0 a_1 + \frac{1}{3}a_1^2 :$$

I ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը գտնելու համար հաշվենք մասնակի ածանցյալներն ըստ a_0 և a_1 փոփոխականների և հավասարեցնենք զրոյի

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 2a_0 - 2e + 2 + a_1 = 0,\ \frac{\partial I}{\partial a_1} = a_0 + \frac{2}{3}a_1 - 2 = 0 :$$

Այստեղից a_0 և a_1-ի որոշման համար ստանում ենք հետևյալ համակարգը

$$2a_0 + a_1 = 2(e-1)$$
$$3a_0 + 2a_1 = 6 :$$

Համակարգի լուծումն է

$$a_0 = 4e - 10 \approx 0.873,\ a_1 = 18 - 6e \approx 1.690 :$$

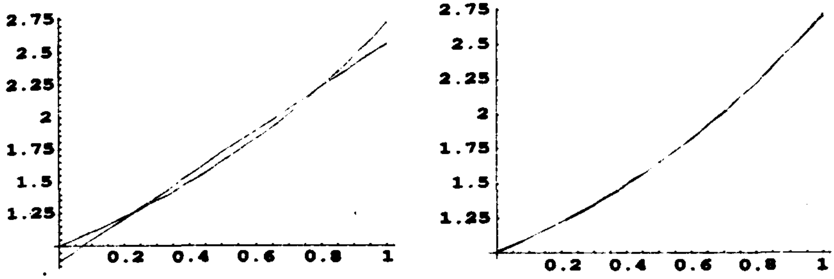
Այսպիսով, f ֆունկցիայի միջին քառակուսային իմաստով լավագույն գծային մոտավորությունն է

$$g(x) = 4e - 10 + (18 - 6e)x \approx 0.873 + 1.690x :$$

Այս դեպքում միջին քառակուսային սխալը հավասար է 0.00394031: Նույն եղանակով կարելի է համոզվել, որ 2. դեպքում

$$g(x) = 1.013 + 0.851x + 0.839x^2 :$$

Այս դեպքում միջին քառակուսային սխալը 0.0000278569 է:



Նկ.20

Նկ. 20-ում պատկերված են f, g ֆունկցիաների գրաֆիկները $[0,1]$ հատվածում՝ ձախ նկարը համապատասխանում է առաջին դեպքին, իսկ աջը՝ երկրորդ: Երկրորդ դեպքում մոտավորությունն այնքան "լավն" է, որ տարբերությունը աչքով հազիվ է նկատվում:

3. դեպքին համապատասխանող g ֆունկցիան կառուցվում է MATHEMATICA-ի գրադարան բաժնում: •

Այժմ նկատենք, որ I ինտեգրալը կարելի է գրել այսպես

$$I=\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx=(f-g,f-g)=||f-g||^2 :$$

Սա նշանակում է, որ g ֆունկցիան ընտրվում է այնպես, որ $||f-g||$ նորմը լինի փոքրագույնը: Այսպիսով, f-ի միջին քառակուսային մոտարկումը W ենթատարածության այն g ֆունկցիան է, որը f-ին ամենամոտն է (f,g) սկալյար արտադրյալի իմաստով:

Թեորեմ 71. Եթե $f\in C[a,b]$ և W-ն $C[a,b]$-ի վերջավոր չափանի ենթատարածություն է $B=\{w_1,\cdots,w_n\}$ օրթոնորմալ բազիսով, ապա f-ի միջին քառակուսային մոտարկումը W տարածությունում որոշվում է

$$f=(f,w_1)w_1+(f,w_2)w_2+\cdots+(f,w_n)w_n$$

բանաձևով:

Օրինակ 147 (շարունակություն) Առաջին դեպքում $W=lin(1,x)$, որտեղ $B=\{1,x\}$ համախումբը W-ի բազիս է: B-ի նկատմամբ կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը և ստանանք $\{1,\sqrt{3}(2x-1)\}$ օրթոնորմալ բազիսը: Համաձայն նախորդ թեորեմի

$$g(x)=(e^x,1)+(e^x,\sqrt{3}(2x-1))\sqrt{3}(2x-1)=$$

$$\int_0^1 e^x dx + 3(2x-1)\int_0^1 e^x(2x-1)dx = 4e - 10 + (18-6e)x$$

որը համընկնում է մինչև այժմ ստացածի հետ: •

Եթե g ֆունկցիան փնտրվում է

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx$$

տեսքով, ապա համապատասխան միջին քառակուսային մոտարկումն անվանում են *n-րդ կարգի Ֆուրիեի մոտարկում:*

345. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների միջին քառակուսային գծային մոտարկումները

ա) $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 1,$

բ) $f(x) = e^{2x},\ 0 \le x \le 1,$

գ) $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:

346. Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների միջին քառակուսային մոտարկումները՝ լուծումը փնտրելով երկրորդ կարգի բազմանդամի տեսքով

ա) $f(x) = x^3,\ 0 \le x \le 1,$

բ) $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Կառուցենք օրինակ 147-ի երրորդ դեպքի g ֆունկցիան: Նախ հաշվենք միջին քառակուսային սխալը կախված a_0, a_1, a_2 հաստատունների արժեքներից

In[1]:=
```
g[x_] = a0 + a1 Cos[x] + a2 Sin[x];
f[x_] = E^x;
Int[a0_, a1_, a2_] = ∫_0^1 (f[x] - g[x])^2 dx
```

Out[3]=

$$\frac{1}{4}\left(4\,a0^2 + 2\left(-1 + a1^2 + (-2 + a2)\,a2 + a1\,(2 + a2) + e^2\right) + 4\,(-a1 + a2)\,e\,\mathrm{Cos}[1] - 2\,a1\,a2\,\mathrm{Cos}[2] - 4\,(a1 + a2)\,e\,\mathrm{Sin}[1] + 8\,a0\,(1 + a2 - e - a2\,\mathrm{Cos}[1] + a1\,\mathrm{Sin}[1]) + (a1 - a2)\,(a1 + a2)\,\mathrm{Sin}[2]\right)$$

Հաշվենք մասնակի ածանցյալները, հավասարացնենք զրոյի և գտնենք a_0, a_1, a_2 հաստատունների արժեքները

In[4]:=
```
ss =
 Solve[{D[Int[a0, a1, a2], a0] == 0,
    D[Int[a0, a1, a2], a1] == 0,
    D[Int[a0, a1, a2], a2] == 0}, {a0, a1, a2}] // N
```

Out[4]= {{a0 → 3.35655 , a1 → -2.33018 , a2 → 0.701576 }}

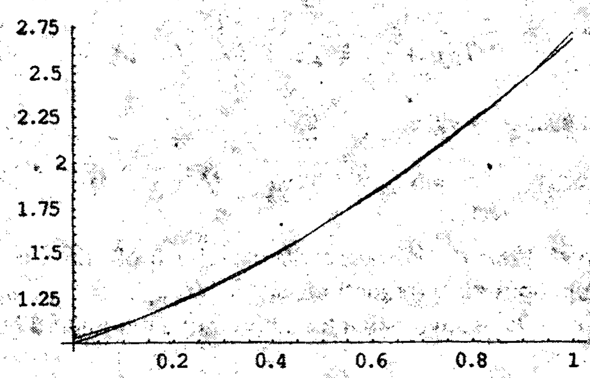
Կառուցենք g ֆունկցիան

In[5]:=
```
g[x_] = a0 + a1 Cos[x] + a2 Sin[x] /. ss // First
```

Out[5]= 3.35655 - 2.33018 Cos[x] + 0.701576 Sin[x]

Գծենք g, f ֆունկցիաների գրաֆիկները

In[6]:=
```
Plot[{g[x], f[x]}, {x, 0, 1}]
```



Out[6]= - Graphics -

Հաշվենք միջին քառակուսային սխալը

In[7]:= $\int_0^1 (g[x] - f[x])^2 dx$

Out[7]= 0.000113839

Գ Լ ՈՒ Խ Չ Ո Ր Ր Ո Ր Դ

ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ

23. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

Դիցուք V-ն և W-ն գծային տարածություններ են:

Սահմանում 35. $T : V \to W$ օպերատորն անվանում են *գծային օպերատոր (գծային արտապատկերում կամ գծային ձևափոխություն)*, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին

ա) *(ադիտիվություն)*

$$T(v+u) = Tv + Tu, \ \forall v, u \in V,$$

բ) *(համասեռություն)*

$$T(\lambda v) = \lambda T v, \ \forall v \in V, \ \forall \lambda \in R^1 :$$

Եթե $v \in V, w \in W$ տարրերն այնպիսին են, որ $Tv = w$, ապա w տարրն անվանում են v տարրի *պատկեր*, իսկ v-ն՝ w-ի *նախապատկեր:*

Եթե $W = R^1$, ապա գծային օպերատորն անվանում են *գծային ֆունկցիոնալ:*

Օրինակ 148. $T : R^2 \to R^2$ օպերատորն այնպիսին է, որ

$$Tv = T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} :$$

Գտնել

ա) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ տարրի պատկերը, բ) $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ տարրի նախապատկերը:

ա) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ տարրի համար ունենք

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

բ) Եթե $Tv = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$, ապա

$$v_1 - v_2 = -1$$
$$v_1 + 2v_2 = 11:$$

Համակարգն ունի միակ լուծում՝ $v_1 = 3, v_2 = 4$: Հետևաբար $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ տարրը w տարրի նախապատկերն է: •

Օրինակ 149. Ցույց տալ, որ նախորդ օրինակի T օպերատորը գծային է:

Դիցուք $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ և $\lambda \in R^1$: Քանի որ

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ u_1+2u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1-v_2 \\ v_1+2v_2 \end{pmatrix} = Tu+Tv,$$

$$T(\lambda u) = T\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ u_1+2u_2 \end{pmatrix} = \lambda Tu,$$

ապա T-ն գծային է: •

Օրինակ 150. Դիցուք $I, O : V \to V$ օպերատորները գործում են համապատասխանաբար

$$Iv = v$$

և

$$Ov = \mathbf{o}$$

օրենքներով: Ստուգել, որ I և O օպերատորները գծային են: S օպերատորն անվանում են *միավոր (նույնական)* օպերատոր, իսկ O-ն անվանում են *զրոյական օպերատոր*: •

Օրինակ 151. $T: V \to V$ օպերատորը գործում է

$$Tv = \alpha v, \ \alpha \in R^1$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ T-ն գծային է: Իրոք

$$T(u+v) = \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v = Tu + Tv,$$

$$T(\lambda u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda Tu : \bullet$$

Օրինակ 152. $T: R^3 \to R^3$ օպերատորը գործում է

$$Tu = [v, u]$$

օրենքով, որտեղ $v \in R^3$-ը ցամկած է: T օպերատորի գծայնությունը հետևում է վեկտորական արտադրյալի հատկություններից: •

Օրինակ 153. Դիտարկենք ոչ գծային օպերատորներ

ա) $Tu = \sin u, \ u \in R^1$ օպերատորը գծային չէ, քանի որ, ընդհանրապես, ցանկացած $u, v \in R^1$ տարրերի համար

$$\sin(u+v) \neq \sin u + \sin v,$$

բ) $Tu = u^2, \ u \in R^1$-ը գծային չէ, քանի որ, ընդհանրապես, ցանկացած $u, v \in R^1$ տարրերի համար

$$(u+v)^2 \neq u^2 + v^2,$$

գ) $Tu = u + 1, \ u \in R^1$-ը գծային չէ, քանի որ ցանկացած $u, v \in R^1$ տարրերի համար

$$T(u+v) \neq T(u) + T(v) : \bullet$$

Թեորեմ 72. Եթե $T: V \to W$ օպերատորը գծային է, ապա

1. $T\mathbf{o} = \mathbf{o}$,
2. $T(-v) = -Tv$,
3. $T(u-v) = Tu - Tv$,
4. Ցանկացած $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n, \ e_k \in V, v_k \in R^1$ տարրի համար

$$Tv = v_1Te_1 + \cdots + v_nTe_n :$$

Թեորեմ 72-ի չորրորդ կետը ցույց է տալիս, որ T գծային օպերատորը որոշված է, եթե հայտնի են V գծային տարածության բազիսի տարրերի պատկերները: Այսինքն, եթե $\{e_1, \cdots, e_n\}$ համախումբը V-ի բազիս է և $\{Te_1, \cdots, Te_n\}$-ը տրված է, ապա հայտնի է, թե ինչպես է գործում T գծային օպերատորը ցանկացած $v \in V$ տարրի համար:

Օրինակ 154. $T : R^3 \to R^3$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}:$$

Գտնել $T\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ տարրը:

Քանի որ

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

ապա

$$T\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = 2T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 2T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\0\end{pmatrix}: \bullet$$

Եթե թեորեմ 72-ի չորս կետերից թեկուզ մեկը ճիշտ չէ, ապա T օպերատորը գծային չէ:

Օրինակ 155. $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1+1\\v_2\end{pmatrix}$ օրենքով գործող օպերատորը գծային չէ, քանի որ

$$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}: \bullet$$

Սահմանում 36. $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1-h\\v_2-k\end{pmatrix}$ օրենքով գործող օպերատորն անվանում են ***սահքի օպերատոր***, եթե h, k հաստատուններից գոնե մեկը զրո չէ:

Համաձայն թեորեմ 72-ի սահքի օպերատորը գծային չէ:

Օրինակ 156. $T: R^2 \to R^3$ օպերատորը գործում է

$$Tv = Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել

ա) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ տարրի պատկերը, **բ)** ցույց տալ, որ T-ն գծային օպերատոր է:

ա) Ունենք

$$Tv = Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Այսինքն՝ $T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

բ) $\forall u, v \in R^2$ և $\forall \lambda \in R^1$-ի համար

$$T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = Tu + Tv,$$

$$T(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda Tu :$$

Հետևաբար T օպերատորը գծային է: •

Օրինակ 157. Եթե A-ն $(m \times n)$ կարգի մատրից է, ապա

$$Tv = Av$$

օրենքով գործող $T: R^n \to R^m$ օպերատորը գծային է: Նման դեպքերում կասենք, որ T օպերատորը սահմանված է A մատրիցով: •

Օրինակ 158. Ցույց տանք, որ

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

մատրիցով սահմանված $T : R^2 \to R^2$ օպերատորը R^2 գծային տարածության յուրաքանչյուր վեկտոր θ անկյունով պտտում է սկզբնակետի շուրջը՝ ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ:

Դիցուք $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: Օգտվենք բևեռային կոորդինատական համակարգից

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}:$$

Ունենք

$$Tv = Av = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}:$$

$Tv \in R^2$ վեկտորն ունի նույն r երկարությունը, սակայն նրա կազմած անկյունը Ox առանցքի հետ φ-ի փոխարեն $\varphi + \theta$-ն է: Այս օրինակում սահմանված T օպերատորն անվանում են ***պտույտի օպերատոր*** R^2***-ում:*** Ինչպես տեսանք, պտույտի օպերատորը պահպանում է վեկտորների երկարությունները, քանի որ այն իրականացվում է օրթոգոնալ մատրիցով: Բացի այդ, այն պահպանում է նաև վեկտորների կազմած անկյունները: Այսինքն՝ u, v և Tu, Tv վեկտորների կազմած անկյունները նույնն են:●

Օրինակ 159. $T : R^3 \to R^3$ օպերատորը, որը սահմանվում է

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցով անվանում են ***պրոյեկտման օպերատոր*** R^3***-ում:*** Եթե $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ապա $Tv = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$: Այսինքն, T օպերատորն իրականացնում է պրոյեկտում xy հարթության վրա: ●

Օրինակ 160. $T : M_{m,n} \to M_{n,m}$ օպերատորը գործում է

$$TA = A^T$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ T-ն գծային օպերատոր է:

Եթե A, B-ն $(m \times n)$ կարգի մատրիցներ են, λ-ն ցանկացած իրական թիվ է, ապա

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = TA + TB,$$

$$T(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda TA : \bullet$$

Օրինակ 161. $C^1[a,b]$-ով նշանակենք $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիաների գծային տարածությունը: Ցույց տանք, որ

$$D_x : C^1[a,b] \to C[a,b], \quad D_x \equiv \frac{d}{dx}$$

օպերատորը գծային է:

Իսկապես

$$D_x(f+g) = D_x f + D_x g, \quad D_x(\lambda f) = \lambda D_x f :$$

Այս օրինակում սահմանված D_x օպերատորն անվանում են ***դիֆերենցիալ օպերատոր:*** $\bullet$

Օրինակ 162. $T : P \to R^1$ օպերատորը (P-ն բոլոր բազմանդամների գծային տարածությունն է) գործում է

$$Tp = \int_a^b p(x)dx$$

օրենքով: T-ի գծայնությունը հետևում է որոշյալ ինտեգրալի գծայնությունից: $\bullet$

Կասենք, որ $T, S : V \to W$ օպերատորները համընկնում են՝ $T = S$, եթե

$$Tv = Sv, \ \forall v \in V :$$

$T, S : V \to W$ օպերատորների գումար՝ $T + S$, սահմանում ենք

$$(T+S)v = Tv + Sv, \ \forall v \in V$$

օրենքով գործող օպերատորը:

$T : V \to W$ օպերատորի և λ թվի արտադրյալ՝ λT, սահմանում ենք

$$(\lambda T)v = \lambda(Tv), \ \forall v \in V, \forall \lambda \in R^1$$

օրենքով գործող օպերատորը:

$T : V \to W$ գծային օպերատորների բազմությունը գծային տարածություն է, որը մենք կնշանակենք $L(V, W)$-ով:

Սահմանում 37. $v \in V$ տարրը կանվանենք $T : V \to V$ գծային օպերատորի *անշարժ կետ*, եթե

$$Tv = v :$$

Համաձայն թեորեմ 72-ի V գծային տարածության զրոյական տարրը $T : V \to V$ գծային օպերատորի անշարժ կետ է:

---

347. Գտնել v տարրի պատկերը և w տարրի նախապատկերը, եթե

ա) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \end{pmatrix}$,

բ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$,

գ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_2 - v_1 \\ 4v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$:

348. Հետևյալ արտապատկերումներից ո՞րն է գծային

ա) $T : R^2 \to R^2, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, որտեղ a-ն գամված թիվ է,

բ) $T : R^2 \to R^2, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + c_1 \\ v_2 + c_2 \end{pmatrix}$, որտեղ $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ տարրը գամված է,

գ) $T : R^2 \to R^2, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, որտեղ λ-ն գամված թիվ է,

դ) $T : R^2 \to R^2, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ե) $T: R^3 \to R^3, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ v_1-v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$,

զ) $T: R^2 \to R^2, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+3 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

է) $T: R^2 \to R^3, T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1} \\ v_1 v_2 \\ \sqrt{v_2} \end{pmatrix}$,

ը) $T: M_{2,2} \to R^1, TA = det(A)$,

թ) $T: M_{3,3} \to M_{3,3}, TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A$,

ժ) $T: M_{2,2} \to M_{2,4}, TA = AB$, որտեղ $B \in M_{2,4}$ մատրիցը գանված է,

ի) $T: P_2 \to P_2, T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x + a_2 x^2$,

լ) $T: P_2 \to P_2, T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2$:

349. $T: R^n \to R^m$ օպերատորը սահմանված է

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցով: Գտնել n, m-ը, $(1,0,2,3)^T$ տարրի պատկերը և $(0,0,0)^T$ տարրի նախապատկերը:

350. Դիցուք $T: R^n \to R^m$ օպերատորը որոշվում է

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցով: Գտնել n, m թվերը, $(2,4)^T$ տարրի պատկերը և $(-1,2,2)^T$ տարրի նախապատկերը: Բացատրել, թե ինչու՞ $(1,1,1)^T$ տարրը նախապատկեր չունի:

351. $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}:$$

Գտնել $(1,0)^T$ և $(0,2)^T$ տարրերի պատկերները:

352. $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}:$$

Գտնել $(1,4)^T$ և $(-2,1)^T$ տարրերի պատկերները:

353. $T : P_2 \to P_2$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T1 = x,\ Tx = 1 + x,\ Tx^2 = 1 + x + x^2 :$$

Գտնել $2 - 6x + x^2$ տարրի պատկերը:

354. $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ գծային օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}:$$

Գտնել $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 4\end{pmatrix}$ տարրի պատկերը:

355. $T : R^2 \to R^2$ օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}:$$

Գտնել $(\alpha,\beta)^T$ տարրի պատկերը և տալ T օպերատորի երկրաչափական նկարագիրը:

356. $T : R^2 \to R^2$ օպերատորն այնպիսին է, որ

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}:$$

Գտնել $(\alpha, \beta)^T$ տարրի պատկերը և տալ T օպերատորի երկրաչափական նկարագիրը:

357. $T : R^2 \to R^2$ օպերատորը գործում է

$$Tu = proj_v u, \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել $(\alpha, \beta)^T, (5, 0)^T$ տարրերի պատկերները և ցույց տալ, որ T-ն գծային է: Գտնել նաև $T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, T\left(T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ տարրերը: Բացատրել պատասխանի երկրաչափական իմաստը: Ցույց տալ, որ T օպերատորը սահմանված է

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

մատրիցով:

358. Ապացուցել, որ $T : V \to V$ գծային օպերատորի անշարժ կետերի բազմությունը V-ի ենթատարածություն է:

359. $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել T-ի անշարժ կետերը:

360. $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել T-ի անշարժ կետերը:

361. $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - h \\ v_2 - k \end{pmatrix}, \ h^2 + k^2 \neq 0$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ T-ն գծային չէ և անշարժ կետ չունի:

362. Ապացուցել, որ ցանկացած գծային օպերատոր յուրաքանչյուր գծորեն կախյալ համախումբ արտապատկերում է գծորեն կախյալ համախմբի:
363. $T: M_{n,n} \to R^1$ օպերատորը գործում է

$$TA = Tr(A)$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ T-ն գծային է:

24. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԻՋՈՒԿ ԵՎ ՊԱՏԿԵՐ

Սահմանում 38. $T: V \to W$ օպերատորի *միջուկ (կորիզ)* անվանում են

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V;\ Tv = o\}$$

բազմությունը:

Օրինակ 163. $T: M_{3,2} \to M_{2,3}$ օպերատորը գործում է $TA = A^T$ օրենքով: Գտնել T օպերատորի միջուկը:

$\mathcal{N}(T)$ բազմությունը բաղկացած է միայն զրոյական տարրից: •

Ակնհայտ է, որ $\mathcal{N}(O) = V$ և $\mathcal{N}(I) = \{o\}$:

Օրինակ 164. $T: R^3 \to R^3$ օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել T օպերատորի միջուկը:

Քանի որ T օպերատորն իրականացնում է պրոյեկցիա xy հարթության վրա, ապա $\mathcal{N}(T)$ բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն տարրերից, որոնք գտնվում են z առանցքի վրա

$$\mathcal{N}(T) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}; v_3 \in R^1\}: \bullet$$

Օրինակ 165. Գտնել $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ օրենքով գործող օպերատորի միջուկը:

Պահանջվում է գտնել R^2 տարածության բոլոր այն $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ տարրերը, որոնց համար

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$v_1 - 2v_2 = 0$$
$$-v_1 = 0 :$$

Քանի որ համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում, ապա $\mathcal{N}(T) = \{o\}$:•

Օրինակ 166. Գտնել $T : R^3 \to R^2$ գծային օպերատորի միջուկը, որը գործում է

$$Tv = Av, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

օրենքով:

T օպերատորի միջուկը R^3 տարածության բոլոր այն $(v_1, v_2, v_3)^T$ կետերի բազմությունն է, որոնց համար

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 - v_2 - 2v_3 \\ -v_1 + 2v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Որտեղից

$$v_1 - v_2 - 2v_3 = 0$$
$$-v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 :$$

Համակարգի պարամետրական լուծումն է

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} :$$

Այստեղից

$$\mathcal{N}(T) = lin\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} : \bullet$$

Թեորեմ 73. $T : V \to W$ գծային օպերատորի միջուկը V գծային տարածության ենթատարածություն է: T-ի միջուկն անվանում են նաև T *օպերատորի զրոյական ենթատարածություն:*

Օրինակ 167. Դիցուք $T : R^5 \to R^4$ գծային օպերատորը գործում է

$$Tv = Av, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել $\mathcal{N}(T)$ տարածության բազիսը:

Ինչպես նախորդ օրինակում ստանում ենք հետևյալ համակարգը

$$v_1 = -2v_3 + v_5$$
$$v_2 = v_3 + 2v_5$$
$$v_4 = -4v_5 :$$

Համակարգի լուծումների ֆունդամենտալ համախումբն է

$$\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

որն էլ կլինի $\mathcal{N}(T)$ տարածության բազիսը: $\bullet$

Այսպիսով, եթե T օպերատորը սահմանված է A մատրիցով, ապա $\mathcal{N}(T)$ տարածությունը $Ax = o$ համասեռ համակարգի լուծումների գծային տարածությունն է՝ $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A)$:

Սահմանում 39. $T : V \to W$ օպերատորի *պատկեր* անվանում են

$$\mathcal{R}(T) = \{w \in W; \ \exists v \in V, \ Tv = w\}$$

բազմությունը:

Թեորեմ 74. $T : V \to W$ գծային օպերատորի պատկերը W գծային տարածության ենթատարածություն է:

Եթե T օպերատորը սահմանված է A $(m \times n)$ կարգի մատրիցով, ապա T-ի պատկերը բոլոր այն b վեկտորների համախումբն է, որոնք ներկայացվում են $b = Ax$ տեսքով, այսինքն՝ $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(A)$, որի չափողականությունը՝ $dim(\mathcal{R}(T)) = rang(A)$:

Օրինակ 168. $T : R^5 \to R^4$ օպերատորը սահմանված է ինչպես օրինակ 167-ում: Գտնել $\mathcal{R}(T)$-ի բազիսը:

A մատրիցը ձևափոխելով սեղանաձև տեսքի կարելի է համոզվել, որ, օրինակ, առաջին, երկրորդ և չորրորդ սյուները բազիսային են: Հետևաբար

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

համախումբը $\mathcal{R}(T)$ տարածության բազիս է:●

Թեորեմ 75. Եթե $T : V \to W$-ն գծային օպերատոր է և $dimV = n$, ապա

$$dim(\mathcal{R}(T)) + dim(\mathcal{N}(T)) = n :$$

Օրինակ 167-ում դիտարկված T օպերատորի համար ունենք

$$dim(\mathcal{N}(T)) = 2, dim(\mathcal{R}(T)) = 3,$$

$$dim(\mathcal{N}(T)) + dim(\mathcal{R}(T)) = dim(R^5) = 5 :$$

Եթե $T : V \to W$ օպերատորով V գծային տարածության տարբեր տարրերի պատկերները տարբեր են, ապա T-ն անվանում են ***ինյեկտիվ օպերատոր***, իսկ եթե W-ի ցանկացած տարր V-ի որևէ տարրի պատկեր է, ապա T-ն անվանում են ***սյուրյեկտիվ օպերատոր:*** Եթե T-ն միաժամանակ և ինյեկտիվ է, և սյուրյեկտիվ, ապա այն անվանում են ***բիյեկտիվ օպերատոր*** կամ ասում են, որ T-ն ***փոխմիարժեք արտապատկերում է:***

Թեորեմ 76. Որպեսզի $T : V \to W$ գծային օպերատորը լինի ինյեկտիվ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathcal{N}(T) = \{o\}$:

Թեորեմ 77. Որպեսզի $T : V \to W$ գծային օպերատորը լինի սյուրյեկտիվ անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$dim(\mathcal{R}(T)) = dimW :$$

Թեորեմ 78. Եթե $T : V \to W$ գծային օպերատոր է և $dimV = dimW = n$, ապա T-ն փոխմիարժեք արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ T-ն սյուրյեկտիվ է:

Օրինակ 169. Դիտարկենք հետևյալ օպերատորները

ա) $T : R^3 \to R^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

T-ն ինյեկտիվ չէ, քանի որ երկու տարբեր տարրերի համապատասխանեցնում է միևնույն տարրը

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

T-ն սյուրյեկտիվ օպերատոր է: Դա ցույց տալու համար նկատենք, որ T օպերատորը սահմանված է հետևյալ A մատրիցով

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$rang(A) = 2 = dim(\mathcal{R}(T)) = dim(R^2) :$$

Մնում է կիրառել թեորեմ 77-ը:

բ) $T : R^2 \to R^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$:

T-ն ինյեկտիվ օպերատոր է, քանի որ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

T-ն սյուրյեկտիվ օպերատոր չէ, քանի որ, օրինակ, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ տարրը նախապատկեր չունի: Նկատենք, որ նույն օրենքով գործող $T : R^2 \to \mathcal{R}(T)$ օպերատորը փոխմիարժեք է:

գ) $T : P_2 \to R^3,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 \xmapsto{T} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ օրենքով գործող օպերատորը փոխմիարժեք է:

դ) $T : M_{m,n} \to M_{n,m}$, $TA = A^T$ օրենքով գործող օպերատորը փոխմիարժեք է: •

Օրինակ 170. $T : R^n \to R^m$ օպերատորը սահմանված է A մատրիցով.

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, դ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

Պարզել, թե տրված օպերատորներից, որն է բիյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, կամ էլ ոչ մեկը և ոչ էլ մյուսը: Համապատասխան արդյունքները ներկայացնենք աղյուսակի տեսքով

$T : R^n \to R^m$	$dim(V)$	$dim(\mathcal{R}(T))$	$dim(\mathcal{N}(T))$	բիյեկտիվ	սյուրյեկ.
ա) $T : R^3 \to R^3$	3	3	0	այո	այո
բ) $T : R^2 \to R^3$	2	2	0	ոչ	ոչ
գ) $T : R^3 \to R^2$	3	2	1	ոչ	այո
դ) $T : R^3 \to R^3$	3	2	1	ոչ	ոչ

•

364. Գտնել T գծային օպերատորի միջուկը

ա) $T : R^3 \to R^3,\ T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

բ) $T : R^4 \to R^4,\ T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_3 \end{pmatrix}$,

գ) $T : P_3 \to R^1,\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0$,

դ) $T : P_2 \to P_1,\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 2a_2x$,

ե) $T : R^2 \to R^2,\ T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$,

զ) $T : R^2 \to R^2,\ T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$:

365. T օպերատորը սահմանված է A մատրիցով: Գտնել T օպերատորի միջուկի և պատկերի բազիսները

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

366. T օպերատորը սահմանված է A մատրիցով: Գտնել՝

$$\mathcal{N}(T),\ dim(\mathcal{N}(T)),\ \mathcal{R}(T),\ dim(\mathcal{R}(T)),$$

եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

367. $T : P_4 \to P_3$ օպերատորը գործում է $Tp(x) = \dfrac{dp(x)}{dx}$ օրենքով: Գտնել T օպերատորի միջուկը:

368. $T : P_2 \to R^1$ օպերատորը գործում է

$$Tp = \int_0^1 p(x)dx$$

օրենքով: Գտնել T օպերատորի միջուկը:

369. $T : R^3 \to R^3$ գծային օպերատորը պրոյեկտում է $v = (2, -1, 1)^T$ տարրին: Գտնել T օպերատորի միջուկի և պատկերի չափողականություն-ները: Գտնել միջուկի բազիսը:

370. Ցույց տալ, որ A մատրիցով սահմանված T գծային օպերատորը սյուրյեկտիվ և բիյեկտիվ է

ա) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **բ)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **դ)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$:

371. Ի՞նչ կարելի է ասել $T : R^n \to R^n$, $Tv = Av$ ձևափոխության $dim(\mathcal{R}(T))$-ի մասին, եթե

ա) $det(A) \neq 0$, **բ)** $det(A) = 0$:

372. $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$, $TA = A - A^T$: Ցույց տալ, որ T օպերատորի միջուկը $(n \times n)$ կարգի սիմետրիկ մատրիցների բազմությունն է:

373. $T : V \to W$ գծային օպերատոր է: Ապացուցել, որ T-ն ինյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $dim(\mathcal{R}(T)) = dimV$:

374. $T : V \to V$ գծային օպերատորը փոխմիարժեք է: Ցույց տալ, որ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ գծորեն անկախ համախմբին համապատասխանության մեջ է դրվում $\{Tv_1, \cdots, Tv_n\}$ գծորեն անկախ համախումբ:

375. $T : V \to V$ գծային օպերատորը փոխմիարժեք է: Ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր v տարրի համար կգտնվի այնպիսի w տարր, որ $v = Tw$:

25. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ

Դիցուք $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ համախումբը R^n գծային տարածության տիպային բազիսն է:

Եթե $T : R^n \to R^m$ գծային ձևափոխությունն այնպիսին է, որ

$$Tv_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{pmatrix}, Tv_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2m} \end{pmatrix}, \cdots, Tv_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{pmatrix},$$

ապա

$$(T)_B = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1m} & v_{2m} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են T *օպերատորի տիպային մատրից:*

Թեորեմ 79. Ցանկացած $v \in R^n$ տարրի համար $Tv = (T)_B v$, այսինքն, T օպերատորը սահմանված է $(T)_B$ մատրիցով:

Օրինակ 171. Գտնենք

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix}$$

օպերատորի տիպային մատրիցը:

Ունենք

$$Tv_1 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, Tv_2 = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Tv_3 = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

T օպերատորի տիպային մատրիցն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ստուգենք

$$(T)_B\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix},$$

որը համարժեք է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix}: \bullet$$

Օրինակ 172. $T : R^2 \to R^2$ օպերատորը R^2 տարածության ցանկացած տարր պրոյեկտում է Ox առանցքի վրա: Գտնել T օպերատորի տիպային մատրիցը:

T օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Տիպային մատրիցն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Մեկ անգամ էլ նկատենք որ

$$Tv = (T)_B v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}: \bullet$$

$T_1 : R^n \to R^m$ և $T_2 : R^m \to R^p$ օպերատորների $T = T_2T_1$ արտադրյալը սահմանում են

$$T : R^n \to R^p,\ Tv = (T_2T_1)v = T_2(T_1v),\ \forall v \in R^n$$

օրենքով:

Թեորեմ 80. Եթե $T = T_2T_1$, ապա $(T)_B = (T_2)_B(T_1)_B$:

Օրինակ 173. Տրված են

$$T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 0 \\ v_1 + v_3 \end{pmatrix}, \quad T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_3 \\ v_2 \end{pmatrix}:$$

Գտնել $(T_2T_1)_B$ և $(T_1T_2)_B$ տիպային մատրիցները:

T_1 և T_2 օպերատորների տիպային մատրիցներն են

$$(T_1)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (T_2)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

Որտեղից

$$(T_2T_1)_B = (T_2)_B(T_1)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(T_1T_2)_B = (T_1)_B(T_2)_B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

•

Սահմանում 40. Եթե $T_1, T_2 : R^n \to R^n$ գծային օպերատորներն այնպիսին են, որ

$$T_2T_1 = T_1T_2 = I,$$

ապա T_2 օպերատորն անվանում են T_1-ի *հակադարձ օպերատոր* և ասում են, որ T_1 օպերատորը *հակադարձելի է:* T օպերատորի հակադարձ օպերատորը նշանակում են T^{-1}-ով:

Թեորեմ 81. Եթե $T : R^n \to R^n$ օպերատորը գծային է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են

- T-ն հակադարձելի օպերատոր է,
- T-ն փոխմիարժեք արտապատկերում է,
- $(T)_B$ մատրիցը հակադարձելի մատրից է:

Թեորեմ 82. Եթե T օպերատորը հակադարձելի է, ապա

$$(T)_B^{-1} = (T^{-1})_B :$$

Օրինակ 174. Դիցուք $T : R^3 \to R^3$ օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 3v_2 + v_3 \\ 3v_1 + 3v_2 + v_3 \\ 2v_1 + 4v_2 + v_3 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Ցույց տալ, որ T-ն հակադարձելի է և գտնել նրա հակադարձը:

T օպերատորի տիպային մատրիցն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}:$$

$(T)_B$ մատրիցը հակադարձելի է և

$$(T)_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} :$$

Այստեղից

$$T^{-1}v = T^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (T)_B^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 \\ -v_1 + v_3 \\ 6v_1 - 2v_2 - 3v_3 \end{pmatrix} : \bullet$$

Դիցուք V-ն և W-ն վերջավոր չափանի գծային տարածություններ են համապատասխանաբար $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $B' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ բազիսներով և $T : V \to W$ գծային օպերատոր է: Նշանակենք

$$(Tv_1)_{B'} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \ (Tv_2)_{B'} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \ \cdots, (Tv_n)_{B'} = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{pmatrix} :$$

$$(T)_{B,B'} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են *T օպերատորի մատրից B, B' բազիսների նկատմամբ:*

Թեորեմ 83.

$$(Tv)_{B'} = (T)_{B,B'}(v)_B :$$

Օրինակ 175. Դիցուք $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել T օպերատորի մատրիցը

$$B = \{v_1, v_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \ B' = \{w_1, w_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

բազիսների նկատմամբ:

Ունենք

$$Tv_1 = T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = 3w_1 + 0w_2,$$

$$Tv_2 = T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = 0w_1 - 3w_2 :$$

Որտեղից

$$(T)_{B,B'} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 176. T գծային օպերատորը սահմանված է ինչպես նախորդ օրինակում: Գտնել Tv տարրը, եթե $v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$:

Կարելի է օգտվել T օպերատորի սահմանումից

$$Tv = T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1\\2\cdot 2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} :$$

Կարելի է օգտվել նախորդ օրինակում ստացված $(T)_{B,B'}$ մատրիցից

$$(Tv)_{B'} = (T)_{B,B'}(v)_B = (T)_{B,B'}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} :$$

Քանի որ B'-ը տիպային բազիսն է, ապա $Tv = (Tv)_{B'} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ •:

Մասնավոր դեպքում, երբ $V = W$ և $B = B'$, $(T)_{(B,B')}$ մատրիցն անվանում են T *օպերատորի մատրից կամ մատրիցային պատկերում* B բազիսում և $(T)_{(B,B')} = (T)_B = (T)_{B'}$: Նկատենք, որ այս նշանակումը մենք նախկինում արդեն օգտագործել ենք:

Օրինակ 177. $D_x : P_2 \to P_1$ օպերատորը գործում է

$$D_x p(x) = p'(x)$$

օրենքով: Գտնել D_x օպերատորի մատրիցը $B = \{1, x, x^2\}$ և $B' = \{1, x\}$ բազիսների նկատմամբ: Ունենք

$$D_x 1 = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x, \quad D_x x = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x, \quad D_x x^2 = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x :$$

Որտեղից

$$(D_x)_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Նկատենք, որ եթե $p(x) = a + bx + cx^2$ ապա

$$(D_x)_{B,B'}\ p = (D_x)_{B,B'} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \end{pmatrix} :$$

Այսինքն $D_x(a + bx + cx^2) = b + 2cx$: •

Օրինակ 178. V-ն կոորդինատների սկզբնակետից դուրս եկող բոլոր վեկտորների գծային տարածությունն է: R^3-ի $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ տիպային բազիսը V-ի բազիս է: $T : V \to V$ օպերատորը V-ի ցանկացած տարրի պրոյեկտում է e_1Oe_2 հարթության վրա: Գտնել T-ի մատրիցը B բազիսում:

Քանի որ

$$Te_1 = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Te_2 = e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Te_3 = o = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ապա

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 179. $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ օպերատորը գործում է

$$Tv = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} v$$

օրենքով: Գտնել T-ի մատրիցը $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ տիպային բազիսում:

Ունենք

$$Te_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}=e_1+3e_3,$$

$$Te_2=e_2+3e_4,\ Te_3=2e_1+4e_3,\ Te_4=2e_2+4e_4:$$

Որտեղից

$$(T)_B=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}:\bullet$$

---

376. Գտնել հետևյալ գծային օպերատորների տիպային մատրիցները

ա) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+v_2\\v_1-v_2\end{pmatrix}$, բ) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5v_1-3v_2\\v_1+v_2\\v_2-4v_1\end{pmatrix}$,

գ) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+v_2\\v_1-v_2\\v_3\end{pmatrix}$, դ) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3v_3-2v_2\\4v_1+11v_3\end{pmatrix}$:

377. T գծային օպերատորի տիպային մատրիցի օգնությամբ գտնել v տարրի պատկերը

ա) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13v_1-9v_2+4v_3\\6v_1+5v_2-3v_3\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

բ) $T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+v_2\\v_3+v_4\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$:

378. Գտնել T օպերատորի տիպային մատրիցը և նրա օգնությամբ գտնել v տարրի պատկերը: Նկարել v-ն և նրա պատկերը ա) T-ն իրականացնում է սիմետրիայի ձևափոխություն կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ R^2 գծային տարածությունում՝

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

բ) T-ն իրականացնում է սիմետրիայի ձևափոխություն $y = x$ ուղղի նկատմամբ R^2 գծային տարածությունում՝ $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

գ) T-ն R^2 գծային տարածությունում իրականացնում է պտույտ $135°$-ով և $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$,

դ) T-ն R^2 գծային տարածությունում իրականացնում է պտույտ $-60°$-ով և $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ե) T-ն իրականացնում է սիմետրիայի ձևափոխություն xy կոորդինատական հարթության նկատմամբ R^3 գծային տարածությունում՝

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

զ) T-ն իրականացնում է սիմետրիայի ձևափոխություն yz կոորդինատական հարթության նկատմամբ R^3 գծային տարածությունում

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}:$$

379. Գտնել T_2T_1 և T_1T_2 օպերատորների տիպային մատրիցները, եթե

ա) $T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 + 3v_2 \end{pmatrix}$, $T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$,

բ) $T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + 2v_2 \\ v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$, $T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - 3v_2 \\ v_3 + 3v_1 \end{pmatrix}$:

380. Հետևյալ գծային ձևափոխություններից, ո՞րն է հակադարձելի: Դրական պատասխանի դեպքում գտնել հակադարձը

ա) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$,

բ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

գ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 \\ 5v_2 \end{pmatrix}$:

381. Գտնել Tv տարրը. օգտագործելով T օպերատորի տիպային մատրիցը, օգտագործելով T օպերատորի մատրիցը B և B' բազիսների նկատմամբ, եթե

ա) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

բ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 - v_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

382. $T : P_2 \to P_3$ օպերատորը գործում է $Tp = xp$ օրենքով: Գտնել T օպերատորի մատրիցը $B = \{1, x, x^2\}$ և $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$ բազիսների նկատմամբ:

383. $T : P_3 \to P_4$ օպերատորը գործում է

$$Tx^k = \int_0^x t^k dt$$

օրենքով: Գտնել T օպերատորի մատրիցը P_3 և P_4 տարածությունների ստանդարտ բազիսների նկատմամբ: Ստացված մատրիցի օգնությամբ գտնել $p(x) = 6 - 2x + 3x^3$ բազմանդամի նախնականը:

384. Ցույց տալ, որ եթե T_1 և T_2 օպերատորները հակադարձելի են, ապա հակադարձելի է նաև T_1T_2 օպերատորը և

$$(T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1} :$$

385. $T : V \to V$ օպերատորն այնպիսին է, որ $T^k = I$ ինչ-որ բնական k-ի համար: Ցույց տալ, որ ցանկացած $b \in V$ տարրի համար $Tx = b$ հավասարումն ունի լուծում:

386. $T : V \to V$ օպերատորն այնպիսին է, որ $T^k = O$ ինչ որ բնական k-ի համար: Ցույց տալ, որ կգտնվի $v \in V$ $(v \neq o)$ տարր այնպիսին, որ $Tv = o$:

387. Գտնել $L(V, V)$ գծային տարածության չափողականությունը, եթե $dimV = n$:

388. Գտնել $L(V, W)$ գծային տարածության չափողականությունը, եթե $dimV = n$ և $dimW = m$:

389. Ցույց տալ, որ եթե T օպերատորի հակադարձը գոյություն ունի, ապա $Tv = o$ հավասարումն ունի միայն $v = o$ լուծում:

390. Գտնել այն գծային օպերատորը, որը տրված v_1, v_2, v_3 վեկտորներն արտապատկերում է u_1, u_2, u_3 վեկտորներին: Գտնել օպերատորի մատրիցային պատկերումը տիպային բազիսում

ա) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

բ) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

391. Ցույց տալ, որ R^n-ում գոյություն ունի այնպիսի գծային օպերատոր, որը տրված $\{v_1, \cdots, v_n\}$ գծորեն անկախ համախումբը արտապատկերում

է $\{u_1, \cdots, u_n\}$ գծորեն անկախ համախմբին: Գտնել այդ օպերատորի մատրիցը $\{v_1, \cdots, v_n\}$ բազիսում:
392. Ապացուցել, որ $T : R^3 \to R^3$, $Tv = (v, u)u$, $u = (1, 2, 3)^T$ օրենքով գործող օպերատորը գծային է և գտնել նրա մատրիցը

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

բազիսում:
393. $T_1, T_2 : M_{2,2} \to M_{2,2}$ օպերատորները գործում են

$$T_1A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}A, \ T_2A = A\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, \ \forall A \in M_{2,2}$$

օրենքներով: Գտնել օպերատորների մատրիցները $M_{2,2}$ գծային տարածության տիպային բազիսում:
394. P_n գծային տարածությունում T օպերատորը գործում է

$$T(p(x)) = p(x+1) + p(x)$$

օրենքով: Գտնել T օպերատորի մատրիցը $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ բազիսում:
395. Ցույց տալ, որ P_n գծային տարածությունում ածանցման գործողությունը գծային արտապատկերում է: Գտնել այդ արտապատկերման մատրիցը հետևյալ բազիսներում

ա) $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$,

բ) $\{1, x-c, \dfrac{(x-c)^2}{2!}, \cdots, \dfrac{(x-c)^n}{n!}\}$, որտեղ c-ն իրական թիվ է:

396. $V = lin\{\cos x, \sin x\}$: Գտնել V-ում գործող դիֆերենցման օպերատորի մատրիցը $\{\sin x, \cos x\}$ բազիսում:

26. ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԱՏՐԻՑԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ՆՈՐ ԲԱԶԻՍԻ ԱՆՑՆԵԼԻՍ: ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ՎԵԿՏՈՐ

Թեորեմ 84. Եթե V-ն գծային տարածություն է B, B' բազիսներով և $T : V \to V$ գծային օպերատոր է, ապա

$$(T)_{B'} = A^{-1}_{B,B'}(T)_B A_{B,B'}.$$

որտեղ $A_{B,B'}$ մատրիցը B բազիսից B' բազիսին անցման մատրիցն է:

Օրինակ 180. Գտնել $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - 2v_2 \\ -v_1 + 3v_2 \end{pmatrix}$ օպերատորի $(T)_{B'}$ մատրիցը, եթե $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$B = \{e_1, e_2\}$-ով նշանակենք R^2 գծային տարածության տիպային բազիսը

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}:$$

B բազիսից B' բազիսին անցման մատրիցն է

$$A_{B,B'} = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

որի հակադարձն է

$$A^{-1}_{B,B'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Հետևաբար

$$(T)_{B'} = P^{-1}(T)_B P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}:$$

$(T)_{B'}$ մատրիցը կարելի է հաշվել այլ եղանակով: Ունենք

$$Te_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Լուծելով համապատասխան համակարգը կստանանք

$$(Te_1)_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

Նույն ձևով

$$Te_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ (Te_2)_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

Որտեղից

$$(T)_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 181. $B = \{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ և $B' = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ համախմբերը R^2-ի բազիսներ են, $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատոր է և

$$(T)_B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} :$$

Գտնել $(T)_{B'}$ մատրիցը: Հաշվել $(v)_B$, $(Tv)_B$, $(Tv)_{B'}$, եթե $(v)_{B'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$: $A_{B,B'}$-ով նշանակենք B բազիսից B' բազիսին անցման մատրիցը: Ունենք

$$A_{B,B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(T)_{B'} = A^{-1}_{B,B'}(T)_B A_{b,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(v)_B = A_{B,B'}(v)_{B'} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad (Tv)_B = (T)_B(v)_B = \begin{pmatrix} -21 \\ -14 \end{pmatrix},$$

$$(Tv)_{B'} = A^{-1}_{B,B'}(Tv)_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

կամ

$$(Tv)_{B'} = (T)_{B'}(v)_{B'} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 182. R^4 գծային տարածությունում գործող T գծային օպերատորի մատրիցը $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ բազիսում հետևյալն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} :$$

Գտնել T օպերատորի մատրիցը

$$B' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$$

բազիսում:

Ունենք

$$A_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(T)_{B'} = A^{-1}_{B,B'}(T)_B A_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 183. $T : R^3 \to R^3$ գծային օպերատոր է և B-ն R^3-ի տիպային բազիսն է: Գտնել T օպերատորի մատրիցը

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

բազիսում, եթե

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$A_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1}_{B,B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(T)_{B'} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} : \bullet$$

Նախորդ օրինակում B' բազիսի նկատմամբ T օպերատորի մատրիցը անկյունագծային է: Կարելի՞ է ցանկացած գծային օպերատորի համար գտնել այնպիսի բազիս, որտեղ նրա մատրիցը անկյունագծային է:

Քանի որ վերջավոր չափանի գծային տարածությունում

$$Tv = (T)_B v,$$

ապա T օպերատորի համար կգտնվի բազիս որտեղ այդ օպերատորի մատրիցը անկյունագծային է, եթե անկյունագծային տեսքի կարելի է բերել $(T)_B$ մատրիցը:

Սահմանում 41. λ թիվն անվանում են $T : V \to V$ գծային օպերատորի սեփական արժեք, եթե կգտնվի $v \in V, v \neq o$ տարր այնպիսին, որ

$$Tv = \lambda v :$$

v տարրն անվանում են λ սեփական արժեքին համապատասխանող T օպերատորի սեփական վեկտոր:

Օրինակ 184. Հայտնի է T գծային օպերատորի մատրիցը որևէ B բազիսում

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} :$$

Կարելի՞ է գտնել այնպիսի բազիս, որտեղ T օպերատորն ունի անկյունագծային մատրից: Դրական պատասխանի դեպքում գտնել այդ բազիսը:

Լուծենք բնութագրիչ հավասարումը

$$det((T)_B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0,$$

որտեղից

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 4 :$$

$\lambda = 4$ սեփական արժեքին համապատասխանում են երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$\lambda = -2$ սեփական արժեքին համապատասխանում է $v_3 = (-2, 1, 1)^T$ սեփական վեկտորը:

T օպերատորը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Համապատասխան բազիսը՝ $\{v_1, v_2, v_3\}$: •

Օրինակ 185. $T : R^3 \to R^3$ գծային օպերատորը գործում է հետևյալ կերպ

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 - v_3 \\ v_1 + 3v_2 + v_2 \\ -3v_1 + v_2 - v_3 \end{pmatrix}:$$

Գտնել բազիս, եթե հնարավոր է, որտեղ T օպերատորն ունի անկյունագծային մատրից:

T-ի տիպային մատրիցն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի և նրա երեք գծորեն անկախ սեփական վեկտորները կազմում են R^3 գծային տարածության բազիս

$$B' = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

որտեղ

$$(T)_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}: \bullet$$

Թեորեմ 85. Եթե T օպերատորը սահմանված է հակադարձելի մատրիցի օգնությամբ, ապա

- ուղիղ գծի պատկերը ուղիղ գիծ է,
- կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի պատկերը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է,
- զուգահեռ ուղիղների պատկերը զուգահեռ ուղիղներ են,
- P և Q ծայրակետեր ունեցող հատվածի պատկերը հատված է, որի ծայրակետերը P, Q կետերի պատկերներն են,

• երեք կետերի պատկերները գտնվում են միևնույն ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանց նախապատկերները նույնպես ընկած են մի ուղղի վրա:

---

397. Գտնել T գծային օպերատորի $(T)_B$ մատրիցը

ա) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}$, $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$,

բ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$,

գ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$,

398. $B = \{(1,3)^T, (-2,-2)^T\}$, $B' = \{(-12,0)^T, (-4,4)^T\}$ համախմբերը R^2 գծային տարածության բազիսներ են, $T : R^2 \to R^2$ գծային օպերատոր է և

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}:$$

ա) Գտնել B բազիսից B' բազիսին անցման P մատրիցը,
բ) $(T)_B$ և P մատրիցների օգնությամբ գտնել $(v)_B$ և $(Tv)_B$, եթե

$$(v)_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

գ) գտնել $(T)_{B'}$,
դ) $(Tv)_{B'}$ կոորդինատները գտնել երկու եղանակով՝ հաշվելով $P^{-1}(Tv)_B$-ն և հաշվելով $(T)_{B'}(v)_{B'}$-ը:

399.

$$B = \{(1,1,0)^T, (1,0,1)^T, (0,1,1)^T\},$$

$$B' = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$$

համախմբերը R^3 գծային տարածության բազիսներ են, $T : R^3 \to R^3$ գծային օպերատոր է և

$$(T)_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}:$$

ա) Գտնել B բազիսից B' բազիսին անցման P մատրիցը,

բ) $(T)_B$ և P մատրիցների օգնությամբ գտնել $(v)_B$ և $(Tv)_B$, եթե

$$(v)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

գ) գտնել $(T)_{B'}$,

դ) $(Tv)_{B'}$ կոորդինատները գտնել երկու եղանակով՝ հաշվելով $P^{-1}(Tv)_B$-ն և հաշվելով $(T)_{B'}(v)_{B'}$-ը:

400. Գտնել այնպիսի B բազիս, որտեղ T օպերատորի մատրիցը անկյունագծային է

ա) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$,

բ) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 + 2v_2 - 3v_3 \\ 2v_1 + v_2 - 6v_3 \\ -v_1 - 2v_2 \end{pmatrix}$,

գ) $T : P_1 \to P_1, T(a + bx) = a + (a + 2b)x$,

դ) $T : P_2 \to P_2, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_2) + (3a_1 + 4a_2)x + a_2x^2$:

401. Ապացուցել, որպեսզի T օպերատորի մատրիցը տրված $\{e_k\}_{k=1}^n$ բազիսում լինի անկյունագծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ e_k տարրերը լինեն T օպերատորի սեփական վեկտորներ:

402. Ցույց տալ, որ T և T^{-1} (եթե այն գոյություն ունի) օպերատորներն ունեն նույն սեփական վեկտորները: Գտնել նրանց սեփական արժեքների միջև եղած կապը:

403. Ցույց տալ, որ T և $T - \lambda I$ օպերատորներն ունեն նույն սեփական վեկտորները ցանկացած λ թվի համար: Գտնել նրանց սեփական արժեքների միջև եղած կապը:
404. T օպերատորը գործում է R^2 գծային տարածությունում՝ պտտելով վեկտորները $\varphi \in (0, \pi)$ անկյունով: Ցույց տալ, որ այն չունի սեփական վեկտորներ:
405. Ցույց տալ, որ որևէ բազիսում օպերատորի մատրիցի որոշիչը կախված չէ այդ բազիսի ընտրությունից:
406. Տրված է T օպերատորի մատրիցը $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ բազիսում

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}:$$

Գտնել օպերատորի մատրիցը $B' = \{2e_1 + 3e_2 + e_3, 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3\}$ բազիսում:
407. Տրված է T օպերատորի մատրիցը $B = \{(1,2)^T, (2,3)^T\}$ բազիսում

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

և S օպերատորի մատրիցը $B' = \{(3,1)^T, (4,2)^T\}$ բազիսում

$$(S)_{B'} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}:$$

Գտնել $(T + S)_{B'}$:
408. $T(1,0)^T = (0,1)^T$, $T(0,1)^T = (1,0)^T$: Պարզել T օպերատորի երկրաչափական իմաստը:
409. $T(1,0)^T = (2,0)^T$, $T(0,1)^T = (0,1)^T$: Պարզել T օպերատորի երկրաչափական իմաստը:
410. Գտնել $(1,0)^T, (0,1)^T, (2,2)^T$ կետերի պատկերները, եթե T օպերատորը սահմանված է հետևյալ A մատրիցով

ա) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

411. Պարզել հետևյալ մատրիցներով սահմանված օպերատորների երկրաչափական իմաստը

ա) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,   բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,   դ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

412. Դիցուք ℓ-ը $ax + by = 0$ ուղիղն է հարթության վրա և $L : R^2 \to R^2$ գծային օպերատորը իրականացնում է սիմետրիայի ձևափոխություն ℓ ուղղի նկատմամբ: Գտնել L օպերատորի տիպային մատրիցը, եթե ℓ-ը
ա) $x = 0$ ուղիղն է, բ) $y = 0$ ուղիղն է, գ) $x - y = 0$ ուղիղն է:

27. ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԳՈՐԾՈՂ ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ

V-ն էվկլիդեսյան տարածություն է: $T^* : V \to V$ գծային օպերատորն անվանում են T-ի ***համալուծ օպերատոր***, եթե

$$(Tv, u) = (v, T^* u), \ \forall v, u \in V :$$

T օպերատորն անվանում են ***ինքնահամալուծ օպերատոր***, եթե

$$T = T^* :$$

T օպերատորն անվանում են ***օրթոգոնալ օպերատոր***, եթե

$$(Tx, Ty) = (x, y) :$$

Օրինակ 186. Ցույց տալ, որ ցանկացած $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ օրթոնորմավորված բազիսում T ինքնահամալուծ օպերատորի $(T)_B = (t_{ij})$ մատրիցը սիմետրիկ է:

Հաշվենք (Te_k, e_j) սկալյար արտադրյալը

$$(Te_k, e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\delta_{ij} = t_{jk} :$$

Մյուս կողմից, համաձայն $T = T^*$ պայմանի

$$(Te_k, e_j) = (e_k, Te_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(e_k, e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\delta_{ki} = t_{kj} :$$

Որտեղից $t_{kj} = t_{jk}$, այսինքն՝ $(T)_B = (T)_B^T$•:

Օրինակ 187. Ցույց տալ, որ ցանկացած $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ օրթոնորմավորված բազիսում T օրթոգոնալ օպերատորի $(T)_B$ մատրիցը օրթոգոնալ է: Համաձայն սահմանման

$$(Te_k, Te_p) = (e_k, e_p) = \delta_{kp} :$$

Այսինքն, $\{Te_1, Te_2, \cdots, Te_n\}$ համախումբը օրթոնորմավորված բազիս է: Անցումը B բազիսից $\{Te_1, \cdots, Te_n\}$ բազիսին իրականացվում է $(T)_B = (t_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$ մատրիցով հետևյալ բանաձևերով

$$(T)_B e_k = \sum_{j=1}^{n} e_j t_{jk}, \ k = \overline{1, n} :$$

Ցույց տանք, որ $(T)_B$-ն օրթոգոնալ է

$$(Te_k, Te_p) = \sum_{j,s=1}^{n} t_{jk} a_{sp} \delta_{js} = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} t_{jp},$$

որը մատրիցական գրառումով ունի հետևյալ տեսքը

$$(T)_B (T)_B^T = E : \bullet$$

---

413. R^3 գծային տարածությունում T օպերատորը գործում է

$$Tx = [b, x], \ \forall x \in R^3$$

օրենքով, որտեղ $b \in R^3$ վեկտորը զանված է: Ցույց տալ, որ T-ն գծային օպերատոր է և գտնել նրա մատրիցը, աջ եռյակ կազմող օրթոնորմավորված բազիսում:

414. Պարզել, թե հետևյալ արտապատկերումներից որո՞նք են գծային

ա) $T : R \to R,\ x = (x, a)b$, որտեղ a, b-ն զանված տարրեր են,

բ) $T : R \to R,\ Tx = (a, x)x$, որտեղ $a \in R$ զանված է:

28. ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐ: ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՎԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ

$x_1, \cdots, x_n$ փոփոխականների

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \; a_{ij} = a_{ji}, \; a_{ij} \in R^1$$

ֆունկցիան անվանում են *քառակուսային ձև*, իսկ $A = (a_{ij}), \; i,j = \overline{1,n}$ մատրիցն անվանում են *քառակուսային ձևի մատրից*:

Քառակուսային ձևը գրենք մատրիցային տեսքով

$$Q = x^T A x, \; x = (x_1, \cdots, x_n) :$$

Քանի որ ցանկացած սիմետրիկ մատրից կարելի է P օրթոգոնալ մատրիցով բերել D անկյունագծային տեսքի՝ $A = P^T D P$, ապա Q քառակուսային ձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով

$$Q = x^T A x = x^T P^T D P x = (Px)^T D (Px) :$$

Կատարելով $Px = y$ նշանակում, կստանանք

$$Q = y^T D y,$$

կամ որ նույնն է

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2,$$

որն անվանում են քառակուսային ձևի *կանոնական տեսք*: Ընդ որում, λ_k թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են կամ D մատրիցի գլխավոր անկյունագծի տարրերը: λ_k թվերին անվանում են քառակուսային ձևի *կանոնական գործակիցներ:*

Սահմանում 42. Q քառակուսային ձևն անվանում են *դրական (բացասական) որոշված*, եթե $x^T A x > 0$ $(x^T A x < 0)$ ցանկացած $x \neq o$ տարրի համար: Q քառակուսային ձևն անվանում են *ոչբացասական (ոչդրական)* որոշված, եթե ցանկացած x տարրի համար $x^T A x \geq 0$ $(x^T A x \leq 0)$:

Թեորեմ 86. Քառակուսային ձևը կլինի դրական (բացասական) որոշված այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա բոլոր կանոնական գործակիցները դրական (բացասական) են:

Թեորեմ 87.(*Սիլվեստրի կանոնը*) Որպեսզի քառակուսային ձևը լինի դրական որոշված, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա անկյունային մինորները լինեն դրական: Որպեսզի քառակուսային ձևը լինի բացասական որոշված, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա անկյունային մինորները լինեն նշանափոխ, ընդ որում $M_1 < 0$:

Թեորեմ 88.(*Յակոբիի եղանակը*) Եթե անկյունային մինորները՝ $M_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, ապա քառակուսային ձևը կարելի է բերել կանոնական տեսքի եռանկյունաձև մատրիցով և

$$b_{11} = M_1, \ \cdots, \ b_{kk} = \frac{M_k}{M_{k-1}}$$

կանոնական գործակիցներով:

Թեորեմ 89. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի սիմետրիկ մատրից է $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ սեփական արժեքներով: Եթե E^n էվկլիդեսյան տարածությունում $||x|| = 1, x \in E^n$, ապա

• $\lambda_1 \geq x^T Ax \geq \lambda_n$,

• $x^T Ax = \lambda_n$, եթե x-ը λ_n սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է և $x^T Ax = \lambda_1$, եթե x-ը λ_1 սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է:

Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է քառակուսային ձևը բերել կանոնական տեսքի՝ առանց հաշվելու A մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական ֆունկցիաները: Օրինակներով նկարագրենք քառակուսային ձևը կանոնական տեսքի բերելու ***Լագրանժի եղանակը:***

Օրինակ 188.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

քառակուսային ձևը բերել կանոնական տեսքի:

Քանի որ x_2^2-ու գործակիցը զրո չէ՝ դիտարկենք բոլոր այն գումարելիները, որոնք պարունակում են x_2 փոփոխական (նույն հաջողությամբ կարելի է սկսել x_3 փոփոխականից)

$$3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 :$$

Լրացնենք այս արտահայտությունը մինչև լրիվ քառակուսի և հանենք ավելացված գումարելիները

$$3\left(x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right)^2-\frac{4}{3}x_1^2-\frac{1}{3}x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_3 :$$

Կատարենք նշանակում

$$y_2=x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3 :$$

Կստանանք

$$Q(x_1,x_2,x_3)=3y_2^2+w(x_1,x_3),\ w(x_1,x_3)=\frac{8}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{16}{3}x_1x_3 :$$

Նույնը կրկնենք $w(x_1,x_3)$ քառակուսային ձևի նկատմամբ

$$Q=-\frac{4}{3}y_1^2+3y_2^2+8y_3^2,$$

որտեղ $y_1=x_1-2x_3,\ y_3=x_3$:

Գրենք այն P մատրիցը, որը քառակուսային ձևը բերեց կանոնական տեսքի

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2/3 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ y=Px :$$

Այսինքն

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2/3 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 189. $2x_3x_4$ քառակուսային ձևը Լագրանժի եղանակով բերել կանոնական տեսքի:

Թող

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3+y_4,\ x_4=y_3-y_4 :$$

կստանանք
$$2y_3^2 - 2y_4^2 : \bullet$$

Օրինակ 190. Դիտարկենք հետևյալ երկրորդ կարգի հավասարումը
$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0 :$$

Գրենք նրան համապատասխանող քառակուսային ձևը
$$Q = 13x^2 - 10xy + 13y^2,$$

որի մատրիցն է
$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 18$: Սա նշանակում է, որ նոր փոփոխականներով երկրորդ կարգի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը
$$8(x')^2 + 18(y')^2 - 72 = 0$$

կամ
$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1,$$

որը մեզ լավ ծանոթ էլիպսի հավասարումն է: Այս օրինակում քառակուսային ձևի կանոնական տեսքի բերելը համարժեք է կոորդինատական համակարգի պտույտին, որի արդյունքում անհետացավ xy գումարելին: $\bullet$

Օրինակ 191.
$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

քառակուսային ձևը բերել կանոնական տեսքի օրթոգոնալ ձևափոխությամբ: Քառակուսային ձևի մատրիցն է
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

որի սեփական արժեքներն են՝ $\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 4$: Ուրեմն՝ քառակուսային ձևի կանոնական տեսքն է
$$Q = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 :$$

A մատրիցի սեփական վեկտորներն են

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Օրթոգոնալացնենք v_2 և v_3 վեկտորները:

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Այժմ $\{v_1, v_2, w_3\}$ համախումբը օրթոգոնալ բազիս է: Նորմավորենք

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{30} \\ \sqrt{5}/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

ստանալով օրթոնորմավորված բազիս: Համապատասխան օրթոգոնալ ձևափոխությունն է

$$P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5}/\sqrt{6} \end{pmatrix} : \bullet$$

Թեորեմ 90. Դիցուք

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

երկրորդ կարգի հավասարում է, իսկ

$$x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

արտահայտությունը նրան համապատասխանող քառակուսային ձևն է: Կոորդինատական առանցքները կարելի է պտտել այնպես, որ նոր $x'y'$ կոորդինատական համակարգում հավասարումն ունենա հետևյալ տեսքը

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

որտեղ $\lambda_{1,2}$ թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են: Համապատասխան պտույտը կարելի է իրականացնել $x = Px'$ ձևափոխության օգնությամբ, եթե P օրթոգոնալ մատրիցը $x^T Ax$ քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի և $det(P) = 1$:

Օրինակ 192. Դիտարկենք հետևյալ երկրորդ կարգի հավասարումը

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz - 36 = 0 :$$

Այս հավասարմանը համապատասխանող քառակուսային ձևի մատրիցն է

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

որի սեփական արժեքներն են $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$: Նոր փոփոխականներով

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 9(z')^2 - 36 = 0$$

կամ

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{3^2} + \frac{(z')^2}{2^2} = 1,$$

որը էլիպսոիդի հավասարումն է: •

---

430. Քառակուսային ձևը Լագրանժի եղանակով ձևափոխել կանոնական տեսքի և գրել համապատասխան գծային ձևափոխությունը

ա) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$,
բ) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$,
գ) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
դ) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$,
ե) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$,
զ) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$,
է) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$:

431. Գտնել λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում քառակուսային ձևը դրական որոշված է

ա) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,
բ) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$,
գ) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
դ) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$,
ե) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$:

432. Քառակուսային ձևը ձևափոխել կանոնական տեսքի օրթոգոնալ ձևափոխությամբ և գրել համապատասխան օրթոգոնալ ձևափոխությունը

ա) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$,
բ) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$,
գ) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,
դ) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,
ե) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$,
զ) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$:

433. Գտնել λ պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում քառակուսային ձևը բացասական որոշված է

ա) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$,
բ) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$:

Գ Լ Ո Ւ Խ Հ Ի Ն Գ Ե Ր Ո Ր Դ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

29. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ

$\mathbf{C}$-ով նշանակենք (x, y) կարգավորված թվազույգերի բազմությունը, որտեղ x, y-ը իրական թվեր են: $(0, 1)$ թվազույգին անվանում են *կեղծ միավոր* և նշանակում են՝ $i = (0, 1)$: Հարթության ցանկացած կետ նույնացվում է $\mathbf{C}$ բազմության (x, y) տարրի հետ, մասնավորապես, թվային առանցքի $(x, 0)$ կետը նույնացվում է x իրական թվի հետ՝ $(x, 0) = x$: Այնուհետև $z_1 = z_2$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$: $\mathbf{C}$ բազմության $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ տարրերի համար սահմանվում են հետևյալ գործողությունները

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$,
2. $\lambda z_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, կամայական λ իրական թվի համար,
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$, եթե $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$:

$\mathbf{C}$ բազմությունը, սահմանված գործողություններով, անվանում են *կոմպլեքս թվերի բազմություն:*

Օգտվելով $i = (0, 1)$ նշանակումից ցանկացած (x, y) թվազույգ կարելի է ներկայացնել

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy$$

տեսքով, որին անվանում են կոմպլեքս թվի *հանրահաշվական* ներկայացում: Ընդ որում, x-ն անվանում են կոմպլեքս թվի *իրական մաս* և նշանակում են

$x = Rez$, իսկ y-ն անվանում են կոմպլեքս թվի ***կեղծ մաս*** և նշանակում են $y = Imz$:

Օրինակ 193. $z_1 = 4 - 5i, z_2 = -1 + 6i$: Գտնել $z_1 + z_2, z_1 - z_2, 3z_1, -z_2$:

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-1 + 6i) = (4 - 1) + (-5 + 6)i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = (4 - 5i) - (-1 + 6i) = (4 + 1) + (-5 - 6)i = 5 - 11i$$

$$3z_1 = 3(4-5i) = 12-15i, \ -z_2 = (-1)z_2 = (-1)(-1+6i) = 1-6i : \bullet$$

Օրինակ 194. $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 4 + 5i$: Գտնել $z_1 z_2$:
Համաձայն կոմպլեքս թվերի արտադրյալի սահմանման

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)(4 + 5i) = (3 \cdot 4 - 2 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)i = 2 + 23i : \bullet$$

Ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները (ստուգել)

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ z_1 z_2 = z_2 z_1, \ z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3, \ z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$0 + z = z, \ z + (-z) = 0, \ 1 \cdot z = z :$$

$z = x + iy$ կոմպլեքս թվի ***կոմպլեքս համալուծ*** կանվանենք $\overline{z} = x - iy$ կոմպլեքս թիվը: Երկրաչափորեն $\overline{z}$-ը z-ի սիմետրիկ կետն է Ox առանցքի նկատմամբ:

Օրինակ 195.

$$z = 3 - 2i \qquad \bar{z} = 3 + 2i$$

$$z = -4 - 2i \qquad \bar{z} = -4 + 2i$$

$$z = i \qquad \bar{z} = -i$$

$$z = 4 \qquad \bar{z} = 4 : \bullet$$

Օրինակ 196. $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 1 - 2i$: Հաշվել $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$\frac{z_1}{z_2}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք $\bar{z}_2$-ով

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{3+4i}{1-2i}\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i : \bullet$$

Յանկացած z կոմպլեքս թվի համար

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

մեծությունն անվանում են z ***կոմպլեքս թվի մոդուլ:***

Թեորեմ 91. Յանկացած z կոմպլեքս թվի համար ճիշտ է

$$z\bar{z} = |z|^2 :$$

Թեորեմ 92. Յանկացած z_1, z_2 կոմպլեքս թվերի համար ճիշտ են

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ \bar{\bar{z}} = z :$$

Քանի որ բևեռային կոորդինատական համակարգը ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգի հետ կապված է

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$$

բանաձևերով, ապա կոմպլեքս թվերը կարելի է ներկայացնել

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

տեսքով, որն անվանում են կոմպլեքս թվի ***եռանկյունաչափական*** կամ ***բևեռային*** ներկայացում: φ անկյունն անվանում են z կոմպլեքս թվի ***արգումենտ***: Նկատենք, որ կոմպլեքս թվի արգումենտը միարժեքորեն չի որոշվում: Արգումենտի այն արժեքը, որը բավարարում է $-\pi < \varphi \leq \pi$ պայմանին, անվանում են ***արգումենտի գլխավոր արժեք*** և նշանակում են՝ $\varphi = argz$: Ցույց տալ, որ $z = x + iy$ կոմպլեքս թվի արգումենտի գլխավոր արժեքը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով

$$argz = arctg\frac{y}{x}, \ x > 0$$

$$argz = \frac{\pi}{2}, \; x = 0, \, y > 0$$

$$argz = -\frac{\pi}{2}, \; x = 0, \, y < 0$$

$$argz = \pi + arctg\frac{y}{x}, \; x < 0, \, y \geq 0$$

$$argz = -\pi + arctg\frac{y}{x}, \; x < 0, \, y \leq 0 :$$

Օրինակ 197. Գտնել $z = -1+i$ կոմպլեքս թվի մոդուլը և արգումենտի գլխավոր արժեքը:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \;\; arg(-1+i) = arctg(-1)+\pi = \frac{3}{4}\pi : \bullet$$

Օրինակ 198. $z = 1+\sqrt{3}i$ կոմպլեքս թիվը ներկայացնել եռանկյունաչափական տեսքով:

Հաշվենք z-ի մոդուլը և արգումենտի գլխավոր արժեքը

$$|z| = 2, \;\; argz = \frac{\pi}{3} :$$

Ունենք

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) : \bullet$$

Դիցուք $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ և $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$: Ստուգել, որ

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] :$$

Այլ կերպ ասած

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \;\; arg(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2 + 2\pi k$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \;\; arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = argz_1 - argz_2 + 2\pi k :$$

Այստեղից հետևում է *Մուավրի բանաձևը*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

որը ճիշտ է ցանկացած n ամբողջ թվի համար:

Նշենք նաև եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների կապը բացահայտող հետևյալ բանաձևը

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi :$$

Այստեղից, ցանկացած $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ կոմպլեքս թիվ կարելի է ներկայացնել

$$z = re^{i\theta}$$

ցուցչային տեսքով:

Օրինակ 199. Հաշվել $(1 - i\sqrt{3})^3(1+i)^2$:

$$(1 - i\sqrt{3})^3(1+i)^2 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^3(1 + 2i + i^2) = 2^3e^{-i\pi}2i = -16i : \bullet$$

Օրինակ 200. Ապացուցել նույնությունը

$$(|z|^2 - 1)^2 + (2Rez)^2 = |z^2 + 1|^2 :$$

Հաշվի առնելով $|z|^2 = z\overline{z}$ և $2Rez = z + \overline{z}$ նույնությունները կարող ենք գրել

$$(|z|^2 - 1)^2 + (2Rez)^2 = (z\overline{z} - 1)^2 + (z + \overline{z})^2 =$$

$$= (z\overline{z})^2 - 2z\overline{z} + 1 + z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 =$$

$$= (z\overline{z})^2 + 1 + z^2 + \overline{z}^2 =$$

$$= (z^2 + 1)(\overline{z}^2 + 1) = (z^2 + 1)\overline{(z^2 + 1)} = |z^2 + 1|^2 : \bullet$$

Օրինակ 201. Լուծել հավասարումը

$$z^3 = (-1 + i\sqrt{3})\overline{z} :$$

Լուծումը փնտրենք $z = re^{i\varphi}$ ցուցչային տեսքով: Հաշվի առնելով, որ $\overline{z} = re^{-i\varphi}$ և $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i(2\pi/3)}$, կստանանք

$$r^3 e^{3i\varphi} = 2re^{i(2\pi/3-\varphi)} :$$

Այստեղից

$$r^3 = 2r,\ 3\varphi = \frac{2}{3}\pi - \varphi + 2\pi k,$$

որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է: Հետևաբար՝

$$r_1 = 0,\ r_2 = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} :$$

$z = \sqrt{2}e^{i(\pi/6+\pi k/2)}$ թվերն իրարից տարբեր են, եթե $k = 0, 1, 2, 3$: Այսպիսով

$$z_1 = 0,\ z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3 = iz_2,\ z_4 = -z_2,\ z_5 = -iz_2 : \bullet$$

Օրինակ 202. Հարթության վրա նշել z կոմպլեքս թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$|z - z_0| < r :$$

z-ը ներկայացնենք $z = x + iy$ հանրահաշվական տեսքով: Դիցուք $z_0 = x_0 + iy_0$: Ունենք՝

$$|z - z_0|^2 = |x - x_0 + i(y - y_0)|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2 :$$

Ստացանք (x_0, y_0) կենտրոնով և r շառավղով շրջան:●

Դիցուք n-ը բնական թիվ է, z-ը՝ կոմպլեքս: w կոմպլեքս թիվը կանվանենք z կոմպլեքս թվի n-րդ աստիճանի արմատ, եթե

$$w^n = z :$$

Դիցուք $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ և $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$: Ունենք

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

որտեղից

$$\rho^n = r,\ n\alpha = \theta + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots :$$

Այսպիսով

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots :$$

Այս բանաձևում կարելի է սահմանափակվել $k = 0, \cdots, n-1$ արժեքներով, քանի որ մնացած դեպքերում w կոմպլեքս թվի արժեքները կրկնվում են (ստուգել):

Օրինակ 203. Հաշվել $\sqrt[3]{-8}$:

Քանի որ $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$ ապա

$$w_k = (-8)^{1/3} = 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2,$$

որտեղից

$$w_1 = 1 + i\sqrt{3},\ w_2 = -2,\ w_3 = 1 - i\sqrt{3} :$$

Նկատենք, որ ստացված թվերը գտնվում են 2 շառավղով շրջանագծի վրա՝ այն բաժանելով երեք հավասար մասերի: Ընդհանրապես, z կոմպլեքս թվի n-րդ կարգի արմատները գտնվում են $|z|^{1/n}$ շառավղով շրջանագծի վրա այն բաժանելով n հավասար մասերի: Դա նշանակում է, որ գտնելով արմատներից որևէ մեկը, մյուս $n-1$ հատը կարելի է ստանալ ստացված արմատը $\frac{2\pi}{n}$ անկյունով շրջանագծի վրա պտտելով : •

Օրինակ 204. Հաշվել $1^{1/4}$:

Նկատենք, որ արմատներից մեկը 1 թիվն է: Պտտելով այն միավոր շրջանագծի վրայով $90°$-ով կստանանք $i, -1, -i$ թվերը:•

Թեորեմ 93. ***(Հանրահաշվի հիմնական թեորեմը)*** Յուրաքանչյուր n-րդ կարգի բազմանդամ ունի n արմատ, եթե յուրաքանչյուրը հաշվենք այնքան անգամ, որքան իր պատիկությունն է:

Օրինակ 205. Լուծել հավասարումը

$$x^2 + 1 = 0 :$$

Այս հավասարումը իրական լուծումներ չունի: Հավասարման լուծումները փնտրենք կոմպլեքս թվերի բազմությունում: Այդ լուծումներն են $x_1 = \sqrt{-1}$, $x_2 = -\sqrt{-1}$: Այսինքն՝ $x_1 = i$, $x_2 = -i$: •

Օրինակ 206. Գտնել $p(x) = x^2 - 6x + 13$ բազմանդամի արմատները:

$$p(x) = (x-3)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - (2i)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 3 \pm 2i : \bullet$$

---

434. Գտնել x, y-ը, եթե
ա) $x - iy = -2 + 3i$, բ) $(x + y) + (x - y)i = 3 + i$:

435. Կոմպլեքս հարթության վրա պատկերել հետևյալ թվերը
$1,\ -1,\ i,\ -i,\ -1 + i,\ 2 - 3i,\ -1 - i,\ 1 + i,\ 1 - i,\ 2i$:

436. Տրված $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 4 + 5i$ կոմպլեքս թվերի համար, գտնել
ա) $z_1 + z_2$, բ) $z_1 - z_2$, գ) $4z_1$, դ) $-z_2$, ե) $3z_1 + 4z_2$, զ) $\frac{1}{2}z_1 - \frac{3}{2}z_2$:

437. Գտնել z-ը, եթե
ա) $z + (1 - i) = 3 + 2i$, բ) $-5z = 5 + 10i$, գ) $(i - z) + (2z - 3i) = -2 + 7i$:

438. Գտնել k_1, k_2 իրական թվերը, եթե
ա) $k_1 i + k_2(1 + i) = 3 - 2i$, բ) $k_1(2 + 3i) + k_2(1 - 4i) = 7 + 5i$:

439. Գտնել $z_1 z_2, z_1^2, z_2^2$ կոմպլեքս թվերը, եթե
ա) $z_1 = 3i, z_2 = 1 - i$,
բ) $z_1 = 4 + 6i, z_2 = 2 - 3i$,
գ) $z_1 = \frac{1}{3}(2 + 4i), z_2 = \frac{1}{2}(1 - 5i)$:

440. Տրված $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = -1 - i$ կոմպլեքս թվերի համար գտնել
ա) $z_1 - z_1 z_2$, բ) $(z_1 + 3z_2)^2$, գ) $[z_1 + (1 + z_2)]^2$, դ) $iz_2 - z_1^2$:

441. Հաշվել
ա) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$, բ) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$,

գ) $(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)$, դ) $\dfrac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i}$,

ե) $\dfrac{(5 + i)(3 + 5i)}{2i}$, զ) $\dfrac{(1 + 3i)(8 - i)}{(2 + i)^2}$,

է) $\dfrac{(2 + i)(4 + i)}{1 + i}$, ը) $\dfrac{(3 - i)(1 - 4i)}{2 - i}$, թ) $(2+i)^3+(2-i)^3$, ժ) $(3+i)^3-(3-i)^3$,

ի) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$:

442. Հաշվել

ա) i^{77}, բ) i^{98}, գ) i^{-57}:

443. Լուծել հավասարումը

ա) $z^2=i$, բ) $z^2=3-4i$, գ) $z^2=5-12i$,
դ) $z^2-(1+i)z+6+3i=0$, ե) $z^2-5z+4+10i=0$,
զ) $z^2+(2i-7)z+13-i=0$, է) $z^2+1=0$, ը) $z^n+1=0$:

444. Հետևյալ կոմպլեքս թվերը գրել եռանկյունաչափական տեսքով

ա) 5, բ) i, գ) -2, դ) $-3i$, ե) $1+i$,
զ) $1-i$, է) $1+i\sqrt{3}$, ը) $-1+i\sqrt{3}$, թ) $1-i\sqrt{3}$, ժ) $\sqrt{3}+i$,
ի) $-\sqrt{3}+i$, լ) $-\sqrt{3}-i$, խ) $\sqrt{3}-i$, ծ) $\cos\alpha-i\sin\alpha$,
կ) $\sin\alpha+i\cos\alpha$:

445. Հաշվել

ա) $(1+i)^{1000}$, բ) $(1+i\sqrt{3})^{150}$, գ) $(\sqrt{3}+i)^{30}$,

դ) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$, ե) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$:

446. Լուծել հավասարումը

ա) $|z|+z=8+4i$, բ) $|z|-z=8+12i$:

447. Ապացուցել նույնությունը

ա) $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$,

բ) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$,

գ) $\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n}=0$,

դ) $\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{n}=0$:

448. Ապացուցել նույնությունը
$|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$:

449. Հարթության վրա պատկերել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին

ա) $|z| = 1$, **բ)** $arg z = \pi/3$, **գ)** $|z| \leq 2$, **դ)** $|z-1-i| < 1$,

ե) $|z+3+4i| \leq 5$, **զ)** $2 < |z| < 3$, **է)** $1 \leq |z-2i| < 2$,

ը) $|Re z| \leq 1$, **թ)** $|Im z| = 1$, **ժ)** $|z-1| + |z+1| = 3$,

ի) $|z+2| - |z-2| = 3$, **լ)** $-1 < Re(iz) < 0$:

450. Գտնել n-րդ աստիճանի արմատի արժեքները և դրանք պատկերել կոորդինատական հարթության վրա

ա) $(-i)^{1/2}$, **բ)** $(1+i\sqrt{3})^{1/2}$, **գ)** $(-27)^{1/3}$,

դ) $i^{1/3}$, **ե)** $(-1)^{1/4}$, **զ)** $(-8+i8\sqrt{3})^{1/4}$:

451. Հաշվել

ա) $1^{1/3}$, **բ)** $1^{1/6}$:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

MATHEMATICA փաթեթում i կեղծ միավորը նշանակվում է I-ով: Ներմուծենք $z = 1+i\sqrt{3}$ կոմպլեքս թիվը և հաշվենք z-ի իրական և կեղծ մասերը, կոմպլեքս համալուծը, արգումենտն ու մոդուլը

```
In[1]:=  z = 1 + √3 I;
         {Re[z], Im[z], Conjugate[z], Arg[z], Abs[z]}

Out[2]= {1, √3, 1 - i √3, π/3, 2}
```

Ներմուծենք նաև $w = 1 - i\sqrt{3}$ կոմպլեքս թիվը և հաշվենք $zw, z \pm w, z/w, z^3$ կոմպլեքս թվերը

```
In[3]:= w = 1 - I Sqrt[3];
        {z w, z + w, z - w, z/w, z^3} // ComplexExpand

Out[4]= {4, 2, 2 i Sqrt[3], -1/2 + (i Sqrt[3])/2, -8}
```

Ստուգեք, որ եթե վերջում //ComplexExpand հրամանը չգրվի, ապա գործողությունների մի մասը կմնա չկատարված:

Դիտարկենք երրորդ կարգի բազմանդամ և գտնենք նրա արմատները: Համաձայն հանրահաշվի հիմնական թեորեմի, արմատները երեքն են (այս դեպքում միայն պարզ արմատներ են)

```
In[5]:= Solve[x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]

Out[5]= {{x -> -1}, {x -> -i}, {x -> i}}
```

30. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ, ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ, ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Կոմպլեքս տարրերով մատրիցների հետ գործողությունները կատարվում են այնպես, ինչպես իրական տարրերով մատրիցների հետ:

Օրինակ 207.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1+i & 4-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}:$$

Հաշվել $A+B, A-B, iA, AB$:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ 3-2i & 8-i \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1+4i & -i \end{pmatrix}$$

$$iA = \begin{pmatrix} i & -i^2 \\ i+i^2 & 4i-i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1+i & 1+4i \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} i & -i \\ 1+i & 4-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-i & 1-5i \\ 4-13i & 18-4i \end{pmatrix}: \bullet$$

Օրինակ 208. Հաշվել

$$A=\begin{pmatrix} 2-4i & 2 \\ 3 & 5-3i \end{pmatrix}$$

մատրիցի որոշիչը:

$$detA=\begin{vmatrix} 2-4i & 2 \\ 3 & 5-3i \end{vmatrix}=(2-4i)(5-3i)-(2)(3)=-8-26i: \bullet$$

Օրինակ 209. Լուծել հետևյալ համակարգը օգտվելով Կրամերի բանաձևերից

$$ix+2y=1-2i$$

$$4x-iy=-1+3i:$$

Ունենք

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2i & 2 \\ -1+3i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}}=\frac{(-i)(1-2i)-2(-1+3i)}{i(-i)-2(4)}=\frac{-7i}{-7}=i$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} i & 1-2i \\ 4 & -1+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 2 \\ 4 & -i \end{vmatrix}}=\frac{(i)(-1+3i)-4(1-2i)}{i(-i)-2(4)}=\frac{-7+7i}{-7}=1-i: \bullet$$

Օրինակ 210. Հաշվել

$$A=\begin{pmatrix} 2-i & -5+2i \\ 3-i & -6+2i \end{pmatrix}$$

մատրիցի հակադարձը:

Ունենք

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -6+2i & 5-2i \\ -3+i & 2-i \end{pmatrix}:$$

Քանի որ $|A| = 3 - i$, ապա

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -20 & 17-i \\ -10 & 7-i \end{pmatrix} : \bullet$$

---

452. Տրված $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ և $B = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix}$ մատրիցների համար հաշվել

ա) $A + 3iB$, բ) BA, գ) AB, դ) $B^2 - A^2$:

453. Տրված

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & -i \\ 3 & 2i & -5 \end{pmatrix}$$

մատրիցների համար հաշվել

ա) $A(BC)$, բ) $(BC)A$, գ) $(CA)B^2$, դ) $(1+i)(AB)+(3-4i)A$:

454. Քվանտային մեխանիկայում հետևյալ մատրիցները հայտնի են, որպես Դիրակի մատրիցներ

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ցույց տալ, որ

ա) $\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = E$, բ) $AB = -BA$, որտեղ A-ն և B-ն իրարից տարբեր Դիրակի մատրիցներ են:

455. Տրված $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2-1i & -3i \end{pmatrix}$ և $B = \begin{pmatrix} 1-i & 3i \\ -3 & -i \end{pmatrix}$ մատրիցների համար հաշվել

ա) $det(A)$, բ) $det(B)$, գ) $det(A+B)$,

դ) $det(A-B)$, ե) $det(AB)$, զ) $det(BA)$:

456. $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$:

ա) Հաշվել A^n-ը, եթե $n = 1, 2, 3, 4, 5$,

բ) Հաշվել A^{57}, A^{1995}:

գ) Յանկացած բնական n-ի համար գտնել A^n-ը:

457. Հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է հակադարձելի: Դրական պատասխանի դեպքում հաշվել հակադարձը:

ա) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3i \\ 2-i & i \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$:

458. Գտնել z կոմպլեքս թվի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված մատրիցը հակադարձելի չէ

ա) $A = \begin{pmatrix} 5 & z \\ 3i & 2-i \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 1+i \\ 1-i & -1+i & z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

459. Համակարգը լուծել Կրամերի բանաձևերով

ա) $\begin{aligned} ix_1 - ix_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= i, \end{aligned}$ բ) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2i, \end{aligned}$

գ) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 + 2i, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \end{aligned}$ դ) $\begin{aligned} ix_1 + 3x_2 + (1+i)x_3 &= -i \\ x_1 + ix_2 + 3x_3 &= -2i, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 : \end{aligned}$

460. Համակարգը լուծել Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով

ա) $\begin{aligned} -x_1 - (1+i)x_2 &= 0 \\ (-1+i)x_1 - 2x_2 &= 0, \end{aligned}$ բ) $\begin{aligned} 2x_1 - (1+i)x_1 &= 0 \\ (-1+i)x_1 + x_2 &= 0: \end{aligned}$

461. Համակարգը լուծել Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակով

$$x_1 + ix_2 - ix_3 = 0$$
$$-x_1 + (1-i)x_2 + 2ix_3 = 0$$
$$2x_1 + (-1+2i)x_2 - 3ix_3 = 0:$$

MATHEMATICA-ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Ներմուծենք A, B մատրիցները և հաշվենք $A+B, AB, A^2$ մատրիցները

```
In[1]:= A = {{1, I, -I}, {0, 1 + 2 I, -1}, {2, 1, 1 + I}};
        B = {{0, I, 1 - I}, {1 + I, 0, -1}, {I, 2, 1 + I}};
        {A + B // MatrixForm, A.B // MatrixForm,
          A^2 // MatrixForm} // ComplexExpand
```

Out[3]= $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2i & 1-2i \\ 1+i & 1+2i & -2 \\ 2+i & 3 & 2+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & -i & 2-3i \\ -1+2i & -2 & -2-3i \\ 2i & 2+4i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3+4i & 1 \\ 4 & 1 & 2i \end{pmatrix}\right\}$

Հաշվենք A մատրիցի որոշիչը և նրա հակադարձը

```
In[4]:= {Det[A], Inverse[A] // MatrixForm}
```

Out[4]= $\left\{-4+3i, \begin{pmatrix} \frac{9}{25}-\frac{12i}{25} & -\frac{2}{5}+\frac{i}{5} & \frac{8}{25}+\frac{6i}{25} \\ \frac{8}{25}+\frac{6i}{25} & \frac{1}{5}-\frac{3i}{5} & -\frac{4}{25}-\frac{3i}{25} \\ -\frac{4}{25}+\frac{22i}{25} & \frac{2}{5}-\frac{i}{5} & \frac{2}{25}-\frac{11i}{25} \end{pmatrix}\right\}$

Լուծենք համակարգը

```
In[5]:= LinearSolve[A, {1, I, -1}]

Out[5]= {-4/25 - 28 i/25, 27/25 + 14 i/25, -1/25 + 43 i/25}
```

31. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Կոմպլեքս գծային տարածության սահմանումը նույնն է ինչ իրական գծային տարածությանը, միայն մեկ տարբերությամբ, որ թվով բազմապատկումը սահմանվում է կոմպլեքս թվերի համար: Բոլոր գաղափարները և թեորեմները, որոնք ճիշտ են իրական գծային տարածություններում, առանց փոփոխությունների մնում են ճիշտ կոմպլեքս գըծային տարածություններում: Քանի որ իրական թվերի բազմությունը կոմպլեքս թվերի ենթաբազմություն է, ապա իրական գծային տարածությունը կոմպլեքս գծային տարածության ենթատարածություն է: Նշենք, որ X գծային տարածության $e_1, \cdots, e_n$ տարրերի գծային կոմբինացիա սահմանվում է կոմպլեքս թվերով:

Օրինակ 211. $\mathbf{C^n}$-ով նշանակենք կոմպլեքս թվերի n-յակների բազմությունը՝ $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, որտեղ $x_1 = a_1 + ib_1, \cdots, x_n = a_n + ib_n$: $\mathbf{C^n}$-ը R^n-ում սահմանված գործողություններով գծային տարածություն է: Ինչպես և R^n-ում

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

համախումբը $\mathbf{C^n}$-ի բազիս է և քանի որ այն բաղկացած է n տարրերից, ապա $dim\mathbf{C}^n = n$: Այս բազիսը կանվանենք $\mathbf{C^n}$-ի տիպային բազիս:•

Օրինակ 212. Ցույց տալ, որ

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \}$$

համախումբը $\mathbf{C}^3$-ի բազիս է:

Քանի որ $dim\mathbf{C}^3 = \mathbf{3}$, ապա բավական է ցույց տալ, որ S-ը գծորեն անկախ է: Ունենք

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = o,$$

$$c_1\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1+c_2)i \\ c_2i \\ c_3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից $(c_1 + c_2)i = 0, c_2i = 0, c_3i = 0$: Հետևաբար $c_1 = c_2 = c_3 = 0$:•

Օրինակ 213. $v = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2-i \end{pmatrix}$ տարրը վերլուծել նախորդ օրինակի բազիսով:

Ունենք

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1+c_2)i \\ c_2i \\ c_3i \end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$(c_1 + c_2)i = 2,\ c_2i = i,\ c_3i = 2 - i:$$

Որտեղ

$$c_1 = -1 - 2i,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1 - 2i:$$

Այսինքն

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2-i \end{pmatrix} = (-1-2i)v_1 + v_2 + (-1-2i)v_3 : \bullet$$

Օրինակ 214. C_{mn}-ով նշանակենք $(m \times n)$ կարգի կոմպլեքս տարրերով մատրիցների բազմությունը: Եթե գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանենք սովորական եղանակով, ապա C_{mn}-ը գծային տարածություն է: •

Օրինակ 215. Դիցուք f_1, f_2-ը իրական արժեքանի ֆունկցիաներ են և $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$: Բոլոր այսպիսի f ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք X-ով: X բազմությունում գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանենք հետևյալ կերպ

$$(f+g)(x) = f_1(x) + g_1(x) + i(f_2(x) + g_2(x))$$

$$(kf)(x) = kf_1(x) + ikf_2(x) :$$

Ստուգել, որ այս գործողություններով X բազմությունը դառնում է գծային տարածություն: •

Օրինակ 216. Նախորդ օրինակում սահմանված f ֆունկցիան կանվանենք անընդհատ, եթե այդպիսիք են f_1, f_2 ֆունկցիաները: Դիտարկենք բոլոր այն $f = f_1 + if_2$ ֆունկցիաների Y բազմությունը, որոնք $[a,b]$ հատվածի վրա անընդհատ են: Պարզ է, որ Y-ը կոմպլեքս գծային տարածություն է և նախորդ օրինակում սահմանված X կոմպլեքս գծային տարածության ենթատարածություն: •

Կոմպլեքս գծային տարածությունում գծային օպերատորի գաղափարը նույնն է միայն թե համասեռության հատկությունը ստուգելիս հարկավոր է օգտագործել կոմպլեքս թվեր:

---

462. $u = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ -1+2i \\ 0 \end{pmatrix}$: Գտնել

ա) $u - v$, բ) $iv + 2w$, գ) $-w + v$,
դ) $3(u - (1+i)v)$, ե) $-iv + 2iw$, զ) $2v - (u+w)$:

463. u, v, w վեկտորները սահմանված են ինչպես նախորդ վարժությունում: Գտնել այնպիսի x վեկտոր, որը բավարարում է $u - v + ix = 2ix + w$ հավասարմանը:

464. $u_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 2-i \end{pmatrix}$: Գտնել այնպիսի c_1, c_2, c_3 հաստատուններ, որ

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = \begin{pmatrix} -3+i \\ 3+2i \\ 3-4i \end{pmatrix} :$$

465. Ցույց տալ, որ գոյություն չունեն c_1, c_2, c_3 հաստատուններ այնպիսիք, որ

$$c_1 \begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ 2+i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ i \\ 6+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} :$$

466. $(z_1, z_2, z_3)^T$ եռյակների բազմությունում գումարումը և թվով բազմապատկումը սահմանված է հետևյալ եղանակով

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_1' \\ z_2 + z_2' \\ z_3 + z_3' \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k} z_1 \\ \bar{k} z_2 \\ \bar{k} z_3 \end{pmatrix} :$$

Գծային տարածություն է արդյոք այս բազմությունը:

467. $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ տեսքի մատրիցների բազմությունը գծային տարածություն է թե ոչ:

468. Հետևյալ բազմություններից որո՞նք են $\mathbf{C}^3$-ի ենթատարածություններ

ա) $(z, 0, 0)^T$ տեսքի վեկտորները,

բ) $(z, i, i)^T$ տեսքի վեկտորները,

գ) $(z_1, z_2, \bar{z}_1 + \bar{z}_2)^T$ տեսքի վեկտորները,

դ) $(z_1, z_2, z_1 + z_2 + i)^T$ տեսքի վեկտորները:

469. Հետևյալ բազմություններից որո՞նք են կոմպլեքս M_{22}-ի ենթատարածություններ

ա) $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ տեսքի մատրիցների բազմությունը, որտեղ z_1, z_2-ը իրական թվեր են,

բ) $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix}$ տեսքի մատրիցների բազմությունը,

գ) (2×2) կարգի այն A մատրիցների բազմությունը, որոնք բավարարում են $A = (\bar{A})^T$ պայմանին, որտեղ $\bar{A}$ մատրիցը ստացվում է A-ից բոլոր տարրերը իրենց կոմպլեքս համալուծներով փոխարինելով:

470. Հետևյալ բազմություններից որո՞նք են կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների գծային տարածության ենթատարածություններ

ա) այն f ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(1) = 0$ պայմանին,

բ) այն f ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(0) = i$ պայմանին,

գ) այն f ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(-x) = \overline{f(x)}$ պայմանին, դ) այն $f = k_1 + k_2 e^{ix}$ տեսքի ֆունկցիաները, որտեղ k_1, k_2-ը կոմպլեքս թվեր են:

471. Հետևյալ վեկտորներից որո՞նք կարելի է ներկայացնել $u = (i, -i, 3i)^T, v = (2i, 4i, 0)^T$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով

ա) $(3i, 3i, 3i)^T$, բ) $(4i, 2i, 6i)^T$, գ) $(i, 5i, 6i)^T$, դ) $(0, 0, 0)^T$:

472. Հետևյալ վեկտորները ներկայացնել $u = (1, 0, -i)^T, v = (1+i, 1, 1-2i)^T, w = (0, i, 2)^T$ վեկտորների գծային կոմբինացիայով

ա) $(1, 1, 1)^T$, բ) $(i, 0, -i)^T$, գ) $(0, 0, 0)^T$, դ) $(2 - i, 1, 1 + i)^T$:

473. Հետևյալ համախմբերից ո՞րն է $\mathbf{C}^3$-ի բազիս

ա) $\{(i, i, i)^T, (2i, 2i, 0)^T, (3i, 0, 0)^T\}$,
բ) $\{(1 + i, 2 - i, 3 + i)^T, (2 + 3i, 0, 1 - i)^T\}$,
գ) $\{(1, 0, -i)^T, (1 + i, 1, 1 - 2i)^T, (0, i, 2)^T\}$,
դ) $\{(1, i, 0)^T, (0, -i, 1)^T, (1, 0, 1)^T\}$,

474. Ցույց տալ, որ $\{f, g, h\}$ համախումբը գծորեն կախյալ է, եթե

$$f = 3 + 3i\cos 2x,\ \ g = \sin^2 x + i\cos^2 x,\ \ h = \cos^2 x - i\sin^2 x:$$

475. Գտնել համասեռ համակարգի լուծումների գծային տարածության չափողականությունը և կառուցել որևէ բազիս

ա) $\begin{aligned} &x_1 + (1 + i)x_2 = 0 \\ &(1 - i)x_1 + 2x_2 = 0, \end{aligned}$ բ) $\begin{aligned} &2x_1 - (1 + i)x_2 = 0 \\ &(-1 + i)x_1 + x_2 = 0, \end{aligned}$

գ) $\begin{aligned} &x_1 + (2 - i)x_2 = 0 \\ &x_2 + 3ix_3 = 0, \\ &ix_1 + (2 + 2i)x_2 + 3ix_3 = 0, \end{aligned}$ դ) $\begin{aligned} &x_1 + ix_2 - 2ix_3 + x_4 = 0 \\ &ix_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2ix_4 = 0: \end{aligned}$

476. Գտնել մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական ֆունկցիաները

ա) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$:

477. $T:\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+i\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել $(x,y)^T$ տարրի պատկերը:

478. $T:\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$T\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+i\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-i\end{pmatrix}$$

օրենքով: Գտնել $(x,y)^T$ տարրի պատկերը:

479. $T:\mathbf{C}^\mathbf{m} \to \mathbf{C}^\mathbf{n}$ գծային օպերատորը գործում է $Tv=Av$ օրենքով: Գտնել v տարրի պատկերը և w տարրի նախապատկերը, եթե

ա) $A=\begin{pmatrix}1&0\\i&i\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,

բ) $A=\begin{pmatrix}0&i&1\\i&0&0\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}i\\0\\1+i\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

գ) $A=\begin{pmatrix}1&0\\i&0\\i&i\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}2-i\\3+2i\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}2\\2i\\3i\end{pmatrix}$,

դ) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\i&i&-1\\0&i&0\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\i\end{pmatrix}$:

480. $T:\mathbf{C}^\mathbf{m} \to \mathbf{C}^\mathbf{n}$ գծային օպերատորը գործում է $Tv=Av$ օրենքով, որտեղ

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\i&i\end{pmatrix}:$$

Գտնել T օպերատորի միջուկը:

481. $T:\mathbf{C}^\mathbf{m} \to \mathbf{C}^\mathbf{n}$ գծային օպերատորը գործում է $Tv=Av$ օրենքով, որտեղ

$$A=\begin{pmatrix}0&i&1\\i&0&0\end{pmatrix}:$$

Գտնել T օպերատորի միջուկը:

482. $T_1, T_2 : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ գծային օպերատորները գործում են $T_k v = A_k v$ օրենքով, որտեղ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix}:$$

Գտնել $v = (i, i)^T$ տարրի պատկերը $T_1 T_2$ և $T_2 T_1$ արտապատկերումներով:

32. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 43. X կոմպլեքս գծային տարածությունն անվանում են *կոմպլեքս էվկլիդեսյան տարածություն* կամ *ունիտար տարածություն,* եթե

ա) ցանկացած $x, y \in X$ տարրերի համապատասխանության մեջ է դրված կոմպլեքս թիվ, որը նշանակում են (x, y) և անվանում են x, y տարրերի *կոմպլեքս սկալյար արտադրյալ,*

բ) այդ համապատասխանությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

4. $(x, x) > 0$, եթե $x \neq o$, և $(o, o) = 0$:

Թեորեմ 98. Ցանկացած ունիտար տարածությունում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները

- $(o, x) = (x, o) = 0$,
- $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$,
- $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$:

Օրինակ 217. $\mathbf{C}^n$ գծային տարածությունում

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

տարրերի կոմպլեքս սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ (ստուգել)

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n :$$

Այսպես կառուցված ունիտար տարածությունը կնշանակենք E^n-ով:
E^n-ի կոմպլեքս սկալյար արտադրյալը կանվանենք ***էվկլիդեսյան կոմպլեքս սկալյար արտադրյալ կամ տիպային սկալյար արտադրյալ:*** •

Օրինակ 218. $u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T$ տարրերը պատկանում են $\mathbf{C}^2$-ին: Ցույց տանք, որ սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել

$$(u, v) = u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$$

օրենքով:

Իսկապես,

$$(v, u) = \overline{v_1\bar{u}_1 + 2v_2\bar{u}_2} = u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2 = (u, v),$$

$$(u + v, w) = (u_1 + v_1)\bar{w}_1 + 2(u_2 + v_2)\bar{w}_2 = (u_1\bar{w}_1 + 2u_2\bar{w}_2)+$$

$$(v_1\bar{w}_1 + 2v_2\bar{w}_2) = (u, w) + (v, w),$$

$$(ku, v) = (ku_1)\bar{v}_1 + 2)ku_2)\bar{v}_2 = k(u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2) = k(u, v),$$

$$(u, u) = u_1\bar{u}_1 + 2u_2\bar{u}_2 = |u_1|^2 + 2|u_2|^2 \geq 0$$

և բացի այդ $(u, u) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $u_1 = u_2 = 0$: •

Օրինակ 219. C_{22} տարածության ցանկացած

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

տարրերի սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ (ստուգել).

$$(U, V) = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 + u_4\bar{v}_4 \,:$$

Օրինակ, եթե

$$U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2i \end{pmatrix},$$

ապա

$$(U, V) = 0 \cdot \bar{1} + i(\overline{-i}) + 1 \cdot \bar{0} + (1 + i)(\overline{2i}) = 1 - 2i : \bullet$$

Օրինակ 220. Դիտարկենք կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների $C[a, b]$ տարածությունը: Ստուգել, որ կոմպլեքս սկալյար արտադրյալ կարելի է սահմանել հետևյալ բանաձևով

$$(f, g) = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\overline{[g_1(x) + ig_2(x)]}dx =$$

$$= \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)][g_1(x) - ig_2(x)]dx =$$

$$\int_a^b [f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)]dx + i\int_a^b [f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x)]dx : \bullet$$

Թեորեմ 94. *(Կոշի-Շվարցի անհավասարությունը)* Կոմպլեքս էվկլիդեսյան տարածության ցանկացած x, y տարրերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) :$$

Ունիտար տարածություններում տարրերի օրթոգոնալություն, օրթոնորմավորված բազիս գաղափարները, Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը նույնն են: Նմանապես սահմանվում է նորմավորված տարածությունը: Մասնավորապես, ցանկացած ունիտար տարածությունում տարրի նորմը կարելի է սահմանել հետևյալ եղանակով

$$||u|| = (x, x)^{1/2},$$

իսկ տարրերի հեռավորությունը՝

$$d(u, v) = ||u - v|| :$$

Օրինակ 221. Եթե $u = (u_1, \cdots, u_n)^T$, $v = (v_1, \cdots, v_n)^T$ տարրերը պատկանում են կոմպլեքս E^n-ին, ապա

$$||u|| = (u, u)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2},$$

$$d(u, v) = ||u - v|| = (u - v, u - v)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2} : \bullet$$

Օրինակ 222. $u = (i, 1)^T, v = (1, i)^T$ տարրերը պատկանում են կոմպլեքս E^n-ին: Ունենք

$$(u, v) = i \cdot 1 + 1 \cdot (-i) = 0 :$$

Սա նշանակում է, որ u, v տարրերը օրթոգոնալ են: •

Օրինակ 223. Դիտարկենք կոմպլեքս E^3 տարածությունը և Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը կիրառենք հետևյալ համախմբի նկատմամբ

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\} :$$

Ունենք

$$v_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{u_2 - (u_2, v_1)v_1}{||u_2 - (u_2, v_1)v_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2i \\ i \\ i \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{u_3 - (u_3, v_1)v_1 - (u_3, v_2)v_2}{||u_3 - (u_3, v_1)v_1 - (u_3, v_2)v_2||} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ i \end{pmatrix} :$$

Այսպիսով, $\{v_1, v_2, v_3\}$ համախումբը E^3-ի օրթոնորմալ բազիս է: •

Օրինակ 224. Կոմպլեքս $C[0, 2\pi]$ գծային տարածությունում սկալյար արտադրյալը սահմանենք ինչպես օրինակ 220-ում և W-ով նշանակենք

$$e^{i\pi m} = \cos m\pi + i \sin m\pi$$

տեսքի ֆունկցիաների բազմությունը, որտեղ m-ը ամբողջ թիվ է: W-ն օրթոգոնալ համախումբ է, քանի որ $f = e^{ikx}$ և $g = e^{ilx}, l \neq k$ տեսքի ֆունկցիաների համար

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(k - l)x + i \int_0^{2\pi} \sin(k - l)x dx = 0 :$$

Մյուս կողմից

$$||f|| = (f,f)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ikx}dx\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}:$$

Եթե W բազմության յուրաքանչյուր տարր նորմավորենք, ապա կստանանք կոմպլեքս $C[0,2\pi]$ գծային տարածության $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}\right\}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ օրթոնորմալ համախումբը: •

---

483. $u = (u_1,u_2)^T, v = (v_1,v_2)^T$: Ցույց տալ, որ $(u,v) = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$ եղանակով կարելի է սահմանել $\mathbf{C}^2$ գծային տարածության սկալյար արտադրյալը: Հաշվել (u,v) սկալյար արտադրյալը, եթե

ա) $u = (1+i, 1-i)^T, v = (1-i, 1+i)^T$,

բ) $u = (3i, -1+2i)^T, v = (3i, -1+2i)^T$:

484. $u = (u_1,u_2)^T, v = (v_1,v_2)^T$: Ցույց տալ, որ

$$(u,v) = u_1\bar{v}_1 + (1+i)u_1\bar{v}_2 + (1-i)u_2\bar{v}_1 + 3u_2\bar{v}_2$$

եղանակով կարելի է սահմանել $\mathbf{C}^2$ գծային տարածության սկալյար արտադրյալը: Հաշվել (u,v) սկալյար արտադրյալը,եթե

ա) $u = (1+i, 1-i)^T, v = (1-i, 1+i)^T$,

բ) $u = (3i, -1+2i)^T, v = (3i, -1+2i)^T$:

485. $u = (u_1,u_2)^T, v = (v_1,v_2)^T$: Պարզել թե հետևյալ սահմանումներից որո՞վ է որոշվում $\mathbf{C}^2$ գծային տարածության սկալյար արտադրյալը

ա) $(u,v) = u_1\bar{v}_1$,

բ) $(u,v) = u_1\bar{v}_1 - u_2\bar{v}_2$,

գ) $(u,v) = |u_1|^2|v_1|^2 + |u_2|^2|v_2|^2$,

դ) $(u,v) = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 + iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$,

ե) $(u,v) = 2u_1\bar{v}_1 + iu_1\bar{v}_2 - iu_2\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$:

486. Օգտագործելով օրինակ 219-ի սկալյար արտադրյալը հաշվել (U,V)-ն, եթե

$$U = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 3 & -2-3i \\ 4i & 1 \end{pmatrix}:$$

487. $u=(u_1,u_2,u_3)^T, v=(v_1,v_2,v_3)^T$: Կարելի՞ է

$$(u,v)=u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2+u_3\bar{v}_3-iu_3\bar{v}_1$$

եղանակով սահմանել $\mathbf{C}^3$ գծային տարածության սկալյար արտադրյալը:

488. V-ն կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիաների գծային տարածությունն է և $f=f_1+if_2, g=g_1+ig_2$: Կարելի՞ է

$$(f,g)=(f_1(0)+if_2(0))\overline{(g_1(0)+ig_2(0))}$$

եղանակով սահմանել V գծային տարածության սկալյար արտադրյալը:

489. Օգտագործելով օրինակ 219-ի սկալյար արտադրյալը հաշվել $||A||$-ն, եթե

ա) $A=\begin{pmatrix}-i & 7i\\ 6i & 2i\end{pmatrix}$, բ) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1+i\\ 1-i & 3\end{pmatrix}$:

490. Օգտագործելով օրինակ 219-ի սկալյար արտադրյալը հաշվել $d(A,B)$-ն, եթե

ա) $A=\begin{pmatrix}-i & 5i\\ 8i & 3i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5i & 0\\ 7i & -3i\end{pmatrix}$

բ) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2i & 2-3i\\ i & 1\end{pmatrix}$:

491. k պարամետրի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում u,v տարրերը կլինեն օրթոգոնալ կոմպլեքս E^3-ում

ա) $u=(2i,i,3i)^T, v=(i,6i,k)^T$,

բ) $u=(k,k,1+i)^T, v=(1,-1,1-i)^T$:

492. Օգտագործելով օրինակ 219-ի սկալյար արտադրյալը պարզել թե հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է օրթոգոնալ

$$A=\begin{pmatrix}2i & i\\ -i & 3i\end{pmatrix}$$

մատրիցին

ա) $\begin{pmatrix}-3 & 1-i\\ 1-i & 2\end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3-i & 0\end{pmatrix}$:

493. Հետևյալ համախմբերից ո՞րն է օրթոնորմալ կոմպլեքս E^3-ում

ա) $\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^T,\left(\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{i}{\sqrt{3}},-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^T,\left(-\frac{i}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^T\right\}$,

բ) $\left\{\left(i\frac{2}{3},-i\frac{2}{3},i\frac{1}{3}\right)^T,\left(i\frac{2}{3},i\frac{1}{3},-i\frac{2}{3}\right)^T,\left(i\frac{1}{3},i\frac{2}{3},i\frac{2}{3}\right)^T\right\}$,

գ) $\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{6}},\frac{i}{\sqrt{6}},-\frac{2i}{\sqrt{6}}\right)^T,\left(\frac{i}{\sqrt{2}},-\frac{i}{\sqrt{2}},0\right)^T\right\}$:

494.

$$x=\left(\frac{i}{\sqrt{5}},-\frac{i}{\sqrt{5}}\right)^T,\ y=\left(\frac{2i}{\sqrt{30}},\frac{3i}{\sqrt{30}}\right)^T:$$

Ցույց տալ, որ $\{x,y\}$ համախումբը օրթոնորմալ է

$$(u,v)=3u_1\bar{v}_1+2u_2\bar{v}_2$$

սկալյար արտադրյալով, սակայն այդպիսին չէ էվկլիդեսյան կոմպլեքս սկալյար արտադրյալով:

495. u,v տարրերը պատկանում են կոմպլեքս E^2-ին: $\{u,v\}$ համախմբի նկատմամբ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $u=(i,-3i)^T, v=(2i,2i)^T$, **բ)** $u=(i,0)^T, v=(3i,-5i)^T$:

496. u,v,w տարրերը պատկանում են կոմպլեքս E^3-ին: $\{u,v,w\}$ համախմբի նկատմամբ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

ա) $u=(i,i,i)^T, v=(-i,i,0)^T, w=(i,2i,i)^T$,

բ) $u=(i,0,0)^T, v=(3i,7i,-2i)^T, w=(0,4i,i)^T$:

497. u_1,u_2,u_3,u_4 տարրերը պատկանում են կոմպլեքս E^4-ին: $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ համախմբի նկատմամբ կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը,եթե

$$u_1=(0,2i,i,0)^T,\ u_2=(i,-i,0,0)^T,$$

$$u_3=(i,2i,0,-i)^T,\ u_4=(i,0,i,i)^T:$$

498. Ապացուցել, որ Կոշի-Շվարցի անհավասարությունում հավասարությունը հնարավոր է այն և միայն այն դեպքում, երբ x,y տարրերը գծորեն կախյալ են:

499. Ապացուցել, որ ցանկացած ունիտար տարածության u, v տարրերի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը

$$(u,v)=\frac{1}{4}||u+v||^2-\frac{1}{4}||u-v||^2+\frac{i}{4}||u+iv||^2-\frac{i}{4}||u-iv||^2 :$$

500. $\{v_1,\cdots,v_n\}$ համախումբը V ունիտար տարածության օրթոնորմալ բազիս է: Ապացուցել, որ եթե $u,w\in V$, ապա

$$(u,w)=(u,v_1)\overline{(w,v_1)}+(u,v_2)\overline{(w,v_2)}+\cdots+(u,v_n)\overline{(w,v_n)} :$$

501. Ցանկացած $a_1,\cdots,a_n,\ b_1,\cdots,b_n$ կոմպլեքս թվերի համար ապացուցել անհավասարությունը

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 :$$

502. V-ն ունիտար տարածություն է և $T:V\to V$ գծային օպերատոր է: Ապացուցել հավասարությունը

$$(\lambda T)^*=\overline{\lambda}T^* :$$

33. ՀԵՐՄԻՏՅԱՆ, ՈՒՆԻՏԱՐ ԵՎ ՆՈՐՄԱԼ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

A-ն կոմպլեքս տարրերով մատրից է: $\bar{A}$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որը ստացվում է A-ից՝ նրա բոլոր տարրերը փոխարինելով իրենց կոմպլեքս համալուծներով: Հասկանալի է, որ $A=\bar{A}$ այն և միայն այն դեպքում, եթե A մատրիցի բոլոր տարրերը իրական թվեր են:

A^*-ով նշանակենք հետևյալ մատրիցը՝ $A^*=\bar{A}^T$: Նկատենք, որ եթե A-ի բոլոր տարրերը իրական են, ապա $A^*=A^T$:

Օրինակ 225. Դիցուք

$$A=\begin{pmatrix}1+i & -i & 0\\ 2 & 3-2i & i\end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{pmatrix} : \bullet$$

Ճիշտ են հետևյալ հատկությունները

$$(A^*)^* = A, \ (A+B)^* = A^* + B^*, \ (kA)^* = \bar{k}A^*, \ (AB)^* = B^*A^* :$$

Սահմանում 44. A քառակուսի մատրիցը կանվանենք ***ունիտար մատրից,*** եթե

$$A^{-1} = A^* :$$

Ակնհայտ է, որ եթե A ունիտար մատրիցի բոլոր տարրերը իրական են, ապա A-ն օրթոգոնալ մատրից է:

Թեորեմ 95. Ցանկացած $(n \times n)$ կարգի A մատրիցի համար հետևյալ պնդումները համարժեք են

- A-ն ունիտար մատրից է,
- A մատրիցի տողերը կազմում են օրթոնորմալ համախումբ E^n ունիտար տարածությունում,
- A մատրիցի սյուները կազմում են օրթոնորմալ համախումբ E^n ունիտար տարածությունում:

Օրինակ 226. Դիտարկենք

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որի տողերը նշանակենք

$$r_1 = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}\right), \quad r_2 = \left(\frac{1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}\right) :$$

E^2 ունիտար տարածությունում ունենք

$$\|r_1\| = \sqrt{\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + \left|\frac{1+i}{2}\right|^2} = 1,$$

$$||r_2|| = \sqrt{\left|\frac{1-i}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1+i}{2}\right|^2} = 1:$$

Մյուս կողմից

$$(r_1, r_2) = \left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)} + \left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(\frac{-1+i}{2}\right)} = 0:$$

Այսինքն A-ն ունիտար մատրից է

$$A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} : \bullet$$

Սահմանում 45. A քառակուսի մատրիցը կանվանենք ***հերմիտյան մատրից,*** եթե

$$A = A^* :$$

Եթե A հերմիտյան մատրիցի բոլոր տարրերը իրական են, ապա A-ն սիմետրիկ մատրից է:

Օրինակ 227. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{pmatrix}, \ A^* = \bar{A}^T = A :$$

Այսինքն A-ն հերմիտյան մատրից է: •

Թեորեմ 96. $A = (a_{ij})$ մատրիցը հերմիտյան է այն և միայն այն դեպքում, եթե

- գլխավոր անկյունագծի վրա միայն իրական թվեր են,
- a_{ij} տարրը a_{ji} տարրի կոմպլեքս համալուծն է:

Սահմանում 46. A քառակուսի մատրիցը կանվանենք ***նորմալ մատրից,*** եթե

$$AA^* = A^*A :$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած հերմիտյան մատրից նորմալ մատրից է:

Սահմանում 47. Կասենք, որ A քառակուսի մատրիցը ունիտար ձևափոխությամբ կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, եթե գոյություն ունի այնպիսի P ունիտար մատրից, որ

$$P^{-1}AP(=P^*AP)$$

մատրիցը անկյունագծային է:

Բնական է պարզել, թե ո՞ր մատրիցներն են օժտված այդպիսի հատկությամբ և ինչպե՞ս կառուցել այդ ունիտար մատրիցը:

Թեորեմ 97. Եթե A-ն քառակուսի մատրից է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են

- A մատրիցը ունիտար ձևափոխությամբ կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի,
- A-ն ունի n տարր պարունակող սեփական վեկտորների օրթոնորմալ համախումբ,
- A-ն նորմալ մատրից է:

Թեորեմ 98. Եթե A-ն նորմալ մատրից է, ապա տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են:

Օրինակ 228. Դիտարկենք

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Քանի որ այն հերմիտյան մատրից է, ապա այն ունիտար ձևափոխությամբ կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Գտնենք այդ P ունիտար մատրիցը: A մատրիցի բնութագրիչ հավասարումն է

$$\lambda^2-5\lambda+4=0,$$

որի արմատներն են $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$: $\lambda_1=1$ սեփական արժեքի սեփական վեկտորն է

$$u=\begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$p_1=\frac{u}{\|u\|}=\begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

տարրը կլինի $\lambda_1 = 1$ սեփական արժեքի սեփական ենթատարածության օրթոնորմալ բազիսը: Նույն եղանակով $\lambda_2 = 4$ սեփական արժեքի սեփական ենթատարածության օրթոնորմալ բազիսն է

$$p_2 = (\frac{1+i}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$$

տարրը: Կազմենք $P = (p_1|p_2)$ համակցված մատրիցը

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

որն էլ կլինի որոնվող ունիտար մատրիցը, քանի որ

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} : \bullet$$

Թեորեմ 99. Հերմիտյան մատրիցի սեփական արժեքները իրական են:

Այս թեորեմից հետևում է, որ իրական տարրերով սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքները նույնպես իրական են:

Համեմատենք իրական տարրերով սիմետրիկ և կոմպլեքս տարրերով հերմիտյան մատրիցները:

A-ն իրական տարրերով սիմետրիկ մատրից է	*A-ն կոմպլեքս տարրերով հերմիտյան մատրից է*
• A-ի սեփական արժեքներն իրական են: • տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են: • գոյություն ունի P օրթոգոնոլ մատրից այնպիսին, որ P^TAP մատրիցը անկյունագծային է:	• A-ի սեփական արժեքներն իրական են: • տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները օրթոգոնալ են: • գոյություն ունի P ունիտար մատրից այնպիսին, որ P^*AP մատրիցը անկյունագծային է:

Օրինակ 229. V-ն ունիտար տարածություն է, $T : V \to V$ օպերատորը գծային է և $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ համախումբը V-ի օրթոնորմավորված բազիս է: Գտնենք $(T)_B = (t_{ij})$ և $(T^*)_B = (\tau_{ij})$ մատրիցների կապը: Ունենք

$$(Te_k, e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\delta_{ij} = t_{jk} :$$

Մյուս կողմից

$$(Te_k, e_j) = (e_k, T^*e_j) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\tau}_{ij}(e_k, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\tau}_{ij}\delta_{ki} = \bar{\tau}_{kj} :$$

Այսինքն

$$t_{jk} = \bar{\tau}_{kj}$$

կամ որ նույնն է

$$(T^*)_B = (T)_B^* :$$

Եթե T օպերատորը ինքնահամալուծ է, ապա

$$(T)_B = (T^*)_B : \bullet$$

Սահմանում 48. T օպերատորը կանվանենք ***ունիտար օպերատոր***, եթե

$$(Tv, Tu) = (v, u), \ v, u \in V$$

Սահմանում 49. T օպերատորը կանվանենք ***նորմալ օպերատոր***, եթե

$$TT^* = T^*T :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսում ունիտար օպերատորի մատրիցը ունիտար է, նորմալ օպերատորի մատրիցը նորմալ է: Սա իր հերթին նշանակում է, որ հերմիտյան, նորմալ և ունիտար մատրիցների բոլոր հատկությունները տարածվում են համապատասխանաբար հերմիտյան, նորմալ և ունիտար օպերատորների վրա:

503. Գտնել A^* մատրիցը, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 2i & 1-i \\ 4 & 3+i \\ 5+i & 0 \end{pmatrix}$,   բ) $A = \begin{pmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ 4 & 5-7i & -i \\ i & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

գ) $A = (\,7i \quad 0 \quad -3i\,)$,   դ) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$:

504. Հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է հերմիտյան

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{pmatrix}$, գ) $A = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}$,

դ) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & 5 \end{pmatrix}$, ե) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

505. k, l, m հաստատունների արժեքները որոշել այնպես, որ հետևյալ մատրիցը լինի հերմիտյան

$$\begin{pmatrix} -1 & k & -i \\ 3-5i & 0 & m \\ l & 2+4i & 2 \end{pmatrix}:$$

506. Հետևյալ մատրիցներից ո՞րն է ունիտար

ա) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,   բ) $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}$,   դ) $\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$:

507. Ստուգել, որ հետևյալ մատրիցները ունիտար են և գտնել հակադարձները

ա) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(i-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$:

508. Ցույց տալ, որ ցանկացած իրական θ-ի համար

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

մատրիցը ունիտար է:

509. a, b, c հաստատունների արժեքները որոշել այնպես, որ հետևյալ մատրիցները լինեն ունիտար

ա) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, բ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{3-4i}{5} & a \\ b & c \end{pmatrix}$,

գ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & a \\ b & c \end{pmatrix}$, դ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a & \frac{6+3i}{\sqrt{45}} \\ b & c \end{pmatrix}$:

510. A մատրիցը բերել անկյունագծային տեսքի P ունիտար մատրիցի օգնությամբ և հաշվել $P^{-1}AP$ մատրիցը

ա) $\begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & -3 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

511. Ցույց տալ, որ
$$\begin{pmatrix} 1 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$$
սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքները իրական չեն:

512. A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: Ապացուցել, որ $det(\bar{A}) = \overline{detA}$:

513. A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: Ապացուցել, որ
- $det(A^*) = \overline{det(A)}$,
- եթե A-ն հերմիտյան մատրից է, ապա $detA$-ն իրական է,
- եթե A-ն ունիտար է, ապա $|detA| = 1$:

514. Ապացուցել, որ եթե A մատրիցը հակադարձելի է, ապա այդպիսին է նաև A^*-ը և
$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* :$$

515. Ցույց տալ, որ եթե A-ն ունիտար մատրից է, ապա այդպիսին է նաև A^*-ը:

516. Դիցուք $A^* = -A$: Ցույց տալ, որ
- iA մատրիցը հերմիտյան է,
- A-ն ունիտար ձևափոխությամբ կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի և այն ունի միայն կեղծ սեփական արժեքներ:

517. Հետևյալ բազմություններից ո՞րն է կոմպլեքս $M_{n,n}$ տարածության ենթատարածություն

ա) $(n \times n)$ կարգի հերմիտյան մատրիցների բազմությունը,

բ) $(n \times n)$ կարգի ունիտար մատրիցների բազմությունը,

գ) $(n \times n)$ կարգի նորմալ մատրիցների բազմությունը:

518. Ապացուցել, որ
- ցանկացած հերմիտյան մատրից նորմալ մատրից է,
- ցանկացած ունիտար մատրից նորմալ մատրից է,

կառուցել այնպիսի (2×2) կարգի
- հերմիտյան մատրից, որը ունիտար չէ,
- ունիտար մատրից, որը հերմիտյան չէ,
- նորմալ մատրից, որը ոչ հերմիտյան է և ոչ էլ ունիտար: Գտնել ստացված մատրիցի սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտորները:

519. Ցույց տալ, որ երկու ունիտար օպերատորների արտադրյալը նույնպես ունիտար է:

520. V-ն ունիտար տարածություն է և $T : V \to V$ օպերատորը ինքնահամալուծ է: Ապացուցել, որ ցանկացած $v \in V$ տարրի համար (Tv, v) սկալյար արտադրյալը իրական թիվ է:

521. V-ն ունիտար տարածություն է և $T : V \to V$ ունիտար օպերատոր է: Ցույց տալ, որ ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսում T օպերատորի մատրիցը ունիտար է:

522. V-ն ունիտար տարածություն է և $T : V \to V$ նորմալ օպերատոր է: Ցույց տալ, որ ցանկացած օրթոնորմավորված բազիսում T օպերատորի մատրիցը նորմալ է:

523. A, B-ն հերմիտյան մատրիցներ են: Ցույց տալ, որ $AB = BA$ այն և միայն այն դեպքում, եթե AB մատրիցը նույնպես հերմիտյան է:

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Ներմուծենք A մատրիցը և գտնենք A^*-ը

```
In[1]:= A = {{1, 2, I}, {0, 2, -I}, {0, 0, 1}};
        A* = Transpose[Conjugate[A]];
        {A // MatrixForm, A* // MatrixForm}
```

$$\text{Out[3]=}\ \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -i & i & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Ցույց տանք, որ A մատրիցը հերմիտյան չէ

```
In[4]:= A == A*
Out[4]= False
```

Դիտարկենք հերմիտյան մատրից

```
In[5]:= A = {{1, 2, I}, {2, 2, -I}, {-I, I, 1}};
        A* = Transpose[Conjugate[A]];
        A == A*

Out[7]= True
```

Հաշվենք A մատրիցի սեփական արժեքներն ու սեփական վեկտոր-ները

```
In[8]:= Eigenvalues[A] // N // Chop

Out[8]= {3.57577 , 1.81272 , -1.38849 }
```

```
In[9]:= Eigenvectors[A] // N // Chop

Out[9]= {{-7.21038 i, -9.78616 i, 1.},
         {0.526776 i, -0.28594 i, 1.},
         {-1.31639 i, 1.0721 i, 1.}}
```

A մատրիցը ունիտար ձևափոխությամբ բերենք անկյունագծային տեսքի

```
In[15]:= {m1, m2} = SchurDecomposition[A] // N // Chop;
         {m1 // MatrixForm, m2 // MatrixForm}

  SchurDecomposition :: schurf :
   SchurDecomposition has received a
     matrix with infinite precision . More...
```

$$
\text{Out[16]=}\quad \left\{\begin{pmatrix} -0.668101 & -0.591177 & -0.45183 \\ 0.544114 & -0.802364 & 0.245259 \\ -0.507524\,i & -0.0819897\,i & 0.857728\,i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1.38849 & 0 & 0 \\ 0 & 3.57577 & 0 \\ 0 & 0 & 1.81272 \end{pmatrix}\right\}
$$

Պատասխանը ստուգենք

In[17]:=
```
m1.m2.Transpose[Conjugate[m1]] // Chop // MatrixForm
```
Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 2. & 1.\ i \\ 2. & 2. & -1.\ i \\ -1.\ i & 1.\ i & 1. \end{pmatrix}$$

Ստուգենք, որ $m1$ մատրիցը ունիտար է

In[18]:=
```
(m1.Transpose[Conjugate[m1]] // Chop) ==
 (Transpose[Conjugate[m1]].m1 // Chop) ==
 IdentityMatrix[3]
```
Out[18]=
```
True
```

34. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԺՈՐԴԱՆԻ ՁԵՎԸ

Այսուհետև V-ն n չափանի գծային տարածություն է, $T : V \to V$ օպերատորը գծային է:

Լեմմա 1. Ճշմարիտ է ներդրումների հետևյալ շղթան

$$V \supseteq \mathcal{R}(T) \supseteq \mathcal{R}(T^2) \supseteq \cdots,$$

$$\{o\} \subseteq \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^2) \subseteq \cdots :$$

Ընդ որում, գոյություն ունի այնպիսի $k \le n$ թիվ, որ

$$\mathcal{R}(T^j) \supset \mathcal{R}(T^{j+1}),\ j < k,$$

$$\mathcal{R}(T^j) = \mathcal{R}(T^{j+1}),\ j \ge k :$$

Օրինակ 230. $D : P_3 \to P_3$ օպերատորը գործում է

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$$

օրենքով: D օպերատորի համար ունենք

$$\mathcal{R}(D) = P_2,\ \mathcal{R}(D^2) = P_1,\ \mathcal{R}(D^3) = P_0,\ \mathcal{R}(D^4) = \{o\},$$

$$\mathcal{N}(D) = P_1,\ \mathcal{N}(D^2) = P_2,\ \mathcal{N}(D^3) = P_3,$$

հետևաբար

$$P_3 \supset \mathcal{R}(D) \supset \mathcal{R}(D^2) \supset \mathcal{R}(D^3) \supset \{o\} = \{o\} = \cdots,$$

$$\{o\} \subset \mathcal{N}(D^3) \subset \mathcal{N}(D^2) \subset \mathcal{N}(D^3) = \mathcal{N}(D^3) = \cdots \bullet$$

Օրինակ 231. $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ օպերատորը գործում է

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

օրենքով:

Ունենք

$$\mathbf{C}^3 \supset \mathcal{R}(\mathbf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{T}^2) = \cdots,$$

$$\{o\} \subset \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2) = \cdots : \bullet$$

Պարտադիր չէ, որ ներդրումների շղթան սկսվի կամ ավարտվի $\{o\}$ գծային ենթատարածությունով:

Օրինակ 232. $T : P_2 \to P_2$ օպերատորը գործում է

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 \xmapsto{T} 2c_0 + c_2x$$

օրենքով:

Ունենք

$$\mathcal{R}(T^0) = P_2,\ \mathcal{R}(T) = P_1; a, b \in \mathbf{C}\},\ \mathcal{R}(\mathbf{T}^2) = \mathbf{C}$$

և այնուհետև

$$\mathcal{R}(T^2) = \mathcal{R}(T^3) = \mathcal{R}(T^4) = \cdots :$$

Միևնույն ժամանակ

$$\mathcal{N}(T^0) = \{o\},\ \mathcal{N}(T) = \{cx; c \in \mathbf{C}\},\ \mathcal{N}(T^2) = \{cx + d; c, d \in \mathbf{C}\}$$

և այնուհետև
$$\mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T^3) = \mathcal{N}(T^4) = \cdots : \bullet$$

Յանկացած $T : V \to V$ գծային օպերատորի համար

$$V = \mathcal{R}(T^0) \oplus \mathcal{N}(T^0),$$

քանի որ $T^0 = I \Rightarrow \mathcal{N}(T^0) = \{o\}, \mathcal{R}(T^0) = V$:

Լեմմ 2. Յանկացած $T : V \to V$ օպերատորի համար $(dimV = n)$

$$V = \mathcal{R}(T^n) \oplus \mathcal{N}(T^n) :$$

T օպերատորի $T^j (0 < j < n)$ աստիճանների համար, ընդհանրապես, դա այդպես չէ:

Օրինակ 233. $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ գծային օպերատորը գործում է

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

օրենքով:

Նկատենք, որ $e_2 \neq o$ տարրը պատկանում է $\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T)$ ենթատարածությանը: Դա նշանակում է, որ

$$V \neq \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T) :$$

Այս օրինակում, T օպերատորի վարքը կարելի է նկարագրել նաև հետևյալ սխեմայով

$$e_1 \longmapsto e_2 \longmapsto \{o\} : \bullet$$

Օրինակ 234. $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ օպերատորը $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ բազիսի վրա գործում է հետևյալ կերպ

$$e_4 \longmapsto e_3 \longmapsto e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto \{o\} :$$

Պարզ է, որ
$$\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T) = lin\{e_1\},$$
$$\mathcal{R}(T^2) \cap \mathcal{N}(T^2) = lin\{e_2, e_1\}, \ \mathcal{R}(T^3) \cap \mathcal{N}(T^3) = lin\{e_1\} :$$

T օպերատորի մատրիցը $B = \{T^3e_4, T^2e_4, Te_4, e_4\}$ բազիսում ունի հետևյալ տեսքը

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 235. T գծային օպերատորը

$$B = \{e_1, \cdots, e_5\} = \{T^2e_3, Te_3, e_3, Te_5, e_5\}$$

բազիսի վրա գործում է հետևյալ սխեմայով

$$e_3 \longmapsto e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto o, \tag{27}$$

$$e_5 \longmapsto e_4 \longmapsto o : \tag{28}$$

B բազիսում T օպերատորի մատրիցային պատկերումն է

$$(T)_B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) :$$

Կետագծերով առանձնացված են երկու անկյունագծային վանդակները, որոնք համապատասխանում են (27), (28) շղթաներին:•

Սահմանում 50. $T : V \to V$ գծային օպերատորը կանվանենք k-րդ աստիճանի ***ինքնաչեզոքացնող (նիլպոտենտ)*** օպերատոր, եթե

$$T \neq O,\ T^2 \neq O,\ \cdots,\ T^{k-1} \neq O,\ T^k = O :$$

Օրինակ 233-ի T օպերատորը երկրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է:

Օրինակ 235-ի T օպերատորը երրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է:

Ոչ բոլոր բազիսներում ինքնաչեզոքացնող օպերատորի մատրիցն ունի այնպիսի պարզ տեսք, ինչպիսին ստացել ենք օրինակներ 233,235-ում: Հետագա շարադրանքից պարզ կդառնա այդպիսի բազիսի գոյությունը:

Սահմանում 51. Դիցուք $T : V \to V$ գծային օպերատորը k-րդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է: $v \in V$ տարրով ծնված

$$\{T^{k-1}, \cdots, T^2v, Tv, v\}$$

համախումբը կանվանենք v-ով ծնված *T-շարան:* T-շարանների միավորումից կազմված բազիսը կանվանենք *T-շարան բազիս:* T-շարան բազիսը հաճախ անվանում են նաև T ինքնաչեզոքացնող օպերատորի ***կանոնական բազիս:*** Կանոնական բազիսում T օպերատորի մատրիցն անվանում են ինքնաչեզոքացնող օպերատորի ***կանոնական ձև:***

Օրինակ 235-ի B բազիսը T-շարան բազիս է: Պատահական չէ, որ այդտեղ ամենաերկար T-շարանի երկարությունը երեք է, քանի որ T օպերատորը երրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է:

Լեմմա 3. Եթե V գծային տարածությունն ունի T-շարան բազիս, ապա ամենաերկար շարանի երկարությունը համընկնում է T օպերատորի ինքնաչեզոքացման աստիճանի հետ:

Թեորեմ 100. Յուրաքանչյուր T ինքնաչեզոքացնող օպերատորով կարելի է կառուցել T-շարան բազիս, ընդ որում շարանների քանակը և երկարությունները միարժեքորեն որոշվում են T օպերատորով:

Օրինակ 236. Դիտարկենք երկրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող M մատրիցը

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

Ենթադրենք, որ M-ը T օպերատորի մատրիցն է տիպային բազիսում: Այսինքն, T-ն երկրորդ աստիճանի ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է և համաձայն թեորեմ 100-ի նրան համապատասխանում է կանոնական բազիս: Գտնենք կանոնական բազիսը և T օպերատորի կանոնական ձևը:

Հաշվենք $\mathcal{N}(M), \mathcal{N}(M^2)$ տարածությունների չափողականությունները և ստացված արդյունքներն ամփոփենք հետևյալ աղյուսակում

p	M^p	$\mathcal{N}(M^p)$	$dim(\mathcal{N}(N^p))$
1	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}; x \in \mathbf{C}\}$	1
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C}^2$	2

Քանի որ, $dim(\mathcal{N}(M)) = 1$, ապա կանոնական բազիսի մեկ տարր T օպերատորով արտապատկերվում է զրոյական տարրին

$$e_1 \longmapsto o :$$

Երկրորդ քայլում ևս մեկ բազիսային տարր արտապատկերվում է զրոյական տարրի

$$e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto o :$$

$B = \{e_1, e_2\} = \{Te_2, e_2\}$ բազիսը T օպերատորի կանոնական բազիսն է: B բազիսում T օպերատորի մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Այդուսակից երևում է, որ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

e_2 տարրը գտնելու համար հարկավոր է լուծել $Te_2 = Me_2 = e_1$ հավասարումը, որտեղից

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Կազմենք

$$P = (e_1|e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

համակցված մատրիցը: Հեշտ է ստուգել, որ

$$P^{-1}MP = (T)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 237. Դիտարկենք

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

Կազմենք հետևյալ աղյուսակը

p	M^p	$\mathcal{N}(M^p)$	$dim(\mathcal{N}(N^p))$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u-v \\ u \\ v \end{pmatrix}; u, v \in \mathbf{C}\}$	2
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} o \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}; y, z, u, v \in \mathbf{C}\}$	4
3	O	$\mathbf{C}^5$	5

Քանի որ $dim(\mathcal{N}(M)) = 2$, ապա երկու բազիսային տարր արտապատկերվում են զրոյական տարրի

$$e_1 \longmapsto o, \qquad e_2 \longmapsto o:$$

Քանի որ $dim(\mathcal{N}(M^2)) = 4$, ապա երկրորդ քայլում ևս երկու բազիսային տարր արտապատկերվում են զրոյական տարրի

$$e_3 \longmapsto e_1 \longmapsto o, \qquad e_4 \longmapsto e_2 \longmapsto o:$$

Քանի որ $dim(\mathcal{N}(M^3)) = 5$, ապա երրորդ քայլում ևս մեկ բազիսային տարր արտապատկերվում է զրոյական տարրի

$$e_5 \longmapsto e_3 \longmapsto e_1 \longmapsto o, \qquad e_4 \longmapsto e_2 \longmapsto o:$$

$B = \{e_1, e_3, e_5, e_2, e_4\} = \{T^2 e_5, Te_5, e_5, Te_4, e_4\}$ կանոնական բազիսում T օպերատորի կանոնական տեսքն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Գտնենք B բազիսը: Այդուսակից երևում է, որ $\{e_1, e_2\}$ համախումբը $\mathcal{N}(M)$ տարածության բազիսն է, որտեղ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

$\mathcal{N}(M^2)$ գծային տարածության $\{e_3, e_4\}$ բազիսը գտնելու համար լուծենք

$$Te_3 = e_1, \qquad Te_4 = e_2$$

հավասարումները, որտեղից

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$e_5 \in \mathbf{C}^5$ և $Te_5 = e_3$ պայմաններից ստանում ենք, որ

$$e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Լեմմա 4. T գծային օպերատորը ինքնաչեզոքացնող է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lambda = 0$ թիվը նրա միակ սեփական արժեքն է:

Դիցուք λ թիվը $T : V \to V$ գծային օպերատորի միակ սեփական արժեքն է (համապատասխան պատիկությամբ): Պարզ է, որ $T - \lambda I$ օպերատորի միակ սեփական արժեքը 0-ն է և ուրեմն համաձայն լեմմա 4-ի այն ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է:

Օրինակ 238. Դիտարկենք

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

Այն ունի միայն մեկ սեփական արժեք

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 :$$

$M - 3E$ մատրիցը ինքնաչեզոքացնող է

$$\mathcal{N}(M - 3E) = \{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}; y \in \mathbf{C}\}$$

$$\mathcal{N}((M - 3E)^2) = \mathbf{C}^2 :$$

$M - 3E$ մատրիցով որոշվող $T - 3I$ օպերատորի կանոնական բազիսն է

$$e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto o :$$

$B = \{e_2, e_1\} = \{Te_2, e_2\}$ կանոնական բազիսում

$$(T - 3I)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Սա նշանակում է, որ

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\} : \bullet$$

Օրինակ 239. Դիտարկենք

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

M մատրիցի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 4:$$

Դիտարկենք $M - 4E$ ինքնաչեզոքացնող մատրիցը: Ունենք

$$dim(\mathcal{N}(M - 4E)) = 2$$

$$dim(\mathcal{N}(M - 4E)^2) = 3$$

$$dim(\mathcal{N}(M - 4E)^3) = 4:$$

սա նշանակում է, որ $M - 4E$ մատրիցով որոշվող $T - 4I$ օպերատորը գործում է հետևյալ սխեմայով

$$e_4 \longmapsto e_3 \longmapsto e_1 \longmapsto o$$

$$e_2 \longmapsto 0:$$

$B = \{e_4, e_3, e_1, , e_2\}$ կանոնական բազիսում $T - 4I$ օպերատորի կանոնական ձևն է

$$(T - 4I)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}: \bullet$$

Սահմանում 52. $J_k(\lambda) \in \mathbf{C_{k,k}}$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

մատրիցն անվանում են *ժորդանի վանդակ*:

Սահմանում 53. $J \in \mathbf{C_{n,n}}$

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & & \\ & & J_{n_3}(\lambda_3) & & . \\ & & & \cdots & \\ & & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

մատրիցը, որտեղ չգրված տարրերը հավասար են զրոյի, անվանում են *ժորդանի մատրից*:

Նկատենք, որ եթե ժորդանի մատրիցում $n_i = 1$ բոլոր i-րի համար և $k = n$, ապա ժորդանի մատրիցը անկյունագծային մատրից է:

Սահմանում 54. $T : V \to V$ գծային օպերատորի *մնայուն (ինվարիանտ) ենթատարածություն* ասելով կհասկանանք այն $U \subset V$ ենթատարածությունը, որի համար

$$TU \subseteq U :$$

Օրինակ 240. Ցանկացած $T : V \to V$ գծային օպերատորի $\mathcal{N}(T^n)$ և $\mathcal{R}(T^n)$ ենթատարածությունները T օպերատորի մնայուն ենթատարածություններ են (ստուգել):

Լեմմա 5. Դիցուք U_1 և U_2 ենթատարածությունները $T : V \to V$ գծային օպերատորի մնայուն ենթատարածություններ են և

$$V = U_1 \oplus U_2,$$

ապա գոյություն ունի այնպիսի B բազիս, որ

$$(T)_B = \begin{pmatrix} M_1 & O \\ O & M_2 \end{pmatrix},$$

որտեղ M_1 մատրիցի տողերը $dim(U_1)$ հատ են, իսկ M_2-ինը՝ $dim(U_2)$:

Լեմմա 6. Դիցուք $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ թվերը $T : V \to V$ գծային օպերատորի սեփական արժեքներն են համապատասխանաբար $p_1, \cdots, p_k$ հանրահաշվական պատիկություններով, ապա

$$V = \mathcal{N}((T-\lambda_1 I)^n) \oplus \mathcal{N}((T-\lambda_2 I)^n) \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}((T-\lambda_k I)^n),$$

$$dim(\mathcal{N}(T-\lambda_i I)^n) = p_i :$$

$\mathcal{N}((T-\lambda_i I)^n)$ ենթատարածությունը T օպերատորի մնայուն ենթատարածություն է և համաձայն լեմմա 5-ի գոյություն ունի այնպիսի բազիս, որ այդ բազիսում T օպերատորն ունի քվազի-անկյունագծային տեսք՝ մատրիցի բոլոր տարրերը զրո են բացառությամբ գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող քառակուսի վանդակներից: Քանի որ $T - \lambda_i I$ օպերատորի նեղացումը $\mathcal{N}((T-\lambda_i I)^n)$ ենատարածության վրա ինքնաչեզոքացնող օպերատոր է, ապա նշված բազիսը կարելի է ընտրել այնպես, որ այդ վանդակները լինեն ժորդանի վանդակներ: Ստացված մատրիցն անվանում են գծային օպերատորի ***ժորդանի ձև***, իսկ համապատասխան բազիսը՝ ***ժորդանի կանոնական բազիս:***

Թեորեմ 101. Յուրաքանչյուր T օպերատորի համար գոյություն ունի կանոնական բազիս:

Թեորեմ 102. Յուրաքանչյուր M մատրիցի համար գոյություն ունի հակադարձելի P մատրից այնպիսին, որ $J(M) = P^{-1}MP$ մատրիցը ժորդանի մատրից է:

Օպերատորի ժորդանի ձևը միակն է, եթե պայմանավորվենք օպերատորի սեփական արժեքները դասավորել աճման կարգով, իսկ յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխանող ժորդանյան վանդակները՝ մեծից փոքր: Նշենք օպերատորի ժորդանի ձևի մի քանի կարևոր հատկություններ

1.ժորդանյան վանդակների քանակը հավասար է գծորեն անկախ սեփական վեկտորների մաքսիմալ քանակությանը:

2.Տվյալ սեփական արժեքին համապատասխանող ժորդանյան վանդակների քանակը հավասար է նրա երկրաչափական պատիկությանը:

3.Տվյալ սեփական արժեքին համապատասխանող ժորդանյան վանդակների կարգերի գումարը հավասար է այդ սեփական արժեքի հանրահաշվական պատիկությանը:

Օրինակ 241. Դիտարկենք

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

M-ի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 6 :$$

Նախ ուսումնասիրենք $M - 2E$ մատրիցը

p	$(M-2E)^p$	$\mathcal{N}((M-2E)^p)$	$dim(\mathcal{N}((M-2E)^p))$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbf{C}\}$	1
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} x \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix}; x, z \in \mathbf{C}\}$	2
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{\begin{pmatrix} x \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix}; x, z \in \mathbf{C}\}$	2

Սա նշանակում է, որ $dim(\mathcal{N}(M-2E)^3) = 2$: $M - 2E$ մատրիցով որոշվող $T - 2I$ օպերատորը գործում է

$$e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto o$$

սխեմայով: $T - 2I$ օպերատորի նեղացումը $\mathcal{N}((T-2I)^3)$ ենթատարածության վրա ունի հետևյալ կանոնական տեսքը

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

$\lambda = 6$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{Te_2, e_2, e_3\}$ բազիսում T օպերատորի ժորդանի ձևն է

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 242. Դիտարկենք

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որը նախորդ օրինակի մատրիցից տարբերվում է միայն m_{12} տարրով:

M-ի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 6 :$$

Նախ ուսումնասիրենք $M - 2E$ մատրիցը

p	$(M-2E)^p$	$\mathcal{N}((M-2E)^p)$	$dim(\mathcal{N}((M-2E)^p))$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix} ; x, z \in \mathbf{C} \right\}$	2
2	$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix} ; x, z \in \mathbf{C} \right\}$	2

$M-2E$ մատրիցով որոշվող $T-2I$ օպերատորը գործում է

$$e_1 \longmapsto o, \quad e_2 \longmapsto o$$

սխեմայով, որին համապատասխանում է ժորդանի հետևյալ վանդակը

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

$\lambda = 6$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է

$$e_3 = (3, 4, 0)^T :$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ բազիսում T օպերատորի ժորդանի ձևն է $(T)_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} :$ •

---

524. T-շարան բազիսների օգնությամբ գտնել T օպերատորի ինքնաչեզոքացման աստիճանը և $\mathcal{R}(T^k), \mathcal{N}(T^k)$ տարածությունների չափողականությունները: Գտնել նաև T օպերատորի մատրիցային պատկերումը նշված բազիսներում

ա) $e_1 \mapsto e_2 \mapsto o, \ e_3 \mapsto e_4 \mapsto o,$

բ) $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto o, \ e_4 \mapsto o, \ e_5 \mapsto o, \ e_6 \mapsto o,$

գ) $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto o :$

525. Գտնել հետևյալ ինքնաչեզոքացող մատրիցների կանոնական ձևը

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$

526. Հետևյալ տվյալներով գտնել ժորդանի կանոնական ձևը

ա) T-ն (5×5) կարգի մատրից է $\lambda = 3$ միակ սեփական արժեքով,

$$dim(\mathcal{N}(T-3I)) = 2, \qquad dim(\mathcal{N}(T-3I)^2) = 3,$$

$$dim(\mathcal{N}(T-3I)^3) = 4, dim(\mathcal{N}(T-3I)^4) = 5,$$

բ) T-ն (5×5) կարգի մատրից է $\lambda = 2, \lambda = -1$ սեփական արժեքներով,

$$dim(\mathcal{N}(T-2I)) = 2, \ dim(\mathcal{N}(T-3I)^2) = 4, \ dim(\mathcal{N}(T+I)) = 1 :$$

527. Գտնել հետևյալ մատրիցների ժորդանի ձևը

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, ը) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$:

528. Գտնել հետևյալ մատրիցների ժորդանի ձևը և կանոնական բազիսը

ա) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$:

Այն բավարարում է 1.-3. աքսիոմներին: Ցույց տանք, որ $||\cdot||_{\ell_\infty}$ նորմը չի բավարարում 4. աքսիոմին: Դիցուք

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

Ունենք

$$||A||_{\ell_\infty} = ||B||_{\ell_\infty} = 1, \ ||AB||_{\ell_\infty} = 2 > ||A||_{\ell_\infty}||B||_{\ell_\infty} : \bullet$$

Ներկայացնենք մատրիցային նորմի տրման կարևորագույն եղանակներից մեկը: Դիցուք $\mathbf{C}^n$-ը նորմավորված տարածություն է $||\cdot||$ նորմով: $A \in C_{n,n}$ մատրիցի մատրիցային նորմը սահմանենք հետևյալ բանաձևով

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| :$$

Այսպես սահմանված մատրիցային նորմն անվանում են նաև ***օպերատորային նորմ,*** որն օժտված է հետևյալ կարևոր հատկությամբ

$$||E|| = \max_{||x||=1} ||Ex|| = \max_{||x||=1} ||x|| = 1 :$$

Նշենք, որ Ֆրոբենիուսի նորմը օպերատորային չէ, քանի որ

$$E \in C_{n,n} \Rightarrow ||E||_F = \sqrt{n} :$$

Օրինակ 245. Դիցուք $\mathbf{C}^n$ գծային տարածությունում x տարրի նորմը սահմանված է հետևյալ եղանակով

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \ p \geq 1 :$$

Եթե $p = \infty$, ապա

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| :$$

$A \in C_{n,n}$ մատրիցի օպերատորային նորմը կարելի է սահմանել

$$||A||_p = \max_{||x||_p=1} ||Ax||_p$$

բանաձևով:

Նշենք $\|\cdot\|_2$ նորմի կարևորագույն հատկություններից մեկը: Եթե λ_{max}-ը $A^T A$ մատրիցի ամենամեծ սեփական արժեքն է, ապա

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} :$$

Մասնավորապես, եթե A մատրիցը սիմետրիկ է, ապա

$$\|A\|_2 = \rho(A) : \bullet$$

Թեորեմ 103. Մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը չի գերազանցում այդ մատրիցի ցանկացած մատրիցային նորմին

$$\rho(A) \leq \|A\| :$$

Օրինակ 246. $A \in C_{n,n}$ մատրիցի ***մաքսիմալ սյունային և տողային մատրիցային նորմերը*** սահմանվում են համապատասխանաբար հետևյալ բանաձևերով.

$$\|A\|_I = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_{II} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\|A\|_I = \|A\|_1, \qquad \|A\|_{II} = \|A\|_\infty : \bullet$$

Դիցուք $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \in C_{n,n}$ մատրիցների հաջորդականություն է: Եթե գոյություն ունի

$$a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$$

սահմանը, ապա $A = (a_{ij})$ մատրիցն անվանում են A_k հաջորդականության սահման: Տանք համարժեք սահմանում: Կասենք, որ մատրիցների A_k հաջորդականությունը զուգամիտում է A մատրիցին, եթե մի որևէ $\|\cdot\|$ մատրիցային նորմի համար

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 :$$

Եթե գոյություն ունի

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

մատրիցը, ապա այն անվանում են մատրիցային շարքի գումար

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

իսկ մատրիցային շարքն անվանում են զուգամետ: $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ շարքն անվանում են *Նեյմանի շարք:* Նեյմանի շարքը կանվանենք բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է այդ շարքի նորմերից կազմված $\sum_{k=1}^{\infty} ||A_k||$ շարքը մի որևէ մատրիցային նորմով:

Թեորեմ 104. Որպեսզի Նեյմանի շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\rho(A) < 1$: Ընդ որում,

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k :$$

Թեորեմ 105. Եթե A մատրիցի որևէ մատրիցային նորմ փոքր է մեկից, ապա Նեյմանի շարքը զուգամետ է և

$$\frac{1}{1 + ||A||} \le ||(I - A)^{-1}|| \le \frac{1}{1 - ||A||} :$$

Թեորեմ 104-ը կարելի է օգտագործել հակադարձ մատրիցի մոտավոր հաշվման համար:

Թեորեմ 106. Եթե

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

շարքը զուգամետ է $|z| < R$ շրջանում, ապա

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

մատրիցը գոյություն ունի բոլոր այն $A \in C_{n,n}$ մատրիցների համար, որոնք բավարարում են $\rho(A) < R$ պայմանին:

Թեորեմ 106-ից բխում է հետևյալ մատրից ֆունկցիաների գոյությունը

$$f(z) = x^2 + 3x - 7 \Rightarrow f(A) = A^2 + 3A - 7E,$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

և այլն:

Եթե $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ թվերը $A \in C_{n,n}$ մատրիցի սեփական արժեքներն են համապատասխանաբար $x_1, \cdots, x_n$ սեփական վեկտորներով, ապա $e^z, \cos z, \sin z$ ֆունկցիաների անալիտիկությունից հետևում է, որ եթե

$$A = Xdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)X^{-1},$$

ապա

$$e^A = Xdiag(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})X^{-1},$$

$$\cos A = Xdiag(\cos\lambda_1, \cdots, \cos\lambda_n)X^{-1},$$

$$\sin A = Xdiag(\sin\lambda_1, \cdots, \sin\lambda_n)X^{-1} :$$

Թեորեմ 107. Դիցուք $A \in C_{n,n}$ և $X^{-1}AX = diag(J_1, \cdots, J_p)$ նրա ժորդանի կանոնական ձևն է: Եթե գոյություն ունի $f(A)$ մատրից ֆունկցիան, ապա

$$f(A) = Xdiag(f(J_1), \cdots, f(J_p))X^{-1},$$

որտեղ

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & & \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & f'(\lambda_i) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

և m_i թիվը J_i ժորդանի վանդակի կարգն է:

Օրինակ 247. Գտնել $\cos A$ մատրից ֆունկցիան, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

A մատրիցի ժորդանի կանոնական ձևն է

$$A = XJX^{-1}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J = diag(J_1, J_2),$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Համաձայն նախորդ թեորեմի

$$\cos J_1 == \begin{pmatrix} \cos 0 & -\frac{\sin 0}{1!} & -\frac{\cos 0}{2!} \\ 0 & \cos 0 & -\frac{\sin 0}{1!} \\ 0 & 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\cos J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\cos A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \bullet$$

529. Հաշվել հետևյալ մատրիցների ℓ_2 նորմը

$$\text{ա)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \text{բ)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \text{գ)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}:$$

530. Հաշվել A մատրիցի $||A||_{\ell_2}, ||A||_{\ell_\infty}, ||A||_2, ||A||_\infty$ նորմերը

$$\text{ա)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{բ)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

531. Ցույց տալ, որ ցանկացած $A \in C_{n,n}$ մատրիցի համար

$$E + \cos(2A) = 2\cos^2 A,$$

$$\sin(2A) = 2\sin A \cos A :$$

532. Տրված A մատրիցի համար հաշվել e^A մատրիցը

$$\text{ա)}\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{բ)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{գ)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{դ)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{ե)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}:$$

533. Առանց հաշվելու e^A մատրիցը գտնել դրա որոշիչը

$$\text{ա)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \text{բ)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}:$$

534. Ցույց տալ, որ

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}, \qquad det(e^A) = e^{Tr(A)},$$

եթե $AB = BA$, ապա

$$e^{A+B} = e^A e^B :$$

Դիտարկենք հետևյալ A մատրիցը

In[1]:=
```
A = {{1/2, 0, -.1}, {.1, .1, 0}, {0, -.1, 0}};
A // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Տրված A մատրիցի $||A||_p$ նորմը կարելի է հաշվել $Norm[A,p]$ հրամանով: Հաշվենք A մատրիցի $||A||_2$ նորմը

In[3]:=
```
Norm[A, 2]
```

Out[3]= 0.519629

Հաշվենք $||A||_\infty$ նորմը

In[4]:=
```
Norm[A, ∞]
```

Out[4]= 0.6

Գտնենք A մատրիցի հակադարձը

In[5]:=
```
invA = Inverse[A];
invA // MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.11022\times10^{-16} & 10. & 10. \\ 0. & 0. & -10. \\ -10. & 50. & 50. \end{pmatrix}$$

Հաշվենք $||A^{-1}||_2$ նորմը

```
In[7]:= Norm[invA, 2]

Out[7]= 73.1149
```

Տրված A մատրիցի հակադարձի $||A^{-1}||_p$ նորմը կարելի է միանգամից հաշվել Linear`Algebra`MatrixManipulations փաթեթի $InverseMatrixNorm[A, p]$ հրամանով

```
In[8]:= << LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
        InverseMatrixNorm[A, 2]

Out[9]= 73.1149
```

Հաշվենք $||A||_\infty$ նորմը

```
In[10]:= InverseMatrixNorm[A, ∞]

Out[10]= 110.
```

Քանի որ A մատրիցի $||A||_2$ նորմը մեկից փոքր է, ապա նրա հակադարձ մատրիցը կարելի է հաշվել թեորեմ 104-ի օգնությամբ

In[13]:= $\mathtt{A} = \sum_{k=0}^{500} \mathtt{MatrixPower}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathtt{A}, \mathtt{k}\right];$

```
A // MatrixForm
```

Out[14]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6.80214 \times 10^{-7} & 10. & 10. \\ -9.82938 \times 10^{-7} & 4.61197 \times 10^{-6} & -10. \\ -10. & 50. & 50. \end{pmatrix}$$

Գտնենք հակադարձ մատրիցի հաշվման հարաբերական սխալը

In[15]:= $\dfrac{\texttt{Norm[Inverse[A] - Å, 2]}}{\texttt{Norm[Inverse[A], 2]}}$

Out[15]= 2.70024×10^{-7}

Տրված A մատրիցի համար e^A մատրիցը կարելի է հաշվել այսպես

In[16]:= $\texttt{MatrixExp}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ // MatrixForm

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 1-2e+e^2 & e^2 & \frac{1}{2}\left(-1+e^2\right) \\ 2(-1+e) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Գ Լ ՈՒ Խ Վ Ե Ց Ե Ր Ո Ր Դ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

36. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՃՇԳՐԻՏ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ:

Համակարգչային թվաբանությունը ունի որոշ առանձնահատկություններ: Ցանկացած համակարգիչ թվերը իր հիշողության մեջ պահելու համար կարող է օգտագործել ստորակետից հետո միայն վերջավոր քանակությամբ նիշեր: Եթե այդպիսի նիշերը ասենք ութն են, ապա օրինակ $\frac{2}{3}$ կոտորակը համակարգչի հիշողության մեջ կարելի է պահել 0.66666667 կամ 0.66666666 վերջավոր տասնորդական կոտորակների տեսքով, որոնք իհարկե տրված կոտորակի համեմատությամբ իրենց մեջ սխալ են պարունակում: Այդ սխալը պայմանականորեն անվանում են *"կլորացման սխալ"*: Ալգորիթմի իրականացման ժամանակ այդպիսի սխալները վերադրվում են և խնդրի պատասխանը կարող է ստացվել համեմատաբար մեծ սխալով: Այս երևույթն անվանում են *սխալների կուտակում:* Լավն է այն ալգորիթմը, որը բացի քիչ քանակությամբ գործողություններ կատարելը տալիս է սխալների քիչ կուտակում: Սովորաբար նույն ալգորիթմի գործողությունների հաջորդականությունը փոխելով կարելի է էապես նվազեցնել սխալների կուտակումը: Բացի այդ, միշտ չէ, որ խնդրի տվյալները տրվում են ճշգրիտ: Շատ հաճախ մուտքային տվյալները ստացվում են փորձից, որի պատճառով պարունակում են սխալանքներ: Այս բոլորը հաշվի առնելով անհրաժեշտություն է առաջանում պարզել, թե նկարագրված սխալանքների պատճառով ինչքան է փոխվում խնդրի լուծումը:

Նախ քննարկենք այն սխալանքները, որոնք առաջանում են համակարգչային թվաբանության պատճառով: Ուսումնասիրենք n անհայտով n

գծային հավասարումների $Ax = b$ համակարգը: Իրար հետ համեմատենք համակարգի լուծման չորս եղանակներ, որոնց սովորաբար անվանում են *ճշգրիտ եղանակներ.*

$I.$ Գաուսի արտաքսման եղանակը հետընթաց տեղադրումով,

$II.$ Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակը,

$III.$ հակադարձ մատրիցի հաշվման եղանակը՝ $x = A^{-1}b$,

$IV.$ Կրամերի եղանակը:

Հետևյալ աղյուսակում ներկայացված են նշված չորս ալգորիթմների իրականացման ժամանակ կատարվող գործողությունների քանակը, որտեղ միավորված են հանում-գումարումը և բաժանում-բազմապատկումը

եղանակը	*գումարում*	*բազմապատկում*
I	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$
II	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$
III	$n^3 - n^2$	$n^3 + n^2$
IV	$\frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{3}n - 1$

Աղյուսակից պարզ է, որ III և IV եղանակները արդյունավետ չեն: Եթե հաշվի առնենք նաև այն հանգամանքը, որ սովորաբար սխալների կուտակումը համեմատական է գործողությունների քանակությանը, ապա նախընտրելի են Գաուսի և Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակները: Աղյուսակից երևում է, որ այս մեթոդների արդյունավետությունը նույնն է:

Որոշ դեպքերում, Գաուսի եղանակի կիրառումը կարող է հանգեցնել սխալների մեծ կուտակման: Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է փոխել գործողությունների հաջորդականությունը, որպեսզի Գաուսի արտաքսման եղանակում նվազեցնենք սխալների կուտակումը:

Օրինակ 248. Դիտարկենք հետևյալ համակարգը

$$0.00044x_1 + 0.0003x_2 - 0.0001x_3 = 0.00046$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 1.5$$
$$3x_1 - 9.2x_2 - 0.5x_3 = -8.2 :$$

Համակարգի ճշգրիտ լուծումն է

$$x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{2} :$$

Եթե համակարգը լուծենք Գաուսի եղանակով և ամեն անգամ թվերը հաշվենք ստորակետից հետո երեք նիշի ճշտությամբ, ապա կստանանք հետևյալ պատասխանը

$$x_1 = 0.245,\ x_2 = 1.01,\ x_3 = -0.492:$$

Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է նվազեցնել սխալների կուտակումը: Դիտարկենք համակարգի ընդլայնված մատրիցը

$$\begin{pmatrix} 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{pmatrix}:$$

Առաջին սյան բացարձակ արժեքով ամենամեծ տարրը 4-ն է: Տեղափոխենք մատրիցի երկրորդ և առաջին տողերը

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{pmatrix}:$$

Առաջին տողի բոլոր տարրերը բաժանենք 4-ի

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{pmatrix}:$$

Առաջին սյան երկրորդ և երրորդ տարրերը դարձնենք զրո

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \\ 0 & -9.95 & -2.25 & -9.32 \end{pmatrix}:$$

Նկատենք, որ երկրորդ սյան երկրորդ և երրորդ տարրերից բացարձակ արժեքով ամենամեծը -9.95-ն է: Տեղափոխենք երկրորդ և երրորդ տողերը

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & -9.95 & -2.25 & -9.32 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{pmatrix}:$$

Երկրորդ տողի բոլոր տարրերը բաժանենք -9.95-ի

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{pmatrix} :$$

Երկրորդ սյան վերջին տարրը դարձնենք զրո

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} :$$

Հետադարձ տեղադրումով կստանանք

$$x_1 = 0.250,\ x_2 = 1.00,\ x_3 = -0.492 :$$

Համեմատությունը ճշգրիտ պատասխանի և նախկինում ստացված պատասխանի հետ ցույց է տալիս, որ խնդիրը լուծված է: •

Բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ միայն զրոյական գլխավոր տարրերից խուսափելը բավարար չէ: Անհրաժեշտ է խուսափել նաև հարաբերականորեն փոքր գլխավոր տարրերից: Դրա համար նախընտրելի է գլխավոր տարրի ընտրության տարբերակը: Սովորաբար առանձնացվում են գլխավոր տարրի ընտրություն ըստ սյան, տողի կամ մատրիցի:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ խնդրի մուտքային տվյալները հայտնի են սխալանքներով: Եթե մուտքային տվյալների փոքր սխալանքներին համապատասխանում է խնդրի լուծման համեմատաբար փոքր սխալանք, ապա ասում են, որ խնդիրը կայուն է մուտքային տվյալներից: Երբ խոսքը վերաբերում է $Ax = b$ համակարգին, ապա տարբերում են կայունություն ըստ A մատրիցի և b վեկտորի: Դիտարկենք $A \in C_{n,n}$ մատրիցի հակադարձը հաշվելու խնդիրը, ենթադրելով, որ A մատրիցի փոխարեն հայտնի է $A + \Delta A$, $\Delta A \in C_{n,n}$ մատրիցը, որտեղ ΔA-ն գրգռումն է: Դիցուք $A + \Delta A$ մատրիցը հակադարձելի է: Հաշվենք $A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}$ սխալը ենթադրելով, որ $||A^{-1}\Delta A|| < 1$ մի ինչ որ մատրիցային նորմի համար: Ունենք

$$A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1} = A^{-1} - (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} =$$

$$= A^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}\Delta A)^k A^{-1},$$

որտեղից

$$||A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}|| \leq ||A^{-1}|| \sum_{k=1}^{\infty} ||A^{-1}\Delta A||^k =$$

$$= ||A^{-1}|| \frac{||A^{-1}\Delta A||}{1 - ||A^{-1}\Delta A||} :$$

Հակադարձ մատրիցի հաշվման հարաբերական սխալը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով

$$\frac{||A^{-1} - (A + \Delta A)^{-1}||}{||A^{-1}||} \leq \frac{(||A||\ ||A^{-1}||)}{1 - (||A||\ ||A^{-1}||)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \frac{||\Delta A||}{||A||} : \qquad (29)$$

Այս անհավասարությունը հնարավորություն է տալիս հաշվարկել ստացված հակադարձ մատրիցի հարաբերական սխալը սկզբնական մատրիցի օգնությամբ:

$$k(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$$

թիվն անվանում են A մատրիցի պայմանավորվածության թիվ: Եթե $det(A) = 0$, ապա ենթադրվում է, որ $k(A) = \infty$: $||A||_{\ell_2}, ||A||_{\ell_\infty}, ||A||_p$ նորմերին համապատասխանող պայմանավորվածության թիվը կընդշանակենք՝ $k_{\ell_2}(A), k_{\ell_\infty}(A), k_p(A)$: Անկախ մատրիցային նորմի ընտրությունից մատրիցի պայմանավորվածության թիվը բավարարում է հետևյալ հատկություններին

$$k(A) \geq 1,$$

$$k(A^{-1}) = k(A),.$$

$$k(AB) \leq k(A)k(B),$$

եթե $A = A^T$, ապա

$$k_2(A) = \frac{max|\lambda_A|}{min|\lambda_A|},$$

եթե A-ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա

$$k_2(A) = 1 :$$

Եթե $k(A)$ թիվը մեծ է, ապա A մատրիցն անվանում են *վատ պայմանավորված մատրից*, հակառակ դեպքում՝ *լավ պայմանավորված մատրից*:

(29) գնահատականը կարելի է արտագրել այսպես

$$\frac{||A^{-1}-(A+\Delta A)^{-1}||}{||A^{-1}||} \leq \frac{k(A)}{1-k(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \frac{||\Delta A||}{||A||}:$$

Եթե մատրիցը վատ պայմանավորված է, ապա "փոքր" գրգռումների դեպքում էլ հակադարձ մատրիցի հաշվման սխալը մեծ է լինում:

Քննարկենք $Ax=b$ համակարգի կայունությունը ըստ A մատրիցի և դիտարկենք $(A+\Delta A)\tilde{x}=b$ համակարգը, որտեղ $\tilde{x}=x+\Delta x$: Հաշվի առնելով վերևում ստացված գնահատականը, ունենք

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{||A^{-1}\Delta A||}{1-||A^{-1}\Delta A||} \leq \frac{k(A)}{1-k(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \frac{||\Delta A||}{||A||}:$$

Օրինակ 249. Դիտարկենք վատ պայմանավորված համակարգ:

$$x_1+x_2=-3$$
$$x_1+1.016x_2=5,$$

որի ճշգրիտ լուծումն է $x_1=-503$, $x_2=500$: Կլորացնենք 1.016 թիվը ստորակետից հետո երկրորդ նիշի ճշտությամբ և դիտարկենք

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-3 \\ x_1+1.02x_2&=5 \end{aligned}:$$

Այս համակարգի լուծումն է $x_1=-403$, $x_2=400$: Սկզբնական տվյալների փոքր փոփոխությունը (0.004) առաջացրեց պատասխանի հսկայական փոփոխություն: •

Պարզենք, թե ինչպես են իրար հետ կապված մատրիցի որոշիչը և պայմանավորվածության թիվը:

Օրինակ 250. Դիտարկենք հետևյալ $(n\times n)$ կարգի մատրիցը

$$A_n=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}:$$

Չնայած, որ $det(A_n) = 1$, բայց $k_\infty(A) = n2^{n-1}$ և մատրիցի չափսերի մեծացման հետ միասին շատ արագ մեծանում է: Սա նշանակում է, որ $A_n x = b$ համակարգն ունի միակ լուծում, սակայն մեծ n-րի դեպքում այդ լուծումը կգտնվի բավական մեծ սխալով: Մեծ n-րի դեպքում A_n մատրիցը վատ պայմանավորված մատրից է:•

Օրինակ 251. Դիտարկենք հետևյալ սկալյար մատրիցը

$$A_n = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon \end{pmatrix} :$$

Այս դեպքում $det(A_n) = \varepsilon^n$, սակայն $k_p(A_n) = 1$: •

Քննարկենք $Ax = b$ համակարգի կայունությունը ըստ b վեկտորի և դիտարկենք $A\tilde{x} = b + \Delta b$ համակարգը, որտեղ $\tilde{x} = x + \Delta x$: Ունենք

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b,$$

որտեղից

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||\ ||\Delta b|| :$$

Մյուս կողմից

$$||b|| \leq ||A||\ ||x||,$$

$$||\Delta x||\ ||b|| \leq ||A||\,||A^{-1}||\,||x||\,||\Delta b||,$$

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq k(A)\frac{||\Delta b||}{||b||} :$$

---

535. Դիցուք A-ն $(m \times n)$ և B-ն $(n \times p)$ կարգի մատրիցներ են: Հաշվել, թե քանի գումարում-հանում և բազմապատկում-բաժանում կպահանջվի AB արտադրյալը հաշվելու համար:

536. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: Հաշվել, թե քանի գումարում-հանում և բազմապատկում-բաժանում կպահանջվի A^k մատրիցը հաշվելու համար:

537. Հետևյալ համակարգերը լուծել վերևում նշված չորս տարբեր եղանակներով: Յուրաքանչյուր դեպքում հաշվել կատարված գումարում-հանումների և բաժանում-բազմապատկումների քանակությունը: Ստացված թվերը համեմատել աղյուսակում ներկայացված թվերի հետ

ա) $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - 2x_2 = 4,$

բ) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 3x_3 = 2$
$x_1 - x_2 - x_3 = -1:$

538. Հետևյալ համակարգերի համար կրկնել օրինակ 248-ը

ա) $1.21x + 16.7y = 28.8$
$4.66x + 64.4y = 111.0,$

բ) $14.4x - 17.1y = 31.5$
$81.6x - 97.4y = 179.0,$

գ) $x+4.01y+0.00445z = 0.00$
$-x - 4.00y + 0.00600z = 0.21$
$2x-4.05y+0.05000z = -0.385,$

դ) $0.007x+61.20y+0.093z = 61.3$
$4.810x - 5.92y + 1.110z = 0.0$
$81.400x+1.12y+1.180z = 83.7:$

539. Հաշվել A մատրիցի $k_{\ell_2}(A), k_{\ell_\infty}(A), k_2(A), k|_\infty(A)$ պայմանավորվածության թվերը

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$ **բ)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$

540. Հետևյալ վատ պայմանավորված համակարգերը լուծել Գաուսի արտաքսման եղանակով: Բոլոր միջանկյալ արդյունքները կլորացնել ստորակետից հետո երեք նիշի ճշտությամբ: Պատասխանները համեմատել ճշգրիտ լուծումների հետ

ա) $x + y = 2$
$x + \frac{600}{601}y = 20,$

բ) $x - \frac{800}{801}y = 10$
$-x + y = 50:$

Դիտարկենք հետևյալ A մատրիցը

In[1]:=
```
A = {{1/2, 0, -.1}, {.1, .1, 0}, {0, -.1, 0}};
A // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Գտնենք A մատրիցի $k_2(A)$ պայմանավորվածության թիվը Linear` Algebra `MatrixManipulations փաթեթի հրամանների օգնությամբ

In[11]:=
```
InverseMatrixNorm[A, 2] Norm[A, 2]
```

Out[11]= 37.9927

$k_2(A)$ թիվը կարելի է միանգամից հաշվել MatrixConditionNumber[A,2] հրամանով

In[12]:=
```
MatrixConditionNumber[A, 2]
```

Out[12]= 37.9927

37. ՄԱՏՐԻՑԻ LU-ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Քննարկենք գծային հավասարումների համակարգի լուծման ուղիղ մեթոդներից մեկը, որի հիմքում ընկած է մատրիցի LU-վերլուծությունը:

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: A մատրիցի LU-վերլուծություն են անվանում

$$A = LU$$

ներկայացումը, որտեղ L-ը ստորին (Lower) եռանկյունաձև, իսկ U-ն վերին (Upper) եռանկյունաձև մատրիցներ են:

Օրինակ 252. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} :$$

Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն համոզվել, որ այս դեպքում

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} : \bullet$$

Դիտարկենք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ

$$Ax = b :$$

Ենթադրենք, որ ինչ-որ եղանակով գտնվել է A մատրիցի $A = LU$ վերլուծությունը: Այդ դեպքում համակարգի լուծումը համարժեք է եռանկյուն մատրիցներով երկու համակարգերի լուծման

$$Ly = b \qquad Ux = y :$$

Այս համակարգերի լուծումը դժվար չէ և պահանջում է $\sim 2n^2$ թվաբանական գործողություններ: Հիմնական դժվարությունն այստեղ տրված A մատրիցի LU-վերլուծությունը գտնելն է:

Նկարագրենք A մատրիցի LU վերլուծությունը գտնելու մի եղանակ: Կազմենք $(A|E)$ համակցված մատրիցը: Տարրական տողային ձևափոխություններով (առանց տողերի տեղափոխման) այն բերենք $(U|V)$ տեսքի, եթե դա հնարավոր է, որտեղ U-ն վերին եռանկյունաձև մատրից է, իսկ V-ն՝ ստորին եռանկյունաձև: Այս ձևափոխությունը համարժեք է $Ax = b$ համակարգը $Ux = Vb$ համակարգին ձևափոխելուն: Եթե գոյություն ունի V-ի հակադարձը (նույնպես ստորին եռանկյունաձև), ապա նշանակելով $L = V^{-1}$, կստանանք պահանջվող վերլուծությունը: Օրինակով ցույց տանք, թե ինչպես նկարագրված եղանակով կարելի է ստանալ մատրիցի LU-վերլուծությունը և լուծել գծային հավասարումների համակարգ:

Օրինակ 253. Դիտարկենք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Կազմենք $(A|E)$ մատրիցը

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

և այն ձևափոխենք $(U|V)$ տեսքի: Երկրորդ տողից հանենք առաջինը և վերջին տողից հանենք առաջինի կրկնապատիկը

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right):$$

Վերջին տողից հանենք երկրորդի եռապատիկը

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right),$$

որտեղից

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}:$$

Նշանակելով $L = V^{-1}$ կստանանք պահանջվող վերլուծությունը

$$L = V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

Այսպիսով

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}:$$

Դիտարկենք $Ax = b$ համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} :$$

Կարելի է օգտվել արդեն ստացված $A = LU$ վերլուծությունից, սակայն ավելի ձեռնտու է օգտվել $Ux = Vb$ համակարգից: Լուծելով ստացված եռանկյունաձև համակարգը կստանանք

$$x_1 = \frac{7}{3}, \; x_2 = -1, \; x_3 = \frac{2}{3} : \bullet$$

Ոչ բոլոր մատրիցներն ունեն LU վերլուծություն:

Օրինակ 254. Եթե

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցն ունենա

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

ներկայացում, ապա $l_{11}u_{11} = 0$ պայմանից կհետևի, որ L կամ U մատրիցներից որևէ մեկը հակադարձելի չէ, ինչը հակասում է A մատրիցի հակադարձելիությանը:•

Թեորեմ 108. Դիցուք $A \in M_{n,n}$ և $rang(A) = k$: Եթե $M^{1,2\cdots,j}_{1,2,\cdots,j}$, $j = \overline{1,k}$ անկյունային մինորները զրոյից տարբեր են, ապա A մատրիցի համար հնարավոր է իրականացնել LU-վերլուծությունը:

Տրված մատրիցը կարող է ունենալ LU վերլուծություն, սակայն չբավարարել թեորեմ 108-ի պայմաններին:

Օրինակ 255. Հետևյալ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցն ունի

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

վերլուծություն, չնայած $rang(A) = 1$ և A մատրիցի առաջին գլխավոր մինորը զրոյական է: Կարելի է ցույց տալ, որ այստեղ $A = LU$ վերլուծությունը միակը չէ: •

Այսպիսով, տրված մատրիցը կարող է ունենալ կամ չունենալ LU վերլուծություն: Ունենալու դեպքում էլ այդ վերլուծությունը կարող է միակը չլինել:

Թեորեմ 109. Դիցուք $A \in M_{n,n}$ մատրիցը հակադարձելի է: A մատրիցն ունի LU վերլուծություն այն և միայն այն դեպքում, եթե $M_{1,2,\cdots,j}^{1,2\cdots,j}$, $j = \overline{1,n}$ անկյունային մինորները զրոյական չեն: Վերլուծությունը միակն է, եթե L կամ U մատրիցներից մեկի անկյունագծային տարրերը մեկեր են:

Օրինակ 253-ի A մատրիցը բավարարում է թեորեմ 109-ի պայմաններին:

Գտնենք փոփոխականների արտաքսման և մատրիցի LU-վերլուծության կապը:

Դիցուք $x \in R^m$ և $x_k \neq 0$: Նշանակենք

$$\tau_i = \frac{x_i}{x_k},\ i = \overline{k+1,m},\ t^{(k)} = (\underbrace{0,\cdots,0}_{k},\tau_{k+1},\cdots,\tau_m)^T$$

և

$$M_k = E - t^{(k)} e_k^T,$$

որտեղ e_k տարրը R^m գծային տարածության տիպային բազիսի k-րդ տարրն է:

M_k մատրիցն անվանում են *Գաուսի մատրից*, $t^{(k)}$ տարրի $\tau_{k+1}, \cdots, \tau_m$ կոորդինատները՝ *Գաուսի բազմապատիկներ*, իսկ $t^{(k)}$ տարրը՝ *Գաուսի վեկտոր:*

M_k մատրիցով իրականացվող

$$M_k x = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -\tau_{k+1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & -\tau_m & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ձևափոխությունն անվանում են *Գաուսի ձևափոխություն:*

Փաստորեն, մատրիցը սեղանաձև տեսքի բերելը՝ Գաուսի ձևափոխությունների հաջորդական կիրառությունն է:

Օրինակ 256. Գաուսի ձևափոխությամբ գտնել

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

մատրիցի LU վերլուծությունը:

Ունենք

$$M_1 = E - t^{(1)}e_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4/2 \\ -2/2 \end{pmatrix}(1 \quad 0 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = E - t^{(2)}e_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}(0 \quad 1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = M_2M_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից

$$A = M_1^{-1}M_2^{-1}U = LU, \; L = M_1^{-1}M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}: \bullet$$

Դիցուք թեորեմ 109-ի պայմանները բավարարված են: Սա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի M_k, $k = \overline{1, n-1}$ Գաուսի մատրիցներ, որ

$$M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_2A = U$$

մատրիցը վերին եռանկյունաձև է: Եթե ընդունենք, որ $L = M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$, կստանանք A մատրիցի LU վերլուծությունը: Նկատենք, որ այս եղանակով ստացված L մատրիցի գլխավոր անկյունագծի տարրերը մեկեր են, իսկ M_k մատրիցի հակադարձը կարելի է հաշվել

$$M_k^{-1} = E + t^{(k)} e_k^T$$

բանաձևով:

Եթե A մատրիցը հակադարձելի է և նրա գլխավոր մինորներից որևէ մեկը զրոյական է, ապա $A = LU$ վերլուծությունը հնարավոր չէ իրականացնել: Սակայն այդ դեպքում կարելի է ստանալ $\tilde{A}$ մատրիցի LU վերլուծությունը, որը ստացվում է A մատրիցից տողերի տեղափոխմամբ:

Սահմանում 56. $P \in M_{n,n}$ մատրիցը կանվանենք ***տեղափոխման մատրից***, եթե այն ստացվում է միավոր մատրիցից տողերի տեղափոխմամբ:

Օրինակ 257. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

P մատրիցը տեղափոխման մատրից է, քանի որ այն ստացվել է միավոր մատրիցի տողերի տեղափոխումից:

Եթե P մատրիցը ձախից բազմապատկենք A-ին, ապա A մատրիցի տողերը կտեղափոխվեն այն նույն կարգով, որը պետք է կատարել միավոր մատրիցից P-ն ստանալու համար: Նկատենք, որ P մատրիցը կարելի է ստանալ նաև միավոր մատրիցի սյուների տեղափոխմամբ: Եթե P մատրիցը աջից բազմապատկենք A մատրիցին, ապա նույն կարգով կտեղափոխվեն A մատրիցի սյուները

$$PA = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad AP = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}: \bullet$$

Թեորեմ 109. Եթե $A \in M_{n,n}$ և $det(A) \neq 0$,ապա կգտնվի այնպիսի $P \in M_{n,n}$ տեղափոխման մատրից, որ

$$PA = LU:$$

Օրինակ 258. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի համար հնարավոր չէ իրականացնել LU վերլուծություն: Տեղափոխենք A-ի առաջին և երկրորդ տողերը

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

և գտնենք ստացված մատրիցի LU վերլուծությունը

$$M_1 = E - t^{(1)} e_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad 0 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_1 PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \ M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ M_2 M_1 PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Հետևաբար

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$PA = LU : \bullet$$

Թեորեմ 110. Եթե $A \in M_{n,n}$, ապա կգտնվեն այնպիսի $P, Q \in M_{n,n}$ տեղափոխման մատրիցներ, որ

$$PAQ = LU:$$

Ամփոփելով, կարելի է ասել, որ Գաուսի փոփոխականների արտաքսման եղանակը, ըստ էության, LU մեթոդ է:

---

541. Ստուգել, որ A մատրիցի համար ճիշտ է $A = LU$ վերլուծությունը, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

բ) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$

542. Ցույց տալ, որ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցը չունի LU վերլուծություն:

543. Ցույց տալ, որ եթե $a \neq 0$, ապա $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ մատրիցն ունի միակ LU-վերլուծություն, որտեղ L-ի գլխավոր անկյունագիծը կազմված է միայն մեկերից: Գտնել այդ LU-վերլուծությունը:

544. Լուծել

$$3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3$$

$$2x_1 + 6x_3 = -22$$

$$-4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3$$

համակարգը, եթե հայտնի է

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

545. Լուծել համակարգը

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$:

546. Լուծել համակարգը

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

547. Հաշվել հետևյալ մատրիցների LU-վերլուծությունները

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

548. Փորձել հաշվել $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ մատրիցի LU-վերլուծությունը:

Կարելի՞ է A մատրիցի տողերն այնպես փոխել, որ դա հնարավոր լինի:

549. Օգտվելով Գաուսի ձևափոխությունից գտնել հետևյալ մատրիցների LU վերլուծությունը ա) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$,   բ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ։

550. Տրված A մատրիցի համար գտնել համապատասխան տեղափոխման P մատրիցը և PA մատրիցի LU վերլուծությունը

ա) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,   բ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,   գ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ։

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Ներմուծենք հետևյալ մատրիցը

```
In[1]:= m = {{1, 1, 3}, {2, 1, 4}, {2, 2, 5}};
        m // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
        1  1  3
        2  1  4
        2  2  5
```

m մատրիցի LU-վերլուծությունը կարելի է հաշվել $LUDecomposition[m]$ հրամանով:

```
In[3]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[m]

Out[3]= {{{1, 1, 3}, {2, -1, -2}, {2, 0, -1}}, {1, 2, 3}, 1}
```

Ստացված վեկտորի երկրորդ տարրը ցույց է տալիս տողերի տեղափոխությունները: Այս օրինակում տեղափոխություններ չեն կատարվել: Դա նշանակում է, որ տրված մատրիցն ունի LU-վերլուծություն: L և U մատրիցները վերականգնելու համար պետք է օգտվել լրացուցիչ LinearAlgebra`MatrixManipulation` փաթեթի $LUMatrices[lu]$ հրամանից, որտեղ lu-ն արդեն ունենք

```
In[4]:= << LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
        {L, U} = LUMatrices[lu];
        {"L=" (L // MatrixForm), "U=" (U // MatrixForm),
         "LU=" (L.U // MatrixForm)}
```

Out[6]= $\left\{L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix},\ LU=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&4\\2&2&5\end{pmatrix}\right\}$

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը, որը նախկինից տարբերվում է տողերի տեղափոխությամբ

```
In[7]:= m = {{1, 1, 3}, {2, 2, 5}, {2, 1, 4}};
        m // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&5\\2&1&4\end{pmatrix}$$

Հաշվենք LU-վերլուծությունը

```
In[9]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[m]

Out[9]= {{{1, 1, 3}, {2, -1, -2}, {2, 0, -1}}, {1, 3, 2}, 1}
```

Ստացված վեկտորի երկրորդ կոորդինատը ցույց է տալիս, որ LU-վերլուծություն իրականացնելու համար տեղափոխվել են երկրորդ և երրորդ տողերը: Վերականգնենք L, U, LU մատրիցները

```
In[10]:= {L, U} = LUMatrices[lu];
         {"L=" (L // MatrixForm), "U=" (U // MatrixForm),
          "LU=" (L.U // MatrixForm)}
```

Out[11]= $\left\{L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix},\ LU=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&4\\2&2&5\end{pmatrix}\right\}$

Ինչպես տեսնում ենք LU մատրիցը m-ից տարբերվում է երկրորդ և երրորդ տողերի տեղափոխությամբ:

LU վերլուծությունը առանձնապես հարմար է, եթե հարկավոր է լուծել մեծ քանակությամբ համակարգեր, որոնք տարբերվում են աջ մասերով: Դիտարկենք հետևյալ համակարգերը, որոնց գործակիցներից կազմված մատրիցը նախկինում դիտարկված m մատրիցն է

$$mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad mx = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad mx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Համակարգերը լուծելու համար նախ իրականացվում է LU-վերլուծություն, այնուհետև $LUBackSubstitution$ հրամանի օգնությամբ իրականացվում է հետընթաց տեղադրում

```
In[12]:= lud = LUDecomposition[m];
         x1 = LUBackSubstitution[lud, {1, 2, 3}];
         x2 = LUBackSubstitution[lud, {-1, 2, 3}];
         x3 = LUBackSubstitution[lud, {0, 1, 4}];
         {"x1=" (x1 // MatrixForm), "x2=" (x2 // MatrixForm),
          "x3=" (x3 // MatrixForm)}
```

Out[16]= $\left\{x1= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x2= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ x3= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Իհարկե, այս օրինակի համար, երբ համակարգերը ընդհամենը երեքն են և պարունակում են քիչ թվով անհայտներ, առանձնապես էական չէ լուծման եղանակը: Սակայն LU-վերլուծությունը կբերի ժամանակի էական խնայողության, եթե համակարգերը շատ են և պարունակում են մեծ քանակությամբ անհայտներ:

38.ՄԱՏՐԻՑԻ QR ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք A-ն $(n \times m)$ կարգի մատրից է, $n \geq m$, $rang(A) = m$, իսկ $v_1, v_2, \cdots, v_m$-ը A մատրիցի սյուներն են: $\{v_1, \cdots, v_m\}$ գծորեն անկախ համախմբի նկատմամբ կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը, որի արդյունքում ստացված օրթոնորմավորված համախումբը նշանակենք $u_1, u_2, \cdots, u_m$-ով: Եթե Q-ով նշանակենք $u_1, \cdots, u_m$ օրթոնորմավորված սյուներ ունեցող մատրիցը, իսկ R-ով ձևափոխության գործակիցներից կազմված վերին եռանկյունաձև մատրիցը, ապա կարելի է գրել

$$A = (v_1 \ v_2 \ \cdots v_m) =$$

$$= (u_1 \ u_2 \cdots u_m) \begin{pmatrix} (v_1, u_1) & (v_2, u_1) & \cdots & (v_m, u_1) \\ 0 & (v_2, u_2) & \cdots & (v_m, u_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (v_m, u_m) \end{pmatrix} = QR.$$

A մատրիցի ստացված վերլուծությունն անվանում են *QR-վերլուծություն* ($Q^TQ = E$): Եթե $m = n$, ապա Q մատրիցը օրթոգոնալ մատրից է ($Q^TQ = QQ^T = E$):

Օրինակ 259. Հետևյալ մատրիցների համար իրականացնենք QR վերլուծությունը

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, **բ)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

ա) Դիտարկենք հետևյալ գծորեն անկախ համախումբը

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

Կիրառենք Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակը

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \ u_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \ u_3 = (0, 0, 1)^T,$$

որտեղից

$$Q = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R=\begin{pmatrix}(v_1,u_1)&(v_2,u_1)&(v_3,u_1)\\0&(v_2,u_2)&(v_3,u_2)\\0&0&(v_3,u_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&2\end{pmatrix}:$$

Ընթերցողին ենք թողնում ստուգումը, որ Q-ն օրթոգոնալ մատրից է և $A = QR$:

բ) Այս դեպքում

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{39}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{39}}\\0&0&2\sqrt{\frac{3}{13}}\\0&\sqrt{\frac{2}{3}}&-\frac{1}{\sqrt{39}}\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{\frac{3}{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\sqrt{\frac{13}{3}}\end{pmatrix}:$$

$$Q^TQ=E,\qquad QQ^T\neq E:\bullet$$

Թեորեմ 111. Եթե A-ն $(n\times m)$ կարգի մատրից է, $n\geq m$ և $rang(A)=m$, ապա A մատրիցի համար տեղի ունի $A=QR$ վերլուծությունը, որտեղ Q-ն օրթոնորմավորված սյուներով մատրից է, իսկ R-ը վերին եռանկյունաձև է: Եթե $m=n$, ապա Q-ն օրթոգոնալ մատրից է:

Օրինակ 260. QR վերլուծությունն իրականացնենք հետևյալ A մատրիցի համար, որի սյուները գծորեն կախված են

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}:$$

Ինչպես և նախորդ օրինակում

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\sqrt{\frac{2}{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{6}\\0&\frac{2}{\sqrt{3}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}:$$

Այստեղ, սակայն
$$Q^TQ \neq E,$$
քանի որ Q մատրիցի սյուները օրթոնորմալ չեն: Իրավիճակը կարելի է շտկել, եթե անտեսենք Q մատրիցի վերջին սյունը և R մատրիցի վերջին տողը
$$A = \tilde{Q}\tilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} :$$
Այստեղ արդեն
$$\tilde{Q}^T\tilde{Q} = E : \bullet$$

Մատրիցի QR վերլուծությունը հարմար է
$$Ax = b$$
համակարգի լուծման համար: Իսկապես, ենթադրենք հայտնի է $A = QR$ վերլուծությունը
$$QRx = b :$$
Այժմ համակարգի երկու կողմը ձախից բազմապատկենք Q^T-ով և հաշվի առնենք, որ $Q^TQ = E$
$$Rx = Q^Tb :$$
Այսպիսով, եթե A մատրիցի QR վերլուծությունը հայտնի է, ապա $Ax = b$ համակարգի լուծման բարդությունը համարժեք է եռանկյունաձև համակարգ լուծելուն:

Օրինակ 261. Լուծենք $Ax = b$ համակարգը, որտեղ
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$
Հաշվի առնելով վերևում ստացված $A = QR$ վերլուծությունը կլուծենք $Rx = Q^Tb$ եռանկյունաձև համակարգը,որտեղից $x = (1,0,0)^T$:•

Մատրիցի QR վերլուծությունը հարմար է նաև համակարգի անիսկական լուծումների որոնման համար: Դիցուք $A = QR$ վերլուծությունը հայտնի է և պահանջվում է գտնել $Ax = b$ համակարգի անիսկական լուծումը: Այսինքն հարկավոր է լուծել

$$A^T Ax = A^T b :$$

Այստեղից

$$R^T Q^T QRx = R^T Q^T b$$

Հաշվի առնելով, որ $Q^T Q = E$, կստանանք

$$R^T Rx = R^T Q^T b$$

համակարգը: Ստացված համակարգի լուծումը իրենից դժվարություն չի ներկայացնում, քանի որ R մատրիցը վերին եռանկյունաձև է:

Օրինակ 262. Գտնենք $Ax = b$ համակարգի անիսկական լուծումը, եթե

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Հաշվի առնելով $A = QR$ վերլուծությունը կստանանք $R^T Rx = R^T Q^T b$ համակարգը, որտեղից $x = (0, \frac{7}{13}, \frac{5}{13})^T$: ●

Թեորեմ 112. Դիցուք A-ն $(n \times m)$ կարգի մատրից է, $n \le m$ և $rang(A) = n$: Ապա A մատրիցի համար տեղի ունի $A = LQ$ վերլուծությունը, որտեղ Q-ն օրթոնորմավորված տողերով մատրից է, իսկ L-ը ստորին եռանկյունաձև է: Եթե $m = n$, ապա Q-ն օրթոգոնալ մատրից է:

Նկարագրենք մատրիցի QR-վերլուծության ստացման ***Գիվենսի եղանակը:***

$$G(i,k) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\quad i & \qquad\quad k \qquad\qquad \end{matrix} & \end{array}$$

$(n \times n)$ կարգի մատրիցն անվանում են *Գիվենսի մատրից*, որտեղ $c = \cos\theta, s = \sin\theta$: Ակնհայտ է, որ Գիվենսի մատրիցը օրթոգոնալ մատրից է:

Ցույց տանք թե ինչպես կարելի է Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ զրոյացնել տրված վեկտորի k-րդ կոորդինատը: Դիցուք

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; y = (G(i,k))^T x :$$

Այստեղից

$$y = (x_1, \cdots, x_{i-1}, cx_i - sx_k, x_{i+1}, \cdots, x_{k-1}, sx_i + cx_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)^T :$$

Տեղադրելով

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, \; s = \frac{-x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$$

կստանանք, որ $y_k = 0$:

Օրինակ 263. Դիցուք $x = (2, 6, -3)^T$: Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ զրոյացնենք x տարրի վերջին կոորդինատը:

Ունենք

$$k = 3, \; i = 2, \quad c = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, s = \frac{-x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$G(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \; (G(2,3))^T \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ կարելի է ստանալ տրված A մատրիցի QR վերլուծությունը: Եթե, օրինակ $A \in M_{4,3}$, ապա QR վերլուծությունը ստացվում է հետևյալ սխեմայով

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(G_1(3,4))^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(G_2(2,3))^T}$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(G_3(1,2))^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(G_4(3,4))^T}$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{(G_5(2,3))^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(G_6(3,4))^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R :$$

Այսինքն

$$G_6(3,4))^T G_5(2,3))^T G_4(3,4))^T$$

$$G_3(1,2))^T G_2(2,3))^T G_1(3,4))^T A = R :$$

Այստեղից, Q օրթոգոնալ մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը

$$Q = G_1(3,4) G_2(2,3) G_3(1,2) G_4(3,4) G_5(2,3) G_6(3,4) :$$

Օրինակ 264. Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ ստանալ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի QR վերլուծությունը:

Զրոյացնենք A մատրիցի a_{31} տարրը: Օրինակ 1-ի համաձայն

$$G_1(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

և

$$A_1 = (G_1(2,3))^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3\sqrt{5} & \frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} :$$

Զրոյացնենք A_1 մատրիցի a_{21} տարրը

$$c = \frac{2}{\sqrt{4+45}} = \frac{2}{7}, \quad s = -\frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$G_2(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{3}{7}\sqrt{5} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = (G_2(1,2))^T A_1 = \begin{pmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{6}{35}\sqrt{5} & -\frac{13}{35}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} :$$

Զրոյացնենք A_2 մատրիցի a_{32} տարրը

$$c = \frac{3}{205}\sqrt{205}, \quad s = -\frac{14}{205}\sqrt{205},$$

$$G_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{205}\sqrt{205} & -\frac{14}{205}\sqrt{205} \\ 0 & \frac{14}{205}\sqrt{205} & \frac{3}{205}\sqrt{205} \end{pmatrix},$$

$$R = (G_3(2,3))^T A_2 = \begin{pmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{41} & -\frac{47}{287}\sqrt{41} \\ 0 & 0 & \frac{4}{41}\sqrt{41} \end{pmatrix} :$$

Գտնենք Q օրթոգոնալ մատրիցը

$$Q = G_1(2,3)G_2(1,2)G_3(2,3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{9}{287}\sqrt{41} & \frac{6}{41}\sqrt{41} \\ \frac{6}{7} & \frac{22}{287}\sqrt{41} & -\frac{1}{41}\sqrt{41} \\ -\frac{3}{7} & \frac{38}{287}\sqrt{41} & \frac{2}{41}\sqrt{41} \end{pmatrix} : \bullet$$

Նկարագրենք մատրիցի QR-վերլուծության ստացման *Հաուսհոլդերի եղանակը:*

Դիցուք $v \in R^n$ և $v \neq o$:

$$H = E - 2\frac{vv^T}{(v^T, v)}$$

մատրիցն անվանում են *Հաուսհոլդերի մատրից*, իսկ v-ն՝ *Հաուսհոլդերի վեկտոր:*

Հաուսհոլդերի մատրիցը սիմետրիկ է և օրթոգոնալ:

Թեորեմ 113. Դիցուք $x \in R^n$ և $v = x \pm ||x||e_1$, ապա Hx տարրի բոլոր կոորդինատները, բացի առաջինից, հավասար են զրոյի:

Օրինակ 265. Հաուսհոլդերի մատրիցի օգնությամբ զրոյացնել $x = (2, 6, -3)^T$ տարրի երկրորդ և երրորդ կոորդինատները: Համաձայն թեորեմ 1-ի

$$v = x \pm ||x||e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \pm 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Աշխատենք + նշանով

$$v = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ H = E - \frac{2}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} :$$

Այստեղից

$$Hx = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \bullet$$

Հաուսհոլդերի մատրիցի օգնությամբ կարելի է ստանալ տրված մատրիցի QR վերլուծությունը: Եթե, օրինակ $A \in M_{5,4}$, ապա QR վերլուծությունը ստացվում է հետևյալ եղանակով: Ենթադրենք, որ H_1, H_2 Հաուսհոլդերի մատրիցները գտնված են այնպես, որ

$$H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \nwsearrow & \times \\ 0 & 0 & \nwsearrow & \times \\ 0 & 0 & \nwsearrow & \times \end{pmatrix}:$$

Գտնենք H_3 Հաուսհոլդերի մատրիցն այնպես, որ

$$\tilde{H}_3 \begin{pmatrix} \nwsearrow \\ \nwsearrow \\ \nwsearrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Նշանակելով $H_3 = diag(E, \tilde{H}_3)$ կստանանք

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \nwsearrow \\ 0 & 0 & 0 & \nwsearrow \end{pmatrix}:$$

Գտնենք $\tilde{H}_4$ Հաուսհոլդերի մատրիցն այնպես, որ

$$\tilde{H}_4 \begin{pmatrix} \nwsearrow \\ \nwsearrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ 0 \end{pmatrix}:$$

Նշանակելով $H_4 = diag(E, \tilde{H}_4)$ կստանանք

$$H_4 H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R:$$

Ընդունելով
$$Q = H_1 H_2 H_3 H_4$$
կստանանք
$$QR = H_1 H_2 H_3 H_4 H_4 H_3 H_2 H_1 A = A :$$

Օրինակ 266. Հաուսհոլդերի մատրիցի օգնությամբ գտնել
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
մատրիցի QR վերլուծությունը:

Նախորդ օրինակում մենք ստացել ենք այն H_1 Հաուսհոլդերի մատրիցը, որը զրոյացնում է $x = (2, 6, -3)^T$ տարրի վերջին երկու կոորդինատները
$$H_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \; H_1 A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -49 & -15 & -5 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} :$$
Դիտարկենք $x = (4, -2)^T$ տարրը: Ունենք
$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \sqrt{20}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix},$$
որտեղից
$$\tilde{H}_2 = E - 2\frac{vv^T}{(v^T, v)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$
$$H_2 = diag(E, \tilde{H}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$
$$R = H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{7} & -\frac{13\sqrt{5}}{35} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

$$Q = H_1H_2 = \frac{\sqrt{5}}{30}\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & -15 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 4 & -7 \\ 3\sqrt{5} & -2 & -14 \end{pmatrix} : \bullet$$

Որոշ լրացուցիչ պայմանների առկայության դեպքում QR վերլուծության օգնությամբ կարելի է գտնել $A \in M_{n,n}$ մատրիցի սեփական արժեքները: Դա արվում է այսպես. գտնում են A մատրիցի $A = QR$ վերլուծությունը և կազմում են $A_1 = RQ$ մատրիցը, գտնում են A_1 մատրիցի $A_1 = Q_1R_1$ վերլուծությունը և կազմում են $A_2 = R_1Q_1$, այսպես շարունակելով կստանանք A_k մատրիցների հաջորդականություն, որը լրացուցիչ պայմանների դեպքում կձգտի վերին եռանկյունաձև մատրիցի, երբ $k \to \infty$, որի գլխավոր անկյունագծի տարրերն էլ կլինեն A մատրիցի սեփական արժեքները: Այս ալգորիթմը կաշխատի, եթե օրինակ, A մատրիցն ունի իրական և մոդուլով իրարից տարբեր սեփական արժեքներ:

---

551. Գտնել հետևյալ մատրիցների QR վերլուծությունները

ա) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

552. Հաշվել A մատրիցի QR-վերլուծությունը և լուծել $Ax = b$ համակարգը, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,

դ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 14 \\ 6 & 8 & 7 \\ 3 & -24 & -7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ե) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & -7 \\ 2 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$:

553. Գտնել A մատրիցի QR վերլուծությունը և $Ax = b$ համակարգի անիսկական լուծումները, եթե

ա) $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 \\ 6 & -14 & -1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

բ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

գ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 6 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

554. Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ զրոյացնել $x = (-3, 1, -5, 1)^T$ տարրի երկրորդից մինչև չորրորդ կոորդինատները:

555. Գիվենսի մատրիցի օգնությամբ գտնել հետևյալ մատրիցների QR վերլուծությունը

ա) $\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 12 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -4/2 & -1 \end{pmatrix}$:

556. Հաուսհոլդերի մատրիցի օգնությամբ զրոյացնել $x = (-3, 1, -5, 1)^T$ տարրի երկրորդից մինչև չորրորդ կոորդինատները:

557. Հաուսհոլդերի մատրիցի օգնությամբ գտնել հետևյալ մատրիցների QR վերլուծությունը

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$:

558. QR վերլուծության օգնությամբ գտնել հետևյալ մատրիցների սեփա-կան արժեքները

$$\text{ա)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{բ)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$$

MATHEMATICA-Ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

Տրված m մատրիցի QR վերլուծությունը կարելի է իրականացնել

$$QRDecomposition[m]$$

հրամանով, որը վերադարձնում է երկու մատրից՝ Q և R, որտեղ Q-ն ունի օրթոնորմալ տողեր, իսկ R-ը վերին եռանկյունաձև մատրից է և $m = Q^T R$: Իրականացնենք այդ հրամանը հետևյալ մատրիցի համար

In[1]:=
```
mat = {{1, 2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 3, 0}};
{Q, R} = QRDecomposition[mat];
{Q // MatrixForm, R // MatrixForm}
```

Out[3]=

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & 2\sqrt{\frac{2}{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\sqrt{\frac{2}{7}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} & \sqrt{\frac{6}{7}} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\frac{2}{7}} \end{pmatrix}\right\}$$

Ստուգենք, որ Q մատրիցը օրթոգոնալ է

In[4]:=
```
(Q.Transpose[Q] // Simplify) =
  (Transpose[Q].Q // Simplify) == IdentityMatrix[3]
```

Out[4]=
```
True
```

Ստուգենք պատասխանը

```
In[5]:= Transpose[Q].R // Simplify

Out[5]= {{1, 2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 3, 0}}
```

QR վերլուծության օգնությամբ գտնենք հետևյալ համակարգի անիսկական լուծումը

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1\\
-x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2\\
x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1\\
3x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Ստուգենք, որ համակարգն անհամատեղելի է

```
In[6]:= mat = {{2, 1, 5}, {-1, -2, -1}, {1, 1, 3}, {3, 1, 4}};
        b = {1, 2, 1, -1};
        LinearSolve[mat, b]

      - LinearSolve ::nosol : Linear equation
          encountered which has no solution . More..

Out[8]= LinearSolve [{{2, 1, 5}, {-1, -2, -1},
          {1, 1, 3}, {3, 1, 4}}, {1, 2, 1, -1}]
```

Համակարգի գործակիցներից կազմված մատրիցի համար իրականացնենք QR վերլուծություն և լուծենք $Rx = Qb$ համակարգը: Նշենք, որ MATHEMATICA փաթեթում $A = Q^T R$ և ոչ թե $A = QR$

```
In[9]:= {Q, R} = QRDecomposition[mat];
        sol = LinearSolve[R, Q.b]
```

Out[10]= $\left\{-\frac{110}{81}, -\frac{61}{81}, \frac{76}{81}\right\}$

Հաշվենք միջին քառակուսային սխալը

```
In[11]:= ((mat.sol - b).(mat.sol - b))^(1/2) // N
Out[11]= 0.3849
```

Նույն անիսկական լուծումը կարելի է ստանալ լուծելով $A^T Ax = A^T b$ համակարգը

```
In[12]:= LinearSolve[Transpose[mat].mat, Transpose[mat].b]
```

Out[12]= $\{-\frac{110}{81}, -\frac{61}{81}, \frac{76}{81}\}$

MATHEMATICA-ի օգնությամբ հաշվենք տրված A մատրիցի սեփական արժեքները կիրառելով QR ալգորիթմը: Դիտարկենք հետևյալ A մատրիցը, որի բոլոր սեփական արժեքներն իրարից տարբեր են

In[1]:= $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ // N;

```
ex = Eigenvalues[A] // N
Out[2]= {14.9901 , 4.72699 , -1.27955 , 0.562502 }
```

Գտնենք A մատրիցի QR վերլուծությունը և կազմենք $A_1 = RQ$ մատրիցը

```
In[3]:= {Q, R} = QRDecomposition[A];
A1 = R.Transpose[Q];
A1 // MatrixForm
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 14.3462 & -6.35272 & 1.24433 & -9.54546 \\ -0.804349 & 1.02188 & 1.59313 & -0.492154 \\ 3.44872 & 2.44035 & 3.1618 & 0.711779 \\ -0.26508 & 0.0323244 & 0.22401 & 0.47017 \end{pmatrix}$$

Գտնենք A_1 մատրիցի $Q_1 R_1$ վերլուծությունը և կազմենք $A_2 = R_1 Q_1$ մատրիցը

```
In[6]:= {Q1, R1} = QRDecomposition[A1];
        A2 = R1.Transpose[Q1];
        A2 // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 15.2496 & -2.34981 & 6.59522 & 7.39778 \\ 0.447856 & 3.58053 & -3.95146 & -1.79938 \\ -0.304886 & -1.17555 & -0.536641 & -1.23854 \\ 0.0131232 & 0.0128796 & 0.189202 & 0.706538 \end{pmatrix}$$

Այսպես շարունակելով կստանանք մատրիցների A_k հաջորդականություն, որը զուգամիտում է վերին եռանկյունաձև մատրիցի: Մեր օրինակում A_{22} մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը

```
In[9]:= Do[{Qk, Rk} = QRDecomposition[Ak];
          Ak+1 = Rk.Transpose[Qk], {k, 2, 21}];
        A22 // MatrixForm
```

Out[10]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 14.9901 & -4.40986 & 5.29842 & 7.74895 \\ 5.37892 \times 10^{-11} & 4.72699 & -2.88671 & -2.05347 \\ -1.51736 \times 10^{-22} & -8.25689 \times 10^{-12} & -1.27955 & -1.69819 \\ 3.65664 \times 10^{-31} & 5.85848 \times 10^{-21} & 1.0638 \times 10^{-8} & 0.562502 \end{pmatrix}$$

A_{22} մատրիցը "համարյա" վերին եռանկյունաձև է և նրա գլխավոր անկյունագծի տարրերը A մատրիցի սեփական արժեքների բավական լավ մոտավորություններն են:

39. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԻՏԵՐԱՑԻՈՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Եթե n անհայտով n հավասարումների գծային համակարգում $n > 100$, ապա որպես կանոն օգտագործում են համակարգերի լուծման *մոտավոր եղանակներ:*

Նկարագրենք *Յակոբիի կամ պարզ իտերացիայի եղանակը:* Դիտարկենք հետևյալ որոշված համակարգը

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

որտեղ $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ անկյունագծային տարրերը զրո չեն և այն արտագրենք հետևյալ տեսքով

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_2 - \cdots - a_{nn}x_n) \end{aligned} \tag{30}$$

կամ մատրիցային տեսքով

$$x = Cx + f, \tag{31}$$

որտեղ

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}:$$

Պարզ իտերացիայի եղանակում համակարգի մոտավոր լուծումը տրվում է $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \cdots$ հաջորդականության տեսքով, որոնք որոշվում են հետևյալ կերպ

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f, \ k = 0, 1, \cdots, \tag{32}$$

որտեղ $x^{(0)}$ տարրը սկզբնական մոտարկումն է: $x^{(k)}$ տարրերն անվանում են ճշգրիտ լուծման մոտարկումներ:

Թեորեմ 114. Եթե (32) իտերացիոն մեթոդը զուգամետ է, ապա այն զուգամիտում է (30) համակարգի լուծմանը:

Թեորեմ 115. Եթե (32) իտերացիոն մեթոդը զուգամետ է, եթե $||C|| < 1$: Այդ դեպքում իտերացիոն մեթոդը զուգամիտում է ճշգրիտ լուծմանը երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:

Թեորեմ 116. Եթե $||C|| < 1$, ապա k-րդ մոտարկման սխալանքի համար տեղի ունի հետևյալ գնահատականը

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||C||^k}{1 - ||B||}||x^{(1)} - x^{(0)}||, \; k = 1, 2 \cdots :$$

Վերջին թեորեմը ապահովում է ալգորիթմական կանգառի հրամանը: Եթե պահանջվում է մոտավոր լուծումը գտնել ε ճշտությամբ, ապա

$$k > \frac{ln\,(M/\varepsilon)}{ln(1/||C||)}, \; M = \frac{||x^{(1)} - x^{(0)}||}{1 - ||C||} :$$

Օրինակ 267. Դիտարկենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Համակարգն արտագրենք հետևյալ տեսքով

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{20} - \frac{1}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3 \\ x_2 &= -\frac{13}{10} + \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_3 \\ x_3 &= \frac{18}{10} + \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 : \end{aligned}$$

Տեղադրենք

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0$$

և հաշվենք x_1, x_2, x_3 փոփոխականների նոր արժեքները

$$x_1 = 0.850, \ x_2 = -1.3, \ x_3 = 1.8:$$

Այս պրոցեսը կրկնենք մի քանի անգամ: Արդյունքները ներկայացված են հետևյալ աղյուսակում, որտեղ հաշվարկները կատարվել են ստորակետից հետո հինգերորդ նիշի ճշտությամբ: Այսպիսով վեց մոտավորություններից հետո գտնվեց ճշգրիտ լուծումը՝ $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$, ստորակետից հետո հինգերորդ նշանի ճշտությամբ: Անմիջական ստուգումով կարելի է համոզվել, որ այս դեպքում գտնվել է ճշգրիտ լուծումը:

	սկզբնական	*առաջին*	*երկրորդ*	*երրորդ*	*չորրորդ*	*հինգերորդ*	*վեցերորդ*
x_1	0	0.850	1.005	1.0025	1.0001	0.99997	1.0000
x_2	0	-1.3	-1.035	-0.9980	-0.99935	-0.99999	-1.0000
x_3	0	1.8	2.015	2.004	2.0000	1.9999	2.0000

•

Դիտարկենք այս եղանակի ձևափոխված տարբերակը, որն անվանում են ***Գաուս-Զեյդելի իտերացիայի եղանակ:*** $x_1, \cdots, x_n$ փոփոխականներին տանք սկզբնական արժեքներ, սակայն դրանք տեղադրենք միայն (30) համակարգի առաջին հավասարման մեջ և հաշվենք x_1 փոփոխականի նոր x_1' արժեքը: $x_1', x_2, x_3, \cdots, x_n$ արժեքները տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ և հաշվենք x_2 փոփոխականի նոր x_2' արժեքը: $x_1', x_2', x_3, \cdots, x_n$ արժեքները տեղադրենք մյուս հավասարման մեջ և այս պրոցեսը շարունակենք մինչև վերջ: Այնուհետև պրոցեսը սկսենք նորից մինչև լուծումը ստանանք պահանջվող նիշերի ճշտությամբ:

Օրինակ 268. Դիտարկենք օրինակ 267-ի համակարգը և այն լուծենք Գաուս-Զեյդելի եղանակով: Սկսենք $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ սկզբնական արժեքներից: արդյունքները ներկայացնենք հետևյալ աղյուսակում, որտեղ հաշվարկները կատարված են ստորակետից հետո հինգերորդ նիշի ճշտությամբ

	սկզբնական	*առաջին*	*երկրորդ*	*երրորդ*	*չորրորդ*
x_1	0	0.850	1.0111	0.99995	1.0000
x_2	0	-1.215	-0.99824	-0.99992	-1.0000
x_3	0	2.0065	2.0009	2.0000	2.0000

Համեմատությունը պարզ իտերացիայի եղանակի հետ ցույց է տալիս, որ Գաուս-Զեյդելի եղանակն ավելի արագ է աշխատում: Այս դեպքում ճշգրիտ լուծումը ստացվեց չորս մոտավորություններից հետո՝ վեցի փոխարեն: •

Ապացուցված է, որ ցանկացած սկզբնական արժեքների դեպքում պարզ իտերացիայի և Գաուս-Զեյդելի եղանակները զուգամիտում են ճշգրիտ լուծմանը, եթե

$$\begin{aligned}
&|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\
&|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\
&\vdots \\
&|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}| :
\end{aligned} \tag{33}$$

Օրինակ 269. Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 12 & -4 \end{pmatrix} :$$

Պարզ է, որ այս մատրիցը նշված հատկությամբ օժտված չէ, սակայն եթե տեղափոխենք երկրորդ և երրորդ տողերը, ապա (33) հատկությունը կվերականգնվի: Սա նշանակում է, որ սկզբնական համակարգի հավասարումների տեղերը փոխելով կարելի է ստանալ այնպիսի համակարգ, որի համար իտերացիոն մեթոդները կզուգամիտեն: •

Իտերացիոն եղանակները հարմար է կիրառել հետևյալ դեպքերում

• եթե համակարգի գործակիցներից շատերը զրո են (ասում են, որ համակարգը նոսր է),

• եթե լուծումը մոտավորապես հայտնի է և փոփոխականների սկզբնական արժեքները կարելի է ճշգրիտ լուծմանը մոտ վերցնել,

• եթե հարկավոր է խնայել համակարգչի հիշողությունը:

---

559. Հետևյալ համակարգերը լուծել Յակոբիի և Գաուս-Զեյդելի իտերացիոն եղանակներով: Հաշվարկները կատարել ստորակետից հետո երեք նիշի ճշտությամբ: Կատարել չորս իտերացիա և համեմատել տարբեր մեթոդներով ստացված պատասխանները ճշգրիտ լուծման հետ: Սկսել $x_1 = x_2 = 0$ սկզբնական արժեքներից

ա) $2x_1 + x_2 = 7$ բ) $3x_1 - x_2 = 5$
$x_1 - 2x_2 = 1,$ $2x_1 + 3x_2 = -4,$
գ) $5x_1 - 2x_2 = -13$ դ) $4x_1 + 0.1x_2 = 0.2$
$x_1 + 7x_2 = -10,$ $0.3x_1 + 0.7x_2 = 1.4$:

560. Պարզել, թե հետևյալ մատրիցներից, ո՞րն է բավարարում (33) պայմանին

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

561. Դիտարկել

$$x_1 + 3x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

համակարգը և ցույց տալ, որ Յակոբիի մեթոդը տարամիտում է: Համակարգի մատրիցը բավարարու՞մ է (33) պայմանին:

562. Ցույց տալ, որ հետևյալ համակարգերը չեն բավարարում (33) պայմանին, սակայն չնայած այդ հանգամանքին Յակոբիի և Գաուս-Զեյդելի եղանակները զուգամիտում են, եթե որպես սկզբնական մոտարկում վերցնենք $(x_1, \cdots, x_n)^T = (0, \cdots, 0)^T$

ա) $-4x_1 + 5x_2 = 1$ բ) $4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + 2x_2 = 3,$ $x_1 - 3x_2 - x_3 = 7$
$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$:

40. ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է: Նրա սեփական արժեքները հաշվելու համար պետք է գտնել

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_0 = 0$$

բնութագրիչ հավասարման արմատները: Սա բավական աշխատատար և սխալների կուտակման նկատմամբ շատ զգայուն խնդիր է և այդ պատճառով ցանկալի է շրջանցել արմատների անմիջական հաշվման խնդիրը:

Սահմանում 57. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է և $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ նրա սեփական արժեքներն են: λ_1 սեփական արժեքն անվանում են *գերակշռող սեփական արժեք*, եթե

$$|\lambda_1| > |\lambda_k|, \ k = 2, \cdots, n :$$

Գերակշռող սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն անվանում են *գերակշռող սեփական վեկտոր:*

Ոչ բոլոր մատրիցներն ունեն գերակշռող սեփական արժեք: Օրինակ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքների $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ համար ունենք $|\lambda_1| = |\lambda_2|$: Նմանապես

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ սեփական արժեքների մեջ նույնպես չկա գերակշռող:

Օրինակ 270. Գտնենք

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

մատրիցի գերակշռող սեփական արժեքն ու վեկտորը:

Բնութագրիչ հավասարման արմատներն են $\lambda_1 = -1$ և $\lambda_2 = -2$: Համաձայն սահմանման գերակշռող է $\lambda_1 = -2$-ը: Նրան համապատասխանող սեփական վեկտորներն են

$$x = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0 : \bullet$$

Նկարագրենք գերակշռող սեփական արժեքն ու սեփական վեկտորը հաշվելու *աստիճանային եղանակը:* Ինչպես և Յակոբիի և Գաուս-Զեյդելի եղանակները սա ևս իտերացիոն եղանակ է: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնենք ցանկացած $x \in R^n$ տարր և հաշվենք հետևյալ աստիճանները

$$x_1 = Ax_0, \ x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \ x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0 :$$

x_k հաջորդականությունը գերակշռող սեփական վեկտորի մոտարկումն է:

Օրինակ 271. Գտնենք նախորդ օրինակում դիտարկված մատրիցի գերակշռող սեփական վեկտորը: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնենք

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

վեկտորը: Ունենք

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2.50 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2.80 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} -64 \\ -22 \end{pmatrix} = -22 \begin{pmatrix} 2.91 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$x_6 = Ax_5 = \begin{pmatrix} 568 \\ 190 \end{pmatrix} = 190 \begin{pmatrix} 2.99 \\ 1.00 \end{pmatrix}:$$

Ամեն մի հաջորդ մոտարկումը ավելի մեծ ճշտությամբ է մոտ նախորդ օրինակում ստացված $(3,1)^T$ սեփական վեկտորին:•

Թեորեմ 117. Եթե x-ը A մատրիցի սեփական վեկտորն է, ապա նրան համապատասխանող սեփական արժեքը տրվում է

$$\lambda = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

հարաբերությամբ: Այս հարաբերությունը անվանում են ***Ռելեի առնչություն:***

Ռելեի առնչությունը հնարավորություն է տալիս նաև ստանալ գերակշռող սեփական արժեքի մոտավորությունները:

Օրինակ 272. Նախորդ օրինակում ստացանք

$$x_6 = 190 \begin{pmatrix} 2.99 \\ 1.00 \end{pmatrix}:$$

Այստեղից $x = (2.99, 1.00)^T$ վեկտորը գերակշռող սեփական արժեքի մոտարկումն է: Ռելեի առնչությունից ունենք

$$Ax = \begin{pmatrix} -6.02 \\ -2.1 \end{pmatrix}, \ (Ax, x) = -20.0, \ (x, x) = 9.94, \ \lambda = -2.01,$$

որը մեզ արդեն հայտնի սեփական արժեքի մոտարկումն է: •

Դիտարկենք աստիճանային մեթոդի մի փոքր ձևափոխված տարբերակը, որը հնարավորություն է տալիս խուսափել մեծ թվերի հետ գործ ունենալուց:

Օրինակ 273. Աստիճանային եղանակը կիրառենք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի նկատմամբ, որպես սկզբնական մոտարկում վերցնելով $x_0 = (1, 1, 1)^T$ վեկտորը:

Ունենք

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} :$$

Վերանորմավորենք x_1 վեկտորը այն բաժանելով 5-ի

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 1.00 \end{pmatrix} :$$

Այնուհետև

$$x_2 = A\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 2.20 \end{pmatrix} :$$

Ստացված վեկտորը բաժանենք 2.20-ի

$$\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 1.00 \end{pmatrix} :$$

Այսպես շարունակելով յոթերորդ մոտարկումից կստանանք

$$x = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{pmatrix} :$$

Օգտագործելով Ռելեի առնչությունը

$$\lambda = 3 :$$

Կարելի է ստուգել, որ այս դեպքում ստացվել է ճշգրիտ պատասխան: Հետաքրքիր է, որ այն թվերը որոնց վրա իրականացնում էինք բաժանում $\lambda = 3$ սեփական արժեքի հաջորդական մոտարկումներն էին: •

Թեորեմ 118. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է և այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, ապա կգտնվի այնպիսի x_0 տարր, որի համար

$$Ax_0, \ A^2x_o, \ \cdots, \ A^kx_0$$

հաջորդականությունը A մատրիցի գերակշռող սեփական վեկտորի մոտարկումն է բազմապատկիչի ճշտությամբ:

Մեթոդի զուգամիտության մասին կարելի է ասել հետևյալը: Դիցուք A մատրիցի սեփական արժեքները դասավորված են հետևյալ եղանակով

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| :$$

Ինչքան $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ հարաբերությունը փոքր է 1-ից, այնքան մոտարկումներն ավելի արագ են զուգամիտում:

Նկարագրենք, թե ինչպես կարելի է օգտվել աստիճանային մեթոդից, եթե ցանկանում ենք գտնել նաև ոչ գերակշռող սեփական արժեքներն ու վեկտորները:

Թեորեմ 119. Դիցուք A-ն $(n \times n)$ կարգի սիմետրիկ մատրից է $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ սեփական արժեքներով: Եթե v_1-ը λ_1 սեփական արժեքի սեփական վեկտորն է $||v_1|| = 1$ պայմանին բավարարող, ապա

• $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ մատրիցն ունի $0, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ սեփական արժեքներ,

• եթե v-ն B մատրիցի սեփական վեկտորն է $\lambda \neq 0$ սեփական արժեքին համապատասխանող, ապա v-ն նաև A մատրիցի սեփական վեկտորն է՝ նույն սեփական արժեքին համապատասխանող:

Օրինակ 274. Հետևյալ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցն ունի $\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$ սեփական արժեքներ և $v = (-1, 1, 0)^T$ վեկտորը $\lambda = 5$ սեփական արժեքի սեփական վեկտորն է: Նորմավորենք v վեկտորը՝

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

և կազմենք

$$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցը: B մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 0, 5, 1$ ինչպես և պնդում էր թեորեմը: Բացի այդ $\lambda = 5$ սեփական արժեքին համապատասխանող

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

սեփական վեկտորը A մատրիցի սեական վեկտորն է $\lambda = 5$ արժեքին համապատասխանող: Ստուգումը թողնում ենք ընթերցողին: •

Պարզ է, թե ինչպես կարելի է օգտվել թեորեմ 107-ից: Ենթադրենք A մատրիցի սեփական արժեքները կարգավորված են

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| :$$

Կիրառելով աստիճանային մեթոդ կգտնենք λ_1 սեփական արժեքը: Այնուհետև կազմենք B մատրիցը, որի սեփական արժեքներն են

$$|\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0 :$$

B մատրիցի նկատմամբ կիրառելով աստճանային մեթոդ կգտնենք λ_2 սեփական արժեքը և այսպես շարունակ: Սակայն իրականում այս եղանակով հնարավոր կլինի գտնել միայն երկու կամ երեք սեփական վեկտորներ ու արժեքներ:

Դիտարկենք հակադարձելի A մատրից և նկարագրենք թե ինչպես կարելի է գտնել A մատրիցի մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքը: Եթե

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$$

թվերը A մատրիցի սեփական արժեքներն են, ապա

$$\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$$

թվերը կլինեն A^{-1} մատրիցի սեփական արժեքները: Այսինքն, եթե աստիճանային եղանակով գտնենք A^{-1} մատրիցի գերակշռող սեփական արժեքը λ-ն, ապա $1/\lambda$-ն կլինի A-ի որոնվող սեփական արժեքը: Այս եղանակն անվանում են ***հակադարձ աստիճանային եղանակ:***

---

563. Աստիճանային եղանակով գտնել հետևյալ մատրիցների գերակշռող սեփական վեկտորներն ու սեփական արժեքները: Կատարել հինգ մոտարկում և ստացված պատասխանը համեմատել ճշգրիտ պատասխանի հետ: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնել $x = (1,1)^T$ վեկտորը

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

564. Աստիճանային եղանակով գտնել հետևյալ մատրիցների գերակշռող սեփական վեկտորներն ու սեփական արժեքները: Կատարել չորս մոտարկում և ստացված պատասխանը համեմատել ճշգրիտ պատասխանի հետ: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնել $x = (1,1,1)^T$ վեկտորը

ա) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$:

565. Հետևյալ մատրիցները չունեն գերակշռող սեփական արժեք: Կիրառել աստիճանային եղանակը $x = (1,1,1)^T$ սկզբնական մոտարկումով: Կատարել չորս մոտարկում և հետազոտել ստացված պատասխանները

$$\text{ա)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{բ)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}:$$

566. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}:$$

Աստիճանային եղանակով գտնել A մատրիցի գերակշռող սեփական վեկտորն ու սեփական արժեքը: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնել $x = (1,1)^T$ վեկտորը և կատարել երեք մոտարկում: Օգտվելով թեորեմ 107-ից գտնել մյուս սեփական վեկտորը և արժեքը: Գտնել ճշգրիտ սեփական արժեքներն ու վեկտորները: Համեմատել ստացված պատասխանները:

567. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}:$$

Գտնել բոլոր սեփական արժեքներն ու վեկտորները կիրառելով աստիճանային և հակադարձ աստիճանային մեթոդները: Սկսել $x = (1,0)^T$ վեկտորից և կատարել հինգ մոտարկում:

41. ՄԱՏՐԻՑԻ ԵԶԱԿԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՄԱՏՐԻՑԻ ՊՍԵՎԴՈՀԱԿԱԴԱՐՁԸ

Թեորեմ 120. Եթե $A \in M_{m,n}$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի

$$U = (\, u_1 \quad \cdots \quad u_m \,) \in M_{m,m}, \qquad V = (\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,) \in M_{n,n}$$

օրթոգոնալ մատրիցներ, որ

$$U^T AV = \Sigma \in M_{m,n}, \qquad (A = U\Sigma V^T), \tag{34}$$

որտեղ $(p = min\{m,n\})$

$$\Sigma = (\sigma_{ij}), \; \sigma_{ij} = 0, \; i \neq j;$$

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \cdots \geq \sigma_{rr} > \sigma_{r+1,r+1} = \cdots = \sigma_{p,p} = 0 :$$

Սահմանում 58. (34) վերլուծությունն անվանում են A մատրիցի ***եզակի արժեքների վերլուծություն*** (singular value decomposition)։ Σ մատրիցի $\sigma_i = \sigma_{ii}$, $i = \overline{1,r}$ թվերն անվանում են A մատրիցի ***եզակի արժեքներ:***

Թեորեմ 121. Եթե $A \in M_{m,n}$ և $A = U\Sigma V^T$ նրա եզակի արժեքների վերլուծությունն է, ապա

$$Av_i = \sigma_i u_i, \;\; A^T u_i = \sigma_i v_i, \;\; i = \overline{1,p}, \;\; p = min\{m,n\} :$$

$$||A||_{\ell_2} = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2, \;\; p = \min\{n,m\},$$

$$\sup_{x \neq o} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sigma_1, \;\; \inf_{x \neq o} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sigma_n, \;\; m \geq n,$$

որտեղ

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} :$$

Թեորեմ 122. Եթե $A \in M_{m,n}$ և $A = U\Sigma V^T$ նրա եզակի արժեքների վերլուծությունն է և

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0,$$

ապա

$$\begin{aligned} &lin\{u_1, \cdots, u_r\} = \mathcal{R}(\mathcal{A}), \\ &lin\{v_1, \cdots, v_r\} = \mathcal{R}(\mathcal{A}^T), \\ &lin\{u_{r+1}, \cdots, u_m\} = \mathcal{N}(\mathcal{A}^T), \\ &lin\{v_{r+1}, \cdots, v_n\} = \mathcal{N}(\mathcal{A}), \\ &rang(A) = r : \end{aligned}$$

Թեորեմ 123. Եթե $A \in M_{m,n}$ և $A = U\Sigma V^T$ նրա եզակի արժեքների վերլուծությունն է, ապա $U \in M_{m,m}$ մատրիցի սյուները AA^T մատրիցի նորմավորված սեփական վեկտորներն են, իսկ $V \in M_{n,n}$ մատրիցի սյուները՝ $A^T A$-ի։ $A^T A$ կամ AA^T մատրիցների սեփական արժեքների քառակուսի արմատները A մատրիցի եզակի արժեքներն են։

Նկարագրենք տրված $A \in M_{m,n}$ մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը ստանալու ալգորիթմը։

I. Գտնել $A^T A$ մատրիցի λ_i սեփական արժեքները և դրանք դասավորել նվազման կարգով: $A^T A$ մատրիցի սեփական արժեքները ոչ բացասական թվեր են: Զրոյից տարբեր սեփական արժեքների քանակը նշանակենք r-ով: Գտնված սեփական արժեքների օգնությամբ կազմել Σ մատրիցը, որտեղ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$:

II. Գտնել $A^T A$ մատրիցի օրթոնորմալ սեփական վեկտորները և դրանք դասավորել նույն կարգով ինչ սեփական արժեքներն են դասավորված, կազմելով $V \in M_{n,n}$ մատրիցը:

III. Գտնել $U \in M_{m,m}$ մատրիցի առաջին r սյուները

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

առնչությունից: Մնացած $m - r$ սյուները կկազմեն $lin\{u_1, \cdots, u_r\}$ գծային տարածության օրթոգոնալ լրացման օրթոնորմավորված բազիսը:

U մատրիցի սյուները կարելի է ստանալ գտնելով նաև AA^T մատրիցի օրթոնորմավորված սեփական վեկտորները, սակայն դա ավելի աշխատատար եղանակ է:

Օրինակ 275. Գտնել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը:

I.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

Գտնենք $A^T A$ մատրիցի սեփական արժեքները

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

որտեղից

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1$$

և

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \sqrt{3}, \ \sigma_2 = 1:$$

Այս օրինակում $r = 2$:

II. Գտնենք λ_1 սեփական արժեքին համապատասխանող նորմավորված սեփական վեկտորը

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, իսկ նորմավորելուց հետո $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$:

Գտնենք λ_2 սեփական արժեքին համապատասխանող նորմավորված սեփական վեկտորը

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, իսկ նորմավորելուց հետո $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$: Այստեղից

$$V = (\, v_1 \quad v_2 \,) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}:$$

III. Գտնենք U մատրիցի առաջին $r = 2$ սյուները

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}:$$

u_3 տարրը կլինի $lin\{u_1, u_2\}$ տարածության օրթոգոնալ լրացման օրթոնորմավորված բազիսը, իսկ օրթոգոնալ լրացումը $A^T x = o$ համասեռ համակարգի լուծումների գծային տարածությունն է

$$A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$u_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ իսկ նորմավորելուց հետո } u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}:$$

Արդյունքում

$$U = (\, u_1 \quad u_2 \quad u_3 \,) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունն է

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}: \bullet$$

Օրինակ 276. Գտնենք

$$A = (\, 2 \quad 1 \quad -2 \,)$$

մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը: I. Գտնենք $A^T A$ մատրիցի սեփական արժեքները

$$det(A^T A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 9, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0 : \end{cases}$$

Այս օրինակում $r = 1$ և

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = 3 :$$

II. Գտնենք $A^T A$ մատրիցի նորմավորված սեփական վեկտորները

$$\lambda_1 = 9 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{2,3} = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} :$$

Այստեղից

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} :$$

III. Գտնենք U մատրիցի միակ u_1 սյունը

$$u_1 = \frac{1}{3} A v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (-1) :$$

A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունն է

$$A = (-1)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 277. Գտնենք

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը:

Քանի որ A^TA մատրիցը (4×4) կարգի, իսկ A^TA-ն (3×3) կարգի մատրիցներ են, ապա ավելի հարմար է աշխատել AA^T մատրիցով: Ունենք

$$AA^T = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5} \end{pmatrix} :$$

Գտնենք AA^T մատրիցի սեփական արժեքները և վեկտորները

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-\lambda & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-\lambda \end{vmatrix} = (16-\lambda)(36-13\lambda+\lambda^2),$$

որտեղից $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 4$ և

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} :$$

AA^T մատրիցի նորմավորված սեփական վեկտորներն են

$$\lambda_1 = 16 \Rightarrow u_1 = (1,0,0)^T,$$

$$\lambda_2 = 9 \Rightarrow u_2 = (0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})^T,$$

$$\lambda_1 = 16 \Rightarrow u_1 = (0,-\frac{4}{5},\frac{3}{5})^T,$$

որտեղից

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} :$$

V մատրիցի առաջին երեք սյուները հաշվենք $v_i = \sigma_i^{-1} A^T u_i$ բանաձևով

$$v_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T, v_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T, v_3 = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T :$$

v_4 տարրը կլինի $Ax = o$ համասարման լուծումների գծային տարածության օրթոնորմավորված բազիսը՝ $v_3 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$: Ստացանք

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \bullet$$

Ցույց տանք թե ինչպես կարելի է A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը կիրառել $Ax = b$ համակարգի նորմալ անհսկական լուծման որոնման համար: Դիտարկենք այն պարզագույն դեպքը, երբ

$$A = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 \neq 0, \ \sigma_2 \neq 0 :$$

Դիցուք $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$: Գտնենք անիսկական լուծումները

$$\Sigma^T\Sigma x = \Sigma^T b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\beta_1 \\ \sigma_2\beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

Անիսկական լուծումն է

$$x = (\frac{\beta_1}{\sigma_1}, \frac{\beta_2}{\sigma_2}, c_1, c_2)^T,$$

որտեղ c_1, c_2-ը կամայական հաստատուններ են: Նորմալ լուծումը ստանալու համար պետք է վերցնել $c_1 = c_2 = 0$, որտեղից

$$x_0 = (\frac{\beta_1}{\sigma_1}, \frac{\beta_2}{\sigma_2}, 0, 0) :$$

Ստացված լուծումը կարելի է ներկայացնել այսպես

$$x_0 = \Sigma^+ b = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b :$$

Ընդհանրացնենք ստացված արդյունքը:

Թեորեմ 124. Դիցուք $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in M_{m,n}$, $p = min\{m, n\}$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p$$

և

$$\sigma_{ii} = \sigma_i, \; i = \overline{1, p},$$

իսկ Σ մատրիցի մնացած տարրերը հավասար են զրոյի: Այս

$$\Sigma x = b$$

համակարգի նորմալ անիսկական լուծումը տրվում է

$$x_0 = \Sigma^+ b$$

բանաձևով, որտեղ Σ^+-ը ստացվում է Σ մատրիցը տրանսպոնացնելով և բոլոր σ_i զրոյից տարբեր թվերը σ_i^{-1}-ով փոխարինելով:

Սահմանում 59. Դիցուք $A \in M_{m,n}$ մատրիցն ունի $A = U\Sigma V^T$ եզակի արժեքների վերլուծություն: A մատրիցի ***պսեվդոհակադարձը*** կամ ***Մուր-Փենրոուզի հակադարձը*** կսահմանենք հետևյալ բանաձևով

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

որտեղ Σ^+ մատրիցը սահմանված է նախորդ թեորեմում:

Օրինակ 278. Գտնենք $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ մատրիցի պսեվդոհակադարձը:

Օրինակ 2-ում մենք ստացել ենք A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը

$$A = (-1)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}:$$

Համաձայն սահմանում 2-ի

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(-1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}: \bullet$$

Թեորեմ 125. Դիցուք $A \in M_{m,n}$, ապա

$$Ax = b$$

համակարգի նորմալ անհսկական լուծումը տրվում է

$$x_0 = A^+ b$$

բանաձևով:

Օրինակ 279. Գտնենք $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9$ համակարգի նորմալ անիսկական լուծումը:

Նախորդ օրինակում մենք հաշվեցինք $A = (2 \quad 1 \quad -2)$ մատրիցի պսեվդոհակադարձը: Հետևաբար

$$x_0 = A^+b = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \\ -\frac{1}{9} \\ \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} (9) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} : \bullet$$

Օրինակ 280. Գտնել

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

համակարգի նորմալ անիսկական լուծումը:

Օրինակ 275-ում մենք գտել ենք տրված համակարգի A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը, որտեղից կստանանք պսեվդոհակադարձը և խնդրի լուծումը

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad x_0 = A^+b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} : \bullet$$

Վերջում նշենք, որ ներկայացված տեսությունը ճիշտ է նաև կոմպլեքս տարրերով մատրիցների համար, եթե տրանսպոնացված մատրիցների փոխարեն դիտարկենք հերմիտյան համալուծները, իսկ օրթոգոնալ մատրիցների փոխարեն՝ ունիտար մատրիցները: Ներկայացնենք թեորեմ 1-ի համանմանը՝ կոմպլեքս տարրերով մատրիցների համար:

Թեորեմ 126. Եթե $A \in C_{m,n}$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի

$$U = (u_1 \quad \cdots \quad u_m) \in C_{m,m}, \qquad V = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \in C_{n,n}$$

ունիտար մատրիցներ, որ

$$A = U\Sigma V^*$$

որտեղ ($p = min\{m, n\}$)

$$\Sigma = (\sigma_{ij}),\ \sigma_{ij} = 0,\ i \neq j;$$

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \cdots \geq \sigma_{rr} > \sigma_{r+1,r+1} = \cdots = \sigma_{p,p} = 0 :$$

---

568. Գտնել հետևյալ մատրիցների եզակի արժեքների վերլուծությունը

ա) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + 3\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}$:

569. Դիցուք $A \in M_{n,n}$ և $det(A) \neq 0$: Ցույց տալ, որ $A^{+} = A^{-1}$:

570. Գտնել $A = (0)$ մատրիցի պսեվդոհակադարձը:

571. Գտնել A մատրիցի պսեվդոհակադարձը

ա) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

572. Դիցուք A մատրիցն ունի օրթոգոնալ սյուներ: Գտնել նրա պսեվդոհակադարձը:

573. Գտնել

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

համակարգի նորմալ անիսկական լուծումը:

MATHEMATICA-ի ԳՐԱԴԱՐԱՆ

MATHEMATICA փաթեթում տրված A մատրիցի եզակի արժեքների վերլուծությունը կարելի է ստանալ $SingularValueDecomposition[A]$ հրամանի օգնությամբ: Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը և հաշվենք նրա եզակի արժեքների վերլուծությունը

```
In[1]:= m1 = ( 4   1 - i ) // N;
             (-3    i    )
        {U, Σ, V} = SingularValueDecomposition[m1];
        {U // MatrixForm, Σ // MatrixForm, V // MatrixForm}

Out[3]= {( -0.804144 + 0. i              -0.594435 + 0. i          ),
         ( 0.592684 - 0.0455911 i        -0.801775 + 0.061675 i    )
         ( 5.2572   0.        ),
         ( 0.       0.601513  )
         ( -0.950054 + 0.0260164 i   0.0458603 - 0.307599 i ),
         ( -0.161632 - 0.265698 i    -0.885699 + 0.344698 i )}
```

Ստուգենք

```
In[4]:= U.Σ.Conjugate[Transpose[V]] - m1 // Chop

Out[4]= {{0, 0}, {0, 0}}
```

$m1$ մատրիցի եզակի արժեքները կարելի է ստանալ SingularValueList[m1] հրամանի օգնությամբ

```
In[5]:= SingularValueList[m1]

Out[5]= {5.2572 , 0.601513 }
```

Դիտարկենք հետևյալ ոչ հակադարձելի մատրիցը

```
In[6]:= m2 = (-1  3);
             (-1  3)
        Inverse[m2]

      - Inverse :: sing : Matrix {{-1, 3}, {-1, 3}} is singular . More…

Out[7]= Inverse [{{-1, 3}, {-1, 3}}]
```

$m2$ մատրիցի պսեվդոհակադարձը կարելի է հաշվել $PseudoInverse[m2]$ հրամանով

```
In[8]:= MatrixForm[PseudoInverse[m2]]
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

42. ՉՈԼԵՍԿԻԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 60. $A \in M_{n,n}$ մատրիցը կանվանենք ***դրական որոշված մատրից***, եթե ցանկացած $x \in R^n$ տարրի համար

$$x^T Ax > 0 :$$

Օրինակ 281.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշված է, քանի որ ցանկացած $x = (x_1, x_2) \in R^2$ տարրի համար

$$x^T Ax = (\, x_1 \quad x_2 \,) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0 : \bullet$$

Սահմանում 61. $A \in M_{n,n}$ մատրիցը կանվանենք ***ոչ բացասական որոշված մատրից***, եթե ցանկացած $x \in R^n$ տարրի համար

$$x^T Ax \geq 0 :$$

Օրինակ 282.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը ոչ բացասական որոշված է, քանի որ ցանկացած

$$x = (x_1, x_2)^T \in R^2$$

տարրի համար

$$x^T A x = (\,x_1 \quad x_2\,) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2 \geq 0 :$$

Եթե $x_1 = -x_2 \neq 0$, ապա $x^T A x = 0$, երբ $x \neq o$:•

Թեորեմ 127. Եթե $A \in M_{n,n}$ մատրիցը սիմետրիկ է և դրական որոշված, ապա գոյություն ունի միակ ստորին եռանկյունաձև G մատրից՝ դրական գլխավոր անկյունագծով այնպիսին, որ

$$A = GG^T : \qquad (35)$$

(35) վերլուծությունն անվանում են A մատրիցի ***Չոլեսկիի վերլուծություն:***

Դիցուք $A \in M_{n,n}$: Նշանակենք

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & v^T \\ v & B \end{pmatrix} :$$

A մատրիցը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$A = \begin{pmatrix} \beta & O \\ v/\beta & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B - vv^T/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta v^T/\beta & \\ O & E \end{pmatrix},$$

որտեղ $\beta = \sqrt{\alpha}$ և $B - vv^T/\alpha$ մատրիցը դրական որոշված սիմետրիկ մատրից է: Եթե $B - vv^T\alpha = G_1 G_1^T$, ապա $A = GG^T$, որտեղ

$$G = \begin{pmatrix} \beta & O \\ O & G_1 \end{pmatrix} :$$

Նույն ձևափոխությունները կրկնենք G_1 դրական որոշված սիմետրիկ մատրիցի նկատմամբ: Այսպես շարունակելով իվերջո կստանանք տրված A մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը:

Օրինակ 283. Գտնենք

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը:

Ունենք

$$\alpha_1 = 1,\, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\, v_1^T = (\,2 \quad 0\,),\, B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix},$$

որտեղից

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & v_1^T \\ v_1 & B_1 \end{pmatrix},\, \beta_1 = \sqrt{\alpha_1} = 1,\, B_1 - v_1 v_1^T/\alpha_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}:$$

Նույն ձևափոխությունը կատարենք $B_1 - v_1 v_1^T/\alpha_1$ մատրիցի նկատմամբ

$$\alpha_2 = 4,\, \beta_2 = \sqrt{4} = 2,\, v_2 = (4),\, B_2 = (13),$$

$$B_2 - v_2 v_2^T/\alpha_2 = (9) = (3)(3)^T:$$

Ամփոփելով

$$G_2 = (3),\; G_1 = \begin{pmatrix} \beta_2 & O \\ v_2/\beta_2 & G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \beta_1 & O \\ v_1/\beta_1 & G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունն է

$$A = GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}: \bullet$$

Նկատենք, որ Չոլեսկիի վերլուծությունը տրված մատրիցի LU վերլուծությունն է:

Կարելի է ցույց տալ, որ G և G^T մատրիցների պայմանավորվածության թվերն ավելի փոքր են, քան A մատրիցինը: Այդ պատճառով Չոլեսկիի վերլուծությունը ավելի նախընտրելի է համակարգի լուծման համար, համեմատած Գաուսի եղանակի հետ:

---

574. Ցույց տալ, որ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշված է:

575. Գտնել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & 21 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 25 \end{pmatrix}$$

մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը:

576. Գտնել

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 10 & -10 \\ 1 & -10 & 14 \end{pmatrix}$$

մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը և դրա օգնությամբ լուծել

$$Ax = (2, -2, 6)^T$$

համակարգը:

577. Ցույց տալ, որ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

մատրիցը ոչ բացասական որոշված մատրից է:

Տրված A մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը կարելի է ստանալ CholeskyDecomposition[A] հրամանի օգնությամբ: Դիտարկենք հետևյալ սիմետրիկ և դրական որոշված մատրիցը

```
In[1]:= A = {{1, 2, 1}, {2, 6, 3}, {1, 3, 11}};
        Positive /@ Eigenvalues[A]
Out[2]= {True, True, True}
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Գտնենք A մատրիցի Չոլեսկիի վերլուծությունը

```
In[3]:= G = CholeskyDecomposition[A];
        G // MatrixForm
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{19}{2}} \end{pmatrix}$$

Ստուգենք ստացված պատասխանը

```
In[5]:= A == Transpose[G].G
Out[5]= True
```

ՊԱՏՄԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ, ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ, ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

Գծային հավասարումների համակարգերի առաջին հիշատակությունները հանդիպում են Ն.Ք. IV-IIIդդ. Չինաստանում և Բաբելոնում: Խնդիրներից մեկի լուծման ընթացքում չինացի հեղինակը հանգում է հետևյալ համակարգին

$$x + 2y + 3z = 26$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$3x + 2y + z = 39 :$$

Հետաքրքիր է լուծման եղանակը: Հեղինակը գրում է համակարգի ընդլայնված մատրիցը հետևյալ (շրջված) տեսքով

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{matrix}$$

և կատարելով տարրական ձևափոխություններ այն բերում է սեղանաձև տեսքի

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{matrix} :$$

Իրականացնելով հետընթաց տեղադրում, հեղինակը գտնում է համակարգի լուծումը: Սա, փաստորեն, փոփոխականների արտաքսման եղանակն է, որը հետագայում մոռացվել է: Այն կրկին օգտագործել է գերմանացի Կ.Ֆ.Գաուսը 1800թ.:

Հին հունաստանում նման ուսումնասիրություններով զբաղվել է Դիոֆանտեսը մոտավորապես 250թ.:

Գծային համակարգերի ուսումնասիրման հիշատակություններ հանդիպում են նաև Հնդկաստանում՝ Բրահմագուպտայի (598-660թթ.) աշխատանքներում: Նա ուսումնասիրել է երկու անհայտով գծային հավասարումների լուծման եղանակ:

Մինչև XIXդ. սկիզբը հիմնականում ուսումնասիրվում էին n անհայտով n հավասարումների համակարգեր: Եթե խնդրի լուծման ընթացքում առաջանում էր ոչ քառակուսի համակարգ կամ համակարգի հավասարումները գծորեն անկախ չէին, ապա համարում էին, որ խնդրի հարցադրումը կոռեկտ չէ: XVIII-XIXդդ. միակ առաջընթացը կապված էր նշանակումների հետ՝ ներմուծվեցին մատրիցներ և որոշիչներ, որոնք հնարավորություն տվեցին լուծումը գրել "բացահայտ բանաձևերով":

1545թ. իտալացի Ջ.Կարդանոն առաջարկում է երկու գծային հավասարումներից կազմված համակարգի լուծման մի եղանակ, որն ըստ էության Կրամերի եղանակն էր: Սակայն Կարդանոն չի ընդհանրացնում այդ եղանակը և չի հանգում որոշիչի գաղափարին:

Հարկավոր է նշել, որ որոշիչներն օգտագործվել են շատ ավելի վաղ, քան տրվել է մատրիցի գաղափարը: Որոշիչների ուսումնասիրմամբ համարյա միաժամանակ սկսել են զբաղվել Եվրոպայում և Ճապոնիայում: Այդ գաղափարին հանգել է ճապոնացի Սեկի Կովան 1683թ.: Սեկին սահմանում է որոշիչներ և տալիս է դրանց հաշվելու ընդհանուր մեթոդներ: Նա կարողանում էր հաշվել 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 կարգի որոշիչներ և դրանք կիրառել որոշ խնդիրներ լուծելիս:

Հետաքրքիրքիր է, որ Եվրոպայում նույն գաղափարին հանգել է գերմանացի Գ. Վ. Լայբնիցը ճիշտ նույն թվականին: Նա ֆրանսիացի Գ.Ֆ.Ա. Լոպիտալին գրված նամակում հայտնում է, որ

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

համակարգն ունի լուծում, քանի որ

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30,$$

որն, այսօրվա նշանակումներով, համակարգի որոշիչի զրո լինելու պայմանն է: Լայբնիցը մեծ ուշադրություն էր դարձնում մաթեմատիկական նշանակումներին: Նա համոզված էր, որ առաջընթացը մեծապես պայմանավորված է հարմար նշանակումներով: Նրա բազմաթիվ աշխատանքներում հանդիպում են համակարգերի ավելի քան 50 տարբեր նշանակումներ, որոնք նա փորձարկել է սկսած 1678թ. հետագա 50 տարիների ընթացքում: Նա "որոշիչ" տերմինի փոխարեն օգտագործում էր "ռեզուլտանտ" ("resultant") տերմինը: Լայբնիցն ապացուցում է "ռեզուլտանտների" հետ կապված բազմաթիվ արդյունքներ, այդ թվում նաև համակարգերի լուծման Կրամերի եղանակը: Նա գիտեր որոշիչի վերլուծությունն ըստ ցանկացած սյան կամ տողի:

1748թ. հրապարակվում է շոտլանդացի Կ.Մակլորենի հետմահու աշխատանքը, որի արդյունքները ստացվել էին դեռևս 1730թ.: Դա որոշիչների մասին տպագրված առաջին աշխատանքն էր, որտեղ Մակլորենը ապացուցում էր Կրամերի եղանակը 2×2 և 3×3 կարգի համակարգերի համար և ցույց էր տալիս, թե ինչպես այն կօգտագործվի 4×4 կարգի համակարգի համար: Ընդհանուր խնդիրը վերջնականապե՛ս լուծում է շվեյցարացի Գ.Կրամերը 1750թ.: Նա առաջարկում է գծային համակարգերի լուծման սիմվոլիկ եղանակ և մշակում է որոշիչների տեսության հիմքերը:

Որոշիչների վերաբերյալ աշխատանքներ հետագայում սկսում են տպագրել պարբերաբար. 1764թ.՝ ֆրանսիացի Է.Բեզուն, 1770թ.՝ ֆրանսիացի Ժ.Լ.Լագրանժը: Ֆրանսիացի Շ.Օ.Վանդերմոնդը 1771թ. մշակել է որոշիչների տեսության հիմունքները և այն, որպես առանձին ճյուղ, առանձնացրել է գծային համակարգերի տեսությունից: Մասնավորապես, ձևակերպել է որոշիչի վերլուծությունը երկրորդ կարգի մինորներով և լրացուցիչ մինորներով: Ֆրանսիացի Պ.Ս.Լապլասը Բեզուի և Կրամերի մեթոդները համարում էր ոչ գործնական: Նրա 1772թ. լույս տեսած աշխատանքում ուսումնասիրվում է համակարգերի լուծումը՝ շրջանցելով որոշիչների հաշվումը: Լապլասն ապացուցել է նաև որոշիչի վերլուծությունը լրացուցիչ մինորների օգնությամբ, որն այսօր կրում է նրա անունը: Հետաքրքիր է, որ նա, ինչպես և Լայբնիցը, "որոշիչ" տերմինի փոխարեն օգտագործում էր "ռեզուլտանտ" տերմինը:

1773թ. Լագրանժն ուսումնասիրում էր նույնություններ կապված 3×3 կարգի ֆունկցիոնալ որոշիչների հետ: Նրա աշխատանքներում առաջին անգամ հանդիպում է 3×3 կարգի որոշիչի մեկնաբանումը, որպես ծավալի մեծության: Նա ցույց է տալիս, որ

$$O(0,0,0), \quad M(x,y,z), \quad M'(x',y',z'), \quad M''(x'',y'',z'')$$

կետերով կառուցված քառանիստի ծավալը հավասար է

$$\frac{1}{6}[z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')]$$

մեծությանը:

"Որոշիչ" տերմինն առաջին անգամ հանդիպում է Գաուսի աշխատանքում 1801թ.: Սակայն սա այն որոշիչը չէր, որն այսօր օգտագործվում է: Բայց ահա 1812թ. ֆրանսիացի Օ.Լ.Կոշին "որոշիչ" տերմինն օգտագործում է արդի իմաստով: Կոշիի աշխատանքը այդ տարիներին որոշիչներին նվիրված ամենաավարտուն աշխատանքն է: Նա վերաապացուցում է նախկինում հայտնի արդյունքները և ստանում մինորներին և հանրահաշվական լրացումներին վերաբերող նոր արդյունքներ: Առաջին անգամ ապացուցվում է որոշիչների արտադրյալի մասին թեորեմը: Նույն թեորեմը ապացուցում է նաև ֆրանսիացի Ժ.Ֆ.Ս.Բինեն:

1826թ. n-փոփոխականի քառակուսային ձևերի ուսումնասիրման ժամանակ Կոշին սկսում է օգտագործել քառակուսային ձևի գործակիցներից կազմված սիմետրիկ մատրիցներ: Նա հաշվում է այդպիսի մատրիցների սեփական արժեքները և ձևակերպում որոշ արդյունքներ, որոնք վերաբերում են մատրիցը անկյունագծային տեսքի բերելուն: Կոշին ցույց է տալիս, որ ցանկացած 3-րդ կարգի սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքներն իրական են: Երեք տարի անց նա այդ արդյունքը ընդհանրացնում է ցանկացած կարգի իրական տարրերով սիմետրիկ մատրիցների համար, ապացուցում է, որ ցանկացած սիմետրիկ մատրից կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Կոշին ներմուծում է նաև նման մատրիցների գաղափարը և ցույց է տալիս, որ այդպիսի մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են: Նշենք նաև , որ շվեյցարացի Ժ.Չ.Ֆ.Շտուրմը սեփական արժեքների խնդրին հանգել էր սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրման ժամանակ և, բացի այդ, սեփական արժեքների խնդիրը դեռևս 80 տարի առաջ հանդիպել էր ֆրանսիացի Ժ.Լ.Դ'Ալամբերի մեխանիկային նվիրված մի աշխատանքում:

Մատրիցների գաղափարին հանգել են նաև գերմանացի Կ.Գ.Յակոբին (1830թ.), այնուհետև գերմանացիներ Լ.Կրոնեկերն ու Կ.Թ.Վ. Վայերշտրասը (1850-1860թթ.) գծային ձևափոխությունների և քառակուսային ձևերի հետ կապված խնդիրներում: Սակայն, ո՛չ Կոշին, ո՛չ էլ Կրոնեկերն ու Վայերշտրասը չէին պատկերացնում այդ գաղափարի հիմնարար լինելը և մատրիցները դիտարկում էին միայն իրենց ուսումնասիրած խնդիրների տեսանկյունից:

1841թ. Յակոբին հրատարակում է որոշիչներին նվիրված երեք աշխատանք, որոնք շատ կարևոր աշխատանքներ էին, քանի որ առաջին անգամ որոշիչի սահմանումը տրվում էր ալգորիթմական եղանակով: Այն հնարավորություն էր տալիս որոշիչն օգտագործել ինչպես թվերի, այնպես էլ ֆունկցիաների համար: Փաստորեն, այս աշխատանքների շնորհիվ որոշիչները դարձան մաթեմատիկոսների համընդհանուր սեփականությունը: Անգլիացի Ա.Կելին 1841թ. որոշիչի նշանակման համար օգտագործում է երկու ուղղաձիգ գծեր, որն օգտագործվում է ցայսօր: Կելիի այս աշխատանքը որոշիչների վերաբերյալ առաջին տպագրված աշխատանքն էր Անգլիայում:

"Մատրից" տերմինը առաջինը օգտագործել է անգլիացի Ջ.Ջ.Սիլվեստրը 1850թ.: Մի քանի հեղինակների հետ միաժամանակ նա ցույց է տալիս, որ T^n օպերատորի սեփական արժեքները T օպերատորի սեփական արժեքների n-րդ աստիճաններն են: Սիլվեստրը 1852թ. ձևակերպել է քառակուսային ձևերի իներցիայի օրենքը, որը հայտնի էր դեռևս Յակոբիին և գերմանացի Գ.Ֆ.Բ. Ռիմանին, որոնք սակայն այն չէին հրապարակել: 1851թ. Սիլվեստրը Կելիին ծանոթացնում է իր մտքերին: Վերջինս ընդունելով նրա գաղափարների կարևորությունը արդեն 1853թ. հրապարակում է մի ակնարկ, որտեղ առաջին անգամ տալիս է հակադարձ մատրիցի գաղափարը: Կելին 1858թ. սահմանում է մատրիցի վերացական գաղափարը՝ դրանով իսկ դնելով մատրիցային հանրահաշվի հիմքերը: Նա, մասնավորապես, ցույց է տալիս, որ Կոշիի, Կրոնեկերի և Վայերշտրասի արդյունքներն իր ավելի ընդհանուր տեսության մասնավոր դեպքերն են: Նա սահմանում է մատրիցների գումարումը, բազմապատկումը, հակադարձը, ուսումնասիրում է դրանց հատկությունները, տալիս հակադարձ մատրիցի բացահայտ տեսքը՝ որոշիչների օգնությամբ: Կելին ձևակերպում է "Կելի-Համիլտոնի" թեորեմը ցանկացած կարգի քառակուսի մատրիցների համար, սակայն ապացույցը բերում է միայն 2×2 կարգի մատրիցների համար: Նա նշում է, որ ապացույցը ստուգել է 3×3 կարգի մատրիցների համար ևս, սակայն գտնում է աննպատակահարմար ապացուցել թեորեմը ընդհանուր դեպքում: Համիլտոնը այդ թեորեմը ապացուցել է 4×4 կարգի մատրիցների համար:

1870թ. ֆրանսիացի Մ.Է.Կ. Ժորդանը գտնում է մատրիցի կանոնական տեսքը, որն այսօր կրում է նրա անունը:

Գերմանացի Ֆ.Լ.Զեյդելը 1874թ. առաջարկել է գծային համակարգերի լուծման իտերացիոն եղանակը:

1878թ. գերմանացի Ֆ.Գ.Ֆրոբենիուսը հրապարակում է մատրիցներին նվիրված մի կարևոր աշխատանք, որտեղ ուսումնասիրում է մատրիցի կանոնական տեսքը: Նա հավանաբար անտեղյակ էր Կելիի հետազոտություններից: Կարևորն այն է, որ Ֆրոբենիուսն իր աշխատանքում հղումներ է կատարում Կրոնեկերի և Վայերշտրասի նմանատիպ արդյունքների վրա, որոնք վերաբերում են մասնավոր դեպքերին և ըստ Ֆրոբենիուսի ձևակերպվել են 1874 և 1868թթ.: Ֆրոբենիուսը նաև ընդհանուր դեպքում ապացուցում է Կելի-Համիլտոնի թեորեմը: Նա հստակ ձևակերպում է ռանգի գաղափարը և օգտագործում "ռանգ" տերմինը, տալիս է օրթոգոնալ մատրիցի սահմանումը:

1884թ. Սիլվեստրը սահմանում է մատրիցի միջուկը և նշանակում $n(A)$-ով: 1986թ. Ֆրոբենիուսը ծանոթանում է Կելիի աշխատանքներին և սկսում է օգտագործել "մատրից" տերմինը:

Գծային հավասարումների համակարգերի տեսությունը ավարտուն տեսքի է բերվել Կրոնեկերի աշխատանքներում: Նրա արդյունքներից շատերը հրապարակվել են ավելի ուշ իր գործընկերների կամ աշակերտների աշխատանքներում: Կրոնեկերից անկախ իտալացի Ա.Կապելլին գտել է գծային հավասարումների համակարգերի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

1903թ. տպագրվում է Վայերշտրասի հետմահու աշխատանքը, որտեղ տրվում է որոշիչի աքսիոմատիկ սահմանումը: Նույն թվականին տպագրվում է որոշիչների վերաբերյալ Կրոնեկերի՝ նույնպես հետմահու, աշխատանքը: Այս երկու աշխատանքներով որոշիչների տեսությունը բերվում է ժամանակակից տեսքի:

XXդ. սկզբին ավարտուն տեսքի է բերվում նաև մատրիցների տեսությունը: Նշենք նաև մի քանի կարևոր հայտնագործություններ. 1942թ. ամերիկացի Ջ. ֆոն Նեյմանը սահմանում է մատրիցի պայմանավորվածության թիվը, 1948թ. անգլիացի Ա.Թյուրինգը հայտնաբերում է LU-վերլուծությունը, 1958թ.Վիլկինսոնը՝ QR-վերլուծությունը:

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ, ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Հանրահաշվի հիմնական թեորեմի պատմությունը սկսվում է XVIդ., քանի որ մինչ այդ կոմպլեքս թվերի գաղափարը դեռ չէր ձևավորվել: Առաջինը Կարդանոն էր, որ 1545թ. հասկացավ, որ կարելի է գործ ունենալ ավելի ընդհանուր մեծությունների հետ, քան իրական թվերն են: Նա ստացել էր երրորդ կարգի հավասարման արմատների հաշվման մի բանաձև, սակայն, երբ այդ բանաձևը կիրառվում էր

$$x^3 = 15x + 4$$

հավասարման նկատմամբ, ստացվում էր պատասխան, որն իր մեջ պարունակում էր $\sqrt{-121}$ արտահայտությունը: Այն ժամանակ դա համարվում էր անթույլատրելի, չնայած Կարդանոն գիտեր, որ նշված հավասարումն ունի $x = 4$ արմատ: Այդ հակասությունը հաղթահարելու նպատակով նա ընդունելի համարեց բացասական թվից քառակուսի արմատ հանելու գործողությունը: Կարդանոն այդպիսի թվերի հետ կատարում էր որոշ ձևափոխություններ՝ աշխատելով ստանալ ճիշտ պատասխան: Սակայն նա այդպիսի թվերի կիրառությունը համարում էր անիմաստ ու աշխատում էր խուսափել դրանցից:

30 տարի անց՝ 1572թ., իտալացի Ռ. Բոմբելլին իր աշխատությունում ներմուծում է կոմպլեքս թիվ, սահմանում թվաբանական գործողություններ դրանց հետ, ինչպես նաև կոմպլեքս թվերից քառակուսի արմատ հանելու գործողությունը: Իր աշխատանքում Բոմբելլին արդեն օգտագործում էր $\pm i$ նշանակումները (ֆրանսերեն imaginaire (կեղծ) բառի առաջին տառը), սակայն այդ նշանակումը տարածում ստացավ միայն այն ժամանակ, երբ օգտագործվեցին գերմանացի Լ. Էյլերի (1777թ.), իսկ այնուհետև Գաուսի (1831թ.) աշխատանքներում: "Կեղծ թիվ" տերմինը ներմուծել է 1637թ. ֆրանսիացի Ռ.Դեկարտը: Դեկարտն այն միտքը հայտնեց, որ կարելի է երևակայել, թե ցանկացած n-րդ աստիճանի բազմանդամ ունի n հատ երևակայական արմատներ, չնայած որ իրականում դրանք ոչ մի իրական մեծության հետ կարող են և չհամընկնել:

Ֆրանսիացի Ֆ. Վիետը տվել է այնպիսի n-րդ կարգի հավասարումների օրինակներ, որոնք ունեին ճիշտ n արմատ, սակայն հանրահաշվի հիմնական թեորեմի առաջին ձևակերպումը պատկանում է հոլանդացի Ա.Ժիրարին (1629թ.): Նա երբեք չի ասել, որ բոլոր արմատները պետք է լինեն $a + ib$ տեսքի, որտեղ a, b-ն իրական թվեր են՝ ենթադրելով, որ այդ արմատները կարող են լինել նաև ավելի ընդհանուր բազմությունից, քան կոմպլեքս թվերն են: Սակայն սկսած այդ ժամանակներից մաթեմատիկոսները հենց դա էլ փորձել են ապացուցել՝ այդ փաստը համարելով ակնհայտ:

1702թ. հայտնվեց հանրահաշվի հիմնական թեորեմի սխալ լինելու Լայբնիցի ապացույցը, սակայն 1742թ. Էյլերը ցույց տվեց Լայբնիցի դատողությունների սխալականությունը:

1746թ. թեորեմը ապացուցելու առաջին լուրջ փորձը կատարեց Դ'Ալամբերը: Չնայած նրա ապացույցը ուներ որոշ բացթողումներ, սակայն առանձին գաղափարներ բավական կարևոր էին:

XVII-XVIIIդդ. սահմանագծին կառուցվեց կոմպլեքս թվերից n-րդ աստիճանի արմատ հանելու տեսությունը, որը հիմնված է անգլիացի Ա.Մուավրի (1707թ.) հայտնի բանաձևի վրա

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi :$$

1748թ. Էյլերը բացահայտեց

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

բանաձևը:

XVII-XVIIIդդ. բազմաթիվ փորձեր արվեցին նաև կոմպլեքս թվին երկրաչափական մեկնաբանություն տալու ուղղությամբ: Կեղծ թվերը առաջին անգամ երկրաչափական մեկնաբանում ստացել են անգլիացի Ջ.Վալիսի 1685թ. հանրահաշվին նվիրված աշխատանքում (նշենք նաև, որ Վալիսը հիմնադրել է ինտերպոլյացիայի մեթոդը և կառուցել սինուսոիդի գրաֆիկը): 1797թ. դանիացի Կ.Վեսելի Դանիայի գիտությունների ակադեմիային հանձնված աշխատանքում ներկայացված էր հարթության վրա վեկտորային հանրահաշվի սիստեմատիկ մշակված տեսությունը, որը, փաստորեն, կոմպլեքս թվերի հանրահաշվի երկրաչափական մոդելն էր: Նրանից անկախ շվեյցարացի Ժ.Ռ.Արգանը 1806թ. հրապարակել է "Երկրաչափական կառուցումներում կեղծ մեծությունների ներկայացման եղանակի մասին" աշխատանքը, որում տվել է կոմպլեքս թվերի և դրանց հետ կատարվող գործողությունների երկրաչափական մեկնաբանումը:

Շուտով Էյլերը ապացուցեց հանրահաշվի հիմնական թեորեմը $n \leq 6$ դեպքի համար, երբ բազմանդամի բոլոր գործակիցները իրական թվեր են: Այնուհետև նա փորձ արեց ապացուցել թեորեմը ցանկացած կարգի իրական գործակիցներով բազմանդամների համար: Էյլերը ներկայացնում է խիստ ապացույցը միայն $n = 4$ դեպքում և բերում ապացույցի սխեման ընդհանուր դեպքում: Սակայն 1772թ. Լագրանժը այդ ապացույցի մեջ որոշ թերություններ է հայտնաբերում:

Լապլասը փորձում է ապացուցել թեորեմը 1795թ.՝ օգտագործելով միանգամայն այլ եղանակ: Նրա ապացույցը բավական գեղեցիկ էր: Միակ թերությունը կապված էր այն փաստի հետ, որ արմատների գոյությունը ենթադրվում էր սկզբից:

1799թ. Գաուսը ներկայացնում է թեորեմի առաջին նոր ապացույցը՝ առանց նախնական ենթադրությունների: Նա նաև քննադատել է մինչ այդ հայտնի ապացույցները: Գաուսը լավ հասկանում էր, որ իր ապացույցը ևս անթերի չէ, սակայն համոզված էր, որ այն հետագայում կարելի է ճշտել: 1814թ.Արգանը ապացուցում է թեորեմը իրական գործակիցներով բազմանդամների համար՝ ճշտելով Դ'Ալամբերի ապացույցը:

Երկու տարի անց Գաուսը ներկայացնում է թեորեմի երկրորդ ապացույցը, որն այս անգամ ավարտուն էր: "Կոմպլեքս թիվ" տերմինը առաջարկել է Գաուսը 1831թ., իսկ "համալուծ" տերմինը՝ 1821թ. Կոշին:

1849թ. Գաուսն առաջին անգամ ապացուցում է թեորեմը ընդհանուր դեպքում՝ կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների համար:

Պետք է նշել, որ այս ապացույցները գոյության ապացույցներ էին և դրանց օգնությամբ հնարավոր չէր գտնել բազմանդամի արմատները: Կառուցողական ապացույցի առաջին փորձը կատարել է Վայերշտրասը 1859թ., սակայն այդ փորձը հաջողությամբ ավարտեց Հ.Կնեսերը 1940թ.: Այս ապացույցը պարզեցրեց 1981թ. նրա որդին՝ Մարտին Կնեսերը:

ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1827թ. գերմանացի Ա.Ֆ.Մյոբիուսը հրապարակում է մի աշխատանք, որտեղ առաջին անգամ մաթեմատիկայի պատմության մեջ սկսում է օգտագործել ուղղություն ունեցող մեծություններ, իսկ 1837թ. հրատարակված գրքում նա հստակորեն այն միտքն է արտահայտում, որ հարթության վրա ցանկացած վեկտոր կարելի է վերլուծել ըստ երկու որոշակի առանցքների:

Այս երկու աշխատանքների միջև՝ 1832թ., հրապարակվում է իտալացի Ջ.Բելլավիտիսի աշխատանքը, որտեղ նա նույնպես սկսում է օգտագործել ուղղություն ունեցող մեծություններ: Նա իր աշխատանքում ուսումնասիրում էր հատվածներ և նշում, որ AB մեծությունը հավասար չէ BA մեծությանը: Նա երկու հատվածներ անվանում է հավասարազոր, եթե դրանք հավասար են և զուգահեռ: Այնուհետև նա սահմանում է հավասարազոր հատվածների գումարումը և ստեղծում այդպիսի հատվածների հանրահաշիվ, որն, ըստ էության, վեկտորային հանրահաշիվն է:

1814թ. Արգանը կոմպլեքս թվերը պատկերում է որպես իրական թվերի կարգավորված զույգեր, իսկ իռլանդացի մաթեմատիկոս Վ.Համիլտոնը 1833թ. կոմպլեքս թվերը ներկայացնում է որպես երկու չափանի գծային տարածություն՝ իհարկե չօգտագործելով ժամանակակից տերմիններ: Համիլտոնը հետագա 10 տարիների ընթացքում մշակում է քվատերնիոնների տեսությունը, որը 4 չափանի վեկտորային տարածության օրինակ է:

1844թ. հրապարակվում է գերմանացի Հ.Գ.Գրասմանի աշխատանքը, որտեղ նա ուսումնասիրում է վերացական օբյեկտներ, սահմանում է գումարման, թվով բազմապատկման և տարրերի բազմապատկման գործողություններ դրանց հետ: Սկսելով պարզագույն տարրերից նա կառուցում է ավելի բարդ օբյեկտներ և ստանում այն, ինչն այսօր անվանում են Գրասմանի հանրահաշիվ:

1857թ. Կելին մշակում է մատրիցային հանրահաշիվը և նշում, որ Համիլտոնի քվատերնիոնները կարելի է սահմանել մատրիցների օգնությամբ: Կելիի աշխատանքները մաթեմատիկոսներին մեկ քայլ մոտեցնում են վերացական տարածությունների գաղափարին:

XIXդ. հարթությունից և "սովորական տարածությունից" աստիճանաբար անցում է կատարվում n-չափանի տարածությունների ուսումնասիրմանը: 1846թ. Կելին և Գրասմանը արդեն բավական ազատ օգտագործում էին այդ գաղափարները:

Գրասմանը հիմնականում զբաղվել է n-չափանի գծային տարածությունների ուսումնասիրմամբ: "Մակընթացության և տեղատվության տեսությունը" աշխատանքում նա մշակել է վեկտորային հանրահաշվի հիմքերը: Կարևոր նշանակություն է ունեցել 1844 թ. տպագրված "Ուսմունք տարածական մեծությունների մասին" աշխատանքը, որտեղ տրվել է բազմաչափ էվկլիդեսյան տարածության սահմանումը՝ դրանով իսկ հիմնադրելով վեկտորային և տենզորային հանրահաշիվը: Մասնավորապես, տրվել է սկալյար արտադրյալի սահմանումը ժամանակակից տեսքով: Գրասմանի ստացած արդյունքներից նշենք նաև վեկտորների գծորեն անկախության գաղափարը, տարածության չափողականության սահմանումը, ինչպես նաև $dimV+dimW = dim(V+W)+dim(V\cap W)$ առնչությունը: Վեկտորային հանրահաշվի հիմնադիրներից է նաև անգլիացի Կ.Վ.Կինգտոնը: Նրա հետմահու տպագրված (1882թ.) "Ողջամտությունը ճշգրիտ գիտություններում" աշխատանքում տրվել է սկալյար արտադրյալի ժամանակակից սահմանումը:

Գրասմանի աշխատանքները շարունակել է իտալացի Ջ. Պեանոն: 1888թ. նա տվել է գծային տարածությունների (վերջավոր և անվերջ) աքսիոմատիկ սահմանումը: Օգտագործելով միանգամայն ժամանակակից նշանակումներ, նա սահմանում է մի տարածության գծային արտապատկերումը մյուսին, սահմանում է օպերատորների գումար և արտադրյալ, ստանում է օպերատորի մատրիցային պատկերումը։ Նա սահմանում է նաև տարածությունների գումարը, հատումը, ապացուցում է, որ վերջավոր չափանի ցանկացած տարածություն ունի բազիս և բերում է անվերջ չափանի տարածության օրինակ։ Պեանոն բավական առաջ էր անցել իր ժամանակակիցներից։ Նրա 1888թ. հրատարակված գիրքը մեծ հաջողությամբ կարելի է շփոթել 1988թ. հրատարակված գրքերի հետ՝ այնքան ժամանակակից լեզվով է այն գրված։

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1.

ա) $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2,$

բ) $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 1,$

գ) $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 = 3,$

դ) $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = -\frac{3}{2},$

ե) $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4,\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4,$

զ) $x_1 = \frac{1}{10}(6 - 15x_2 - x_4),\ \ x_3 = \frac{1}{5}(1 + 4x_4),$

է) համակարգը լուծում չունի,

ը) համակարգը լուծում չունի,

թ) համակարգը լուծում չունի,

ժ) $x_1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4,\ x_2 = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}x_4,\ x_3 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4,$

ի) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$

լ) $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ \ x_4 = x_5,$

խ) $x_1 = -\frac{11}{7}x_3,\ \ x_2 = -\frac{1}{7}x_3,$

ծ) $x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3,\ \ x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3,\ \ x_4 = \frac{x_5}{3}$:

2. **ա)** $a + b + c = 0$, **բ)** $a + b + c \neq 0$, **գ)** ոչ մի դեպքում:

3. **ա)** ոչ մի դեպքում, **բ)** ոչ մի դեպքում, **գ)** a, b-ի ցանկացած արժեքների դեպքում:

4. **ա)** ոչ մի դեպքում, **բ)** $a + 2b - c \neq 0$, **գ)** $a + 2b - c = 0$:

5. $\lambda = 1, 3$:

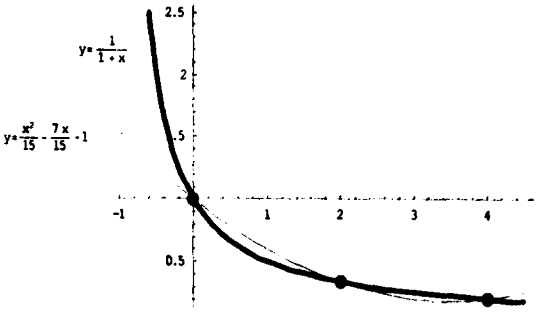
6.

ա) $p(x) = x^2 - 5x + 3$, **բ)** $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$, **գ)** $p(x) = 29 - 18x + 3x^2$,

դ) $p(x) = 2x$, **ե)** $p(x) = 7 + \frac{7}{2}(x - 1987) + \frac{3}{2}(x - 1987)^2$:

8. $p(x) = 1 - \frac{7}{15}x + \frac{1}{15}x^2$:

9. $p(x) = 1 + x$:



10. $p(x) = 106 + \frac{27}{10}(x - 1920) - \frac{13}{100}(x - 1920)^2 + \frac{3}{1000}(x - 1920)^3$, $p(1960) = 198$ միլիոն:

13.

Նկ. 3-ի շղթայի համար՝ $I_1 = 1,\ I_2 = 2,\ I_3 = 1,\ I_4 = 1,\ I_5 = 3,\ I_6 = 2$: Նկ. 4-ի շղթայի համար՝ $I_1 = 1,\ I_2 = 2,\ I_3 = 1$, երբ $U_1 = 2, U_2 = 6$, $I_1 = 0,\ I_2 = 1,\ I_3 = 1$:

14.

ա) $x_1 = 500 + s + t$, $x_2 = 500 + t$, $x_3 = 100 - s - t$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = 500 + s + t$, $x_7 = 500 + t$,

բ) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $x_4 = 0$, $x_5 = -500$, $x_6 = x_7 = 0$,

գ) $x_1 = 0, x_2 = 1500$. $x_3 = 600$, $x_4 = -1500$, $x_5 = 1000$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1500$:

15.

ա) $x_1 = 150 - s + t$, $x_2 = 150 + s - t$, $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = 350 - t$,

բ) $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $x_3 = 50$, $x_4 = 0$, $x_5 = 350$,

գ) $x_1 = 150$, $x_2 = 150$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 350$:

16.

ա) $x_1 = 100 + t$, $x_2 = -100 + t$, $x_3 = 200 + t$, $x_4 = t$,

բ) $x_1 = 100$. $x_2 = -100$, $x_3 = 200$, $x_4 = 0$,

գ) $x_1 = 200$. $x_2 = 0$, $x_3 = 300$, $x_4 = 100$:

17.

ա) $x_1 = 100 - r + t$, $x_2 = 300 - r + s$, $x_3 = r$, $x_4 = -s + t$. $x_5 = s$, $x_6 = t$,

բ) $x_1 = 50$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0$, $x_5 = 50$, $x_6 = 50$:

18.

ա) $x_1 = 700 - s - t,\ x_2 = 300 - s - t,\ x_3 = s,\ x_4 = 100 - t,\ x_5 = t$

բ) $x_1 = 600 - s,\ x_2 = 200 - s,\ x_3 = s,\ x_4 = 0,\ x_5 = 100,$

գ) $x_1 = 700 - s,\ x_2 = 300 - s,\ x_3 = s,\ x_4 = 100,\ x_5 = 0:$

19.

ա) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, **դ)** $\begin{pmatrix} 7 & 34 & 24 \\ -4 & 22 & 22 \\ -1 & 30 & 1 \end{pmatrix}$:

20. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1:$

21.

ա) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$, **ե)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

22. **ա)** $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, **գ)** (13), **դ)** (13) :

23.

ա) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$, **բ)** $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$, **գ)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, եթե n-ը կենտ է, և $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, եթե n-ը զույգ է:

ե) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, եթե n-ը զույգ է և $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, եթե n-ը կենտ է,

զ) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, **է)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **ը)** $\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, **թ)** $a^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

ժ) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$:

24. ա) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ։

25.

ա) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

բ) $Y = 2X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, որտեղ X-ը (2×2) կարգի կամայական մատրից է։

26. ա) $f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ։

27.

ա) արտադրյալի i-րդ և j-րդ տողերը կտեղափոխվեն, բ) արտադրյալի i-րդ տողին կգումարվի c թվով բազմապատկած j-րդ տողը, գ) արտադրյալի i-րդ և j-րդ սյուները կտեղափոխվեն, դ) արտադրյալի i-րդ սյանը կավելանա c թվով բազմապատկած j-րդ սյունը։

28.

$B(CA) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -10 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$, $C(BC) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$(B + C)A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$, $B(C + O) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$(cB)(C + C) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $B(cA) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ։

30. $AC = BC = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 16 & -8 & 12 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ։

31.

ա) $AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 26 \end{pmatrix}$, BA-ն որոշված չէ

բ) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ 4 & -27 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$, BA-ն որոշված չէ

գ) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

դ) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

40.
ա) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$:

41. ա) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

42. $\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$:

46. ա) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$:

47.
ա) $\begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ 4 & -5 \\ -\frac{26}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} -14 & -4 \\ 7 & -17 \\ -17 & -2 \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$:

48. ա) շեղսիմետրիկ, բ) սիմետրիկ, գ) սիմետրիկ, դ) շեղսիմետրիկ:

54. $A = \frac{1}{2}(A - A^T) + \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$:

56. $k = 3$:

57.
ա) $k = 2$, բ) ինքնաչեզոքացնող չէ, գ) $k = 2$, դ) ինքնաչեզոքացնող չէ,

ե) $k = 2$, **զ)** $k = 4$:

62.ա) այո, **բ)** ոչ, **գ)** ոչ, **դ)** ոչ, **ե)** ոչ, **զ)** ոչ:

63. a-ն ցանկացած և $b = 0$, կամ $a = 0; b = 1$, կամ $a = 0; b = -1$:

64. $b \neq 0; a = 0; c = 1$, կամ $b \neq 0; a = 1; c = 0$, կամ $b = 0; a = 0, 1; c = 0, 1$:

68. **ա)** ոչ, **բ)** ոչ, **գ)** այո, **դ)** այո, **ե)** այո, **զ)** այո:

69. Հաջորդ ամիս՝ 350, երկու ամիս հետո՝ 475:

70. Հաջորդ շաբաթ՝ 110 վարակված առնետ, երկու շաբաթ հետո՝ 111:

71. Մեկ ամիս հետո՝ 5025 չծխողներ, 2500 մեկ տուփից պակաս ծխողներ, 2475 մեկ տուփից ավել ծխողներ: Երկու ամիս հետո՝ 5047 չծխողներ, 2499 մեկ տուփից պակաս ծխողներ, 2454 մեկ տուփից ավել ծխողներ:

72. $P^2x = (175, 217, 608)^T$, $P^3x = (187.5, 247.7, 564.8)^T$:

73.

Մեկ տարի հետո՝ $(110000, 100000, 90000)$,

երեք տարի հետո՝ $(123125, 100000, 76875)$:

74. $D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$, $x = (20000, 40000)^T$:

75. $D = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$, $x = (130000, 102500)^T$:

76. $D = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$, $x = (133333.3, 133333.3)^T$:

77.

ա) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$, **բ)** $\frac{1}{62}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, **գ)** $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

դ) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, **ե)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, **զ)** $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

է) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$, **ը)** $\frac{1}{42}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 14 & -9 & 1 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix}$,

թ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **ժ)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

78.

ш) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

щ) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ъ) $$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ы) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ь) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

э) $$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^{n-1}a^{n-1} \\ 0 & 1 & -a & \cdots & (-1)^{n-2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-3}a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ե) $\begin{pmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k} & -\frac{1}{a_1} & -\frac{1}{a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_{n-1}} \\ -\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$, եթե $a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$,

զ) $\frac{1}{na+1}\begin{pmatrix} (n-1)a+1 & -a & -a & \cdots & -a \\ -a & (n-1)a+1 & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & (n-1)a+1 & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & (n-1)a+1 \end{pmatrix}$:

79.
ա) $x=4, y=8$, բ) $x=-8, y=-11$ գ) $x=0, y=0$,
դ) $x=-5, y=-40.5, z=48$, ե) $x=-3, y=-24, z=28$
զ) $x=0, y=0, z=0$:

80.
ա) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

81.
ա) $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

82. $x=4$:

83. $x=6$:

84. $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$:

85.
ա) Հակադարձ մատրիցում տեղերով կփոխվեն i-րդ և j-րդ սյուները,
բ) Հակադարձ մատրիցում i-րդ սյունը կբազմապատկվի $1/c$ թվով,
գ) Հակադարձ մատրիցում j-րդ սյունից կհանվի c թվով բազմապատկված i-րդ սյունը:

88.

ա) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 35 & 17 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$A^{-2} = \begin{pmatrix} -31 & 40 \\ -56 & 1 \end{pmatrix}$, $(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}$,

բ) $(AB)^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 138 & 56 & -84 \\ 37 & 26 & -71 \\ 24 & 34 & 3 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$,

$A^{-2} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 34 \\ 28 & -40 & -14 \\ 30 & 14 & -25 \end{pmatrix}$, $(2A)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -8 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

գ) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -25 & 24 \\ -6 & 10 & 7 \\ 17 & 7 & 15 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^{-2} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 12 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & 15 \end{pmatrix}$, $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

97. $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$:

98. ա) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

99. $(-195, 62, 99, -174, 43, 98, 41, -5, -36, -155, 61, 63, 14, -14, -5, -91, 8, 61, -44, 21, 12, 33, -33, 0)$:

100. $(35, 65, 6, 12, 92, 160, 31, 62, 40, 75, 22, 44, 53, 93, 94, 168)$:

101. "Զգուշացեք ավտոմեքենայից":

102. "Մեզ մոտ չեն ծխում":

103. ա) 5, բ) 0, գ) 59, դ) $k^2 - 4k - 5$, ե) 0, զ) 425, է) 104, ը) $-k^4 - k^3 + 18k^2 + 9k - 21$:

104. ա)$\lambda = 3, \lambda = 2$, բ) $\lambda = 2, \lambda = 6$:

105. $M_{12} = -A_{12} = 2$, $M_{22} = A_{22} = 38$, $M_{32} = -A_{32} = 76$, $M_{42} = A_{42} = -54$, $\Delta = -2a + 38b - 76c - 54d$:

106. ա) $3a-b+2c+d$, բ) $4t-x-y-z$, գ) $2a-b-c-d$:
107. ա) 6, բ) -16:
108. ա) 5, բ) 10, գ) 5, դ) 10:
110. ա) -8, բ) -3, գ) -9, դ) 18, ե) 18, զ) 4:
111.
ա) $x=a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, բ) $x=0,1,2,\cdots,n-1$,
գ) $x=a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$:
112. ա)-21, բ) -5, գ) -7, դ) 18, ե)-21, զ) 6:
113.
ա) $n!$, բ) $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, գ) $2n+1$, դ) $(n-1)!$, ե) $2[1\cdot 3\cdots(2n-3)]$,
զ) $(-1)^{n(n+1)/2}a_1a_2\cdots a_n$, է) $(2n-1)!!$, ը) $(-1)^{n(n-1)/2}x(x-1)\cdots(x-n)$, թ) $(x+a_1+\cdots+a_n)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$: Ցուցում. առաջին սյանը ավելացնել մնացած սյուները,
ժ) $(-1)^{n-1}(x-a_1)\cdots(x-a_n)\left(\frac{x}{x-a_1}+\cdots+\frac{x}{x-a_n}-1\right)$,
ի) 1, լ) $n(-1)^{n-1}$, խ) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$: Ցուցում. յուրաքանչյուր տողից հանել նախորդը, այնուհետև վերջին սյունը ավելացնել մնացած բոլորին:
115.
ա) Կբազմապատկվի $(-1)^{n-1}$-ով,
բ) կբազմապատկվի $(-1)^{n(n-1)/2}$-ով:
116.
ա) Չի փոխվի, բ) չի փոխվի, գ) կդառնա 0, դ) զույգ կարգի որոշիչը կդառնա 0, իսկ կենտ կարգի որոշիչը կկրկնապատկվի:
117. ա) 5, բ) 8, գ) 13, դ) 18, ե) $\frac{n(n-1)}{2}$, զ) $\frac{n(n+1)}{2}$:
118. ա) $-$ նշանով, բ) $+$ նշանով, գ) որոշիչի անդամ չէ, դ) $+$ նշանով:
119. $i=5, k=1$:
120. $i=6, k=2$:
121.
ա) $i=4, j=6, k=2$ կամ $i=6, j=2, k=4$ կամ $i=2, j=4, k=6$,
բ) $i=6, j=4, k=7$ կամ $i=7, j=6, k=4$ կամ $i=4, j=7, k=6$:
122. $+$ նշանով:
123. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ նշանով:
124. ա) $(n-1)!(n-1)$, բ) $(n-1)!(n-1)$, գ) $(n-1)!(n-k)$:
125. ա) 10, բ) 100, գ) 60, դ) 10, ե) -4, զ) -2, է) 195, ը) 90, թ) 8:
126. ա) -84, բ) -84, գ) 98, դ) 43:
127. $|A|\cdot|C|$, $|A|\cdot|C|$, $(-1)^n|A|\cdot|C|$, $(-1)^n|A|\cdot|C|$:
128. ա) 18, բ) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$:

129. **ա)** 0, **եթե** $n > 2$, $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$, **եթե** $n=2$: **Ցուցում.** A մատրիցը ներկայացնել որպես

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ և } \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցների արտադրյալ,

բ) 0, **եթե** $n > 2$, $sin(\alpha_1-\alpha_2)sin(\beta_1-\beta_2)$, **եթե** $n=2$,

գ) 0, **եթե** $n > 2$, $sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$, **եթե** $n=2$,

դ) 0, **եթե** $n > 2$, $-sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$, **եթե** $n=2$,

ե) $\displaystyle\prod_{n\ge i>k\ge 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$,

զ) $\displaystyle C_n^1C_n^2\cdots C_n^n\prod_{n\ge i>k\ge 0}(a_k-a_i)(b_i-b_k)$,

է) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$: **Ցուցում.** A մատրիցի i–րդ տողի և j-րդ սյան էլեմենտը ներկայացնել $(i+(k-1))^{n-1}$ տեսքով և վերլուծել երկանդամի աստիճանի բանաձևով, կամ օգտվել միանգամից նախորդ խնդրի արդյունքից,

ը) $\displaystyle\prod_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)^2$,

թ) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)^2$: **Ցուցում.** A մատրիցը ներկայացնել BC^T արտադրյալի տեսքով, որտեղ

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

130.

ա) $(x^2-1)(x^2-4)$,

բ) $16(x^2-4)(x^2-9)$,

գ) x^2z^2: Ցուցում. տեղափոխելով որոշիչի առաջին երկու տողերը և առաջին երկու սյուները, ապացուցել, որ որոշիչը չի փոխվի եթե x-ը փոխարինենք $-x$-ով: Ստուգելով որ որոշիչը դառնում է զրո $x=0$ դեպքում, ապացուցել, որ այն բաժանվում է x^2 վրա: Նմանատիպ դատողություններ կատարել z-ի համար,

դ) $-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)$,

ե) $(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$,

զ) $(-1)^n(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,

է) $a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$,

ը) $a_1(x+b-a_2)(x+b-a_3)\cdots(x+b-a_n)$:

131.

ա) $-a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$,

բ) $a_1a_2\cdots a_n-a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n$,

գ) $(a_0+\cdots+a_n)x^n$,

դ) $a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n$,

ե) $x_0x_1\cdots x_n\left(\frac{a_0}{x_0}-\frac{a_1}{x_1}+\cdots+(-1)^n\frac{a_n}{x_n}\right)$,

զ) $-b_1b_2\cdots b_n\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)$, $n>1$, **է)** $n+1$, **ը)** $2^{n+1}-1$,

թ) $\frac{1}{3}(5^{n+1}-2^{n+1})$, **ժ)** $\frac{1}{2}(5^{n+1}-3^{n+1})$:

133.

ա) 0, **բ)** $(1-x)^{n-1}[(n-1)x+1]$: Ցուցում. եթե տարրը հավասար է 1-ի՝ այն ներկայացնել $(1-x)+x$ տեսքով, իսկ մնացած տարրերը՝ $0+x$ տեսքով, **գ)** $x^{n-1}(na_1+x)$, **դ)** $x^{n-1}(x+a_1+\cdots+a_n)$:

134.

ա) $x_1x_2\cdots x_n\prod_{i>j}(x_i-x_j)$,

բ) $\prod_{i<j}\sin(\varphi_i-\varphi_j)$, **գ)** $\prod_{i>j}(x_i-x_j)$,

135.

ա) $b_1 b_2 \cdots b_n$, **բ)** $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} 2(n-2)!$, **գ)** $x^n + (-1)^{n+1} y^n$,

դ) $(-1)^{n-1} n!$, **ե)** 0, **զ)** $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n-1}$, **է)** $(-1)^{n-1}(n-1)$, **ը)** $(2n-1)(n-1)^{n-1}$, **թ)** $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$, **ժ)** 1, **ի)** 1,

լ) $(-1)^{n-1} xy \dfrac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x-y}$: Ցուցում. Ներքևի աջ անկյունում տեղադրել $0 = x - x$ և վերլուծել որպես երկու որոշիչների գումար,

խ) $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$,

ծ) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, **կ)** $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$, **հ)** $1!2!3!\cdots n!$,

ձ) $(a^2 - b^2)^n$:

ղ) $\dfrac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$,

ճ) 0, եթե $n > 2$, $1 + x_1 y_1$, եթե $n = 1$ և $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$, եթե $n = 2$,

մ) $\dfrac{xf(y) - yf(x)}{x-y}$, որտեղ $f(z) = (a_1 - z)\cdots(a_n - z)$, **յ)** $\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$,

ն) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}$, **շ)** $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$,

ո) $a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$,

չ) $\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$, որտեղ $f(z) = (a_1 - z)\cdots(a_n - z)$,

պ) $a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \dfrac{1}{a_1} - \cdots - \dfrac{1}{a_n}\right)$,

ջ) $abc_1 c_2 \cdots c_n \left(\dfrac{c_0}{ab} - \dfrac{1}{c_1} - \cdots - \dfrac{1}{c_n}\right)$,

ռ) $(-1)^{n-1} x^{n-2}$: Ցուցում. Յուրաքանչյուր տողից հանել հաջորդը,

ս) $(-1)^n((x-1)^n - x^n)$: Ցուցում. Յուրաքանչյուր տողից հանել նախորդը, աջ ներքևի անկյունում տեղադրել $1 = x + (1-x)$ և ներկայացնել որպես երկու որոշիչների գումար:

136.

ա) Հակադարձելի է, **բ)** ոչ հակադարձելի է,

գ) ոչ հակադարձելի է, **դ)**ոչ հակադարձելի է:

137. **ա)** 135, **բ)** $\frac{8}{5}$, **գ)** $\frac{1}{40}$, **դ)** -5:

138. **ա)** $k = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17})$, $k = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$, **բ)** $k = -1$:

144. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$:

145.

ա) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, զ) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

է) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$, ը) $\frac{1}{42}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 14 & -9 & 1 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix}$,

թ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ժ) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

146. $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0$:

147.

ա) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 2,$

բ) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2},$

գ) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 0,$

դ) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$:

150. ա) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \; y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

բ) $x' = xcos\theta + ysin\theta, \; y' = -xsin\theta + ycos\theta$:

151.

ա) $(0,0,0,0)^T$, բ) $f(x) \equiv 0$, գ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, դ) $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$:

152. մեկ տարրից բաղկացածը՝ այո, երկու տարրից բաղկացածը՝ ոչ:

153. այո:

154. ոչ:

155. այո:

156. ոչ:

157. ոչ:

158. այո:

159. ա) ոչ, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) ոչ:

162. ա) այո, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) ոչ, զ) ոչ, է) այո, ը) ոչ, թ) ոչ, ժ) ոչ, ի) ոչ:

165. ա) ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ե) այո, զ) այո, եթե ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, է) ոչ, ը) ոչ:

166. ա) ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) այո, զ) ոչ:

171.ա) գծորեն անկախ է, բ) գծորեն կախյալ է, գ) գծորեն անկախ է, դ) գծորեն կախյալ է, ե) գծորեն կախյալ է:

172.ա) $\lambda = 15$, բ) ցանկացած λ-ի դեպքում:

173.ա) $t \neq 1, -2$, բ) $t \neq \frac{1}{2}$:

174.ա) այո, $3A - 2B$, բ) ոչ, գ) այո, $-A + 5B$,դ) այո, $0A + 0B$:

186. R^6-ում՝ $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$,

$M_{2,4}$-ում՝ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$
$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

191.ա) 3, բ) 3:

192.
ա) $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, բ) կամայական երկու վեկտոր կազմում են բազիս, գ) $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$:

193.
ա) այո, $dimR = n(n-1)$, բ) այո, $dimR = n$, գ) այո, $dimR = \dfrac{n(n+1)}{2}$, դ) այո, $dimR = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ե) այո, $dimR = \dfrac{n(n-1)}{2}$, զ) ոչ:

194.
ա) $dimR = n+1$: Բազիսը՝ $\{1, x, \cdots, x^n\}$,
բ) $dimR = [n/2]+1$: Բազիսը՝ $\{1, x^2, \cdots, x^{2k},\ k = [n/2]\}$,
գ) $dimR = [(n+1)/2]$: Բազիսը՝ $\{x, x^3, \cdots, x^{2k-1},\ k = [(n+1)/2]\}$,
դ) $dimR = 2n+1$: Բազիսը՝ $\{1, cos\,x, sin\,x, \cdots, cos\,nx, sin\,nx\}$,

ե) $dimR = n+1$: Բազիսը՝ $\{1, cos\,x, \cdots, cos\,nx\}$,

զ) $dimR = n$: Բազիսը՝ $\{sin\,x, sin\,2x, \cdots, sin\,nx\}$,

է) $dimR = 2n+1$:

Բազիսը՝ $\{e^{ax}, e^{ax}cos\,x, e^{ax}sin\,x, \cdots, e^{ax}cos\,nx, e^{ax}sin\,nx\}$:

197. ա) ոչ, ա) այո, ա) այո, ա) ոչ, ա) ոչ:

199. ա) $(8, -3)^T$, բ) $(5, 4, 3)^T$, գ) $(-1, 2, 0, 1)^T$:

200. ա) երկու տողերը տեղերով կփոխվեն, բ) երկու համապատասխան սյուները տեղերով կփոխվեն, գ) մատրիցը կենթարկվի սիմետրիկ ձևափոխության իր կենտրոնի նկատմամբ:

201. ա) $(1, 2, 3)^T$, բ) $(1, 1, 1)^T$, գ) $(0, 2, 1, 2)^T$:

202. ա) $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3', x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3', x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$,

բ) $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4', x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4', x_3 = x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4'x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$:

203. $(0, 3, 2)^T$:

204. $(4, 11, 1)^T$:

206.ա) 3, բ) 3, գ) 2, դ) 2, ե) 3, զ) 2:

207.ա) 3, բ) 3, գ) 3, դ) 2, ե) 3, զ) 4:

208.

ա) 3, եթե $\lambda = \pm 3$, իսկ մնացած դեպքերում 4,

բ) 1, եթե $\lambda = 1$, 3, եթե $\lambda = -3$, իսկ մնացած դեպքերում 4,

գ) 4, եթե $\lambda \neq 1, 1/4$, իսկ մնացած դեպքերում 3:

210.

ա) ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը՝ $\{(8, -6, 1, 0)^T, (-7, 5, 0, 1)^T\}$,

բ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը՝ $\{(1, 0, -5/2, 7/2)^T, (0, 1, 5, -7)^T\}$,

գ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_4 = -\frac{9}{4}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3$, $x_5 = \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը՝ $\{(1, 0, 0, -9/4, 3/4)^T, (0, 1, 0, -3/2, 1/2)^T, (0, 0, 1, -2, 1)^T\}$,

դ) համակարգն ունի միայն զրոյական լուծում, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբ գոյություն չունի,

ե) ընդհանուր լուծումը՝ $x_4 = \frac{1}{11}(-9x_1 + 3x_2 - 10x_3)$, $x_5 = \frac{1}{11}(3x_1 + x_2 + 4x_3)$, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը՝ $\{(1, 0, 0, -\frac{9}{11}, -\frac{3}{11})^T$, $(0, 1, 0, \frac{3}{11}, \frac{1}{11})^T$, $(0, 0, 1, -\frac{10}{11}, \frac{4}{11})^T\}$, գ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}(x_3 - 2x_5)$, $x_4 = 0$, լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը՝ $\{(0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0)^t, (0, -\frac{2}{3}, 0, 0, 1)^T\}$:

211.

ա) ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2)$, $x_2 = \frac{1}{11}(5x_3 - x_4 - 10)$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$,

բ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$,

գ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$,

դ) համակարգն անհամատեղելի է,

ե) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$,

զ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2$, $x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$,

է) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = \frac{1}{5}(34x_1 - 17x_2 - 29)$, $x_4 = \frac{8}{5}(2x_1 - x_2 - 2)$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{22}{5}$, $x_4 = \frac{8}{5}$,

ը) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 2 - \frac{27}{13}x_1 + \frac{9}{13}x_2$, $x_4 = -1 + \frac{3}{13}x_1 - \frac{1}{13}x_2$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \frac{8}{13}$, $x_4 = -\frac{11}{13}$,

թ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{7}x_4$, $x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$,

ժ) համակարգն անհամատեղելի է,

ի) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$ $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$, մասնակի լուծումը ՝ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$,

լ) ընդհանուր լուծումը՝ $x_3 = 13$, $x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2$, $x_5 = -34$, մասնակի լուծումը՝ $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$, $x_4 = 0$, $x_5 = -34$:

212.

ա) համակարգը համատեղելի է, եթե $\lambda = 0$, ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = -\frac{1}{2}(5x_3 + 13x_4 + 3)$, $x_2 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_4 + 7)$,

բ) համակարգը համատեղելի է, եթե $\lambda \neq 0$, ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3$, $x_2 = \frac{9\lambda-16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3$, $x_4 = \frac{1}{\lambda}$, գ) համակարգը համատեղելի է, եթե $\lambda \neq 1$, ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = \frac{43-8\lambda}{8(1-\lambda)} - \frac{9}{8}x_3$, $x_2 = \frac{5}{4(1-\lambda)} + \frac{1}{4}x_3$, $x_4 = \frac{5}{\lambda-1}$,

դ) համակարգը համատեղելի ցանկացած λ-ի դեպքում: Եթե $\lambda = 8$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, եթե $\lambda \neq 8$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$,

ե) համակարգը համատեղելի ցանկացած λ-ի դեպքում, եթե $\lambda = 8$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \frac{3}{2}x_2$: Եթե $\lambda \neq 8$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_2 = \frac{2}{3}(2 - x_1)$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$,

գ) Եթե $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$ ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+3}$, եթե $\lambda = 1$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = 1 - x_2 - x_3$: $\lambda = -2$ դեպքում համակարգն անհամատեղելի է,

է) եթե $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$, եթե $\lambda = 1$, ապա ընդհանուր լուծումն է՝ $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, $\lambda = -3$ դեպքում համակարգն անհամատեղելի է,

ը) եթե $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ ապա համակարգն ունի միակ լուծում՝$x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, եթե $\lambda = 0$, կամ $\lambda = -3$՝ համակարգն անհամատեղելի է:

214.

ա) $P+Q = M$, $P \cap Q$-ն անկյունագծային մատրիցների ենթատարածությունն է,

բ) $P + Q = M$, $P \cap Q = o$,

գ) $P+Q$-ն կազմված է այն մատրիցներից, որոնք գլխավոր անկյունագծից ներքև գտնվող և նրան զուգահեռ ուղիղների վրա ունեն միևնույն տարրերը, $P \cap Q$-ն a_1E սկալյար մատրիցների ենթատարածությունն է:

215. ա) $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$, բ) $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 2$:

216.

ա) Գումարի բազիսը՝ $\{a_1, a_2, b_1\}$: Հատման բազիսը՝ $\{2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)^T\}$,

բ) Գումարի բազիսը՝ $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}$: Հատման բազիսը՝ $\{b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3, b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3\}$,

գ) Գումարի բազիսը՝ $\{a_1, a_2, a_3, b_1\}$: Հատման բազիսը՝ $\{a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = (1, 2, 2, 1)^T, 2a_1 + 2a_3 = b_1 + b_3 = (2, 2, 2, 2)^T\}$:

223.

ա) $\lambda = 3$, բազիսը՝ $\{(1/2, 1)^T\}$,$\lambda = -1$, բազիսը՝$\{(0, 1)^T\}$,

բ) $\lambda = 4$, բազիսը՝ $\{(3/2, 1)^T\}$

գ) $\lambda=\sqrt{12}$, բազիսը՝$\{(3/\sqrt{12}, 1)^T\}$, $\lambda =-\sqrt{12}$, բազիսը՝$\{(-3/\sqrt{12}, 1)^T\}$,

դ) սեփական արժեք չունի,

ե) $\lambda = 0$, բազիսը՝ $\{(1, 0)^T,\ (0, 1)^T\}$,

զ) $\lambda = 1$, բազիսը՝ $\{(1, 0)^T,\ (0, 1)^T\}$:

224.

ա) $\lambda = 1$, բազիսը՝ $\{(0, 1, 0)^T\}$, $\lambda = 2$, բազիսը՝ $\{(-1/2, 1, 1)^T\}$, $\lambda = 3$, բազիսը՝ $\{(-1, 1, 1)^T\}$,

բ) $\lambda = 0$, բազիսը՝ $\{(5/3, 1/3, 1)^T\}$,

$\lambda = \sqrt{2}$, բազիսը՝ $\{((15+5\sqrt{2})/7, (-1+2\sqrt{2})/7, 1)^T\}$,
$\lambda = -\sqrt{2}$, բազիսը՝ $\{((15-5\sqrt{2})/7, (-1-2\sqrt{2})/7, 1)^T\}$,
գ) $\lambda = -8$, բազիսը՝ $\{(-1/6, -1/6, 1)^T\}$,
դ) $\lambda = 2$, բազիսը՝ $\{(1/3, 1/3, 1)^T\}$,
ե) $\lambda = 2$, բազիսը՝ $\{(-1/3, -1/3, 1)^T\}$,
զ) $\lambda = -4$, բազիսը՝ $\{(-2, 8/3, 1)^T\}$, $\lambda = 3$, բազիսը՝ $\{(5, -2, 1)^T\}$:
225.
ա) $\lambda = 1$, բազիսը՝ $\{(0,0,0,1)^T, (2,3,1,0)^T\}$, $\lambda = -2$, բազիսը՝ $\{(-1,0,1,0)^T\}$, $\lambda = -1$, բազիսը՝ $\{(-2,1,1,0)\}$,
բ) $\lambda = 4$, բազիսը՝ $\{(3/2, 1, 0, 0)^T\}$:
230. ա) $(59049, 0, 59049)^T$, բ) $(1048576, 1048576, 1048576)^T$:

233.
$A^2 = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 375 & 750 \\ 125 & 250 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 1875 & 3750 \\ 625 & 1250 \end{pmatrix}$:

234. $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \\ 10 & -24 & 15 \end{pmatrix}$:

236. $\lambda = 0, 1$:
237. $\lambda = 0$:
241.
ա) երեքշաբթի՝ $(0.4667, 0.3333, 0.2)^T$,
չորեքշաբթի՝ $(0.4933, 0.3067, 0.2)^T$,
բ) $(0.519993, 0.280007, 0.2)^T$,
գ) $(0.52, 0.28, 0.2)^T$,
253.
ա) $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

բ) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, գ) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

դ) $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$։

254.

ա) ոչ,

բ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

գ) ոչ,

դ) $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

ե) ոչ,

զ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$։

256.

ա) $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}$,

բ) $A^{6} = \begin{pmatrix} -188 & -378 \\ 126 & 253 \end{pmatrix}$,

գ) $A^{8} = \begin{pmatrix} 384 & 256 & -384 \\ -384 & -512 & 1152 \\ -128 & -256 & 640 \end{pmatrix}$։

263. ա) ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) ոչ, զ) ոչ։

264. $15, \sqrt{57}, 2\sqrt{13}$։

265. $-73, \sqrt{83}, \sqrt{367}$։

266. ա) Ոչ, բ) ոչ։

267. $-6, \sqrt{35}, 3\sqrt{6}$։

268. $\frac{16}{15}, \frac{\sqrt{10}}{5}, \sqrt{2}$։

269. $-4, \sqrt{11}, \sqrt{21}$:
270. Այո, եթե $a = 0$:
280. **ա)** $\approx 120.5^\circ$, **բ)** $\frac{\pi}{2}$, **գ)** $\frac{\pi}{2}$:
281. **ա)** $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})^T, (\frac{4}{5}, \frac{8}{5})^T$, **բ)** $(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})^T, (-\frac{5}{14}, -\frac{15}{14}, \frac{10}{14})^T$:
283. $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^T$:
284. **ա)** $(2, 2, 1, 0)^T$, $(5, -2, -6, -1)^T$,
բ) $(1, -2, 1, 0)^T$, $(25, 4, -17, -6)^T$:
285.
ա) $\pm(2/3, -2/3, -1/3, 0)^T$ էլեմենտներից որևէ մեկը,
բ) $(1/2, -1/2, 1/2, -1/2)^T$, $(1/2, -1/2, -1/2, 1/2)^T$:
286. $(s, 3t, 4t)^T$:
289. **ա)** $(\frac{4\sqrt{13}}{13}, \frac{7\sqrt{13}}{13})^T$,**բ)** $(\frac{\sqrt{10}}{2}, -2, -\frac{\sqrt{10}}{2})^T$,**գ)** $(11, 2, 15)^T$:
296. **ա)** Օրթոնորմալ չէ: $(1, 0)^T, (0, 1)^T$, **բ)** օրթոնորմալ է, **գ)** օրթոնորմալ չէ, գծորեն կախյալ է, **դ)** օրթոնորմալ չէ, գծորեն կախյալ է:
297. **ա)** Օրթոնորմալ չէ:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

բ) օրթոնորմալ է, **գ)** օրթոնորմալ է:
298.
ա) Օրթոնորմալ չէ: $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)^T, \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^T,$
բ) օրթոնորմալ է, **գ)** օրթոգոնալ չէ, սակայն օրթոգոնալ է: Նորմավորելուց հետո՝

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^T \left(\frac{7}{33}, \frac{4}{33}, \frac{32}{33}\right)^T \left(\frac{2\sqrt{2}}{11}, -\frac{15}{11\sqrt{2}}, \frac{1}{11\sqrt{2}}\right)^T,$$

դ) օրթոնորմալ է:
299.
ա) $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T, \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T\right\}$, **բ)** $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T\right\}$,

գ) $\left\{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)^T, \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^T, (0, 0, 1)^T\right\}$,

դ) $\left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T, \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T\right\}$:

300. $\left\{(1,0,0)^T, \left(0, \frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)^T, \left(0, -\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)^T\right\}$ և
$\{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,1,0)^T\}$:

301. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)^T\right\}$:

302.
ա) օրթոնորմալ է, բ) օրթոնորմալ չէ, օրթոնորմավորումից հետո $\{x^2, x, 1\}$,
գ) օրթոնորմալ չէ, օրթոնորմավորումից հետո $\{\frac{x^2-1}{\sqrt2}, -\frac{x^2-2x+1}{\sqrt6}\}$:

303. $\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T, \left(\frac{\sqrt2}{6}, \frac{2\sqrt2}{3}\right)^T\}$:

304. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}\right)^T, \left(\frac{2}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, 0\right)^T\right\}$:

305. $\{1, \sqrt3(2x-1), \sqrt5(6x^2-6x+1)\}$:

306. ա) Օրթոնորմալ է,
բ) օրթոնորմալ չէ: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$:

307.
ա) $(1,2,2,-1)^T$, $(2,3,-3,2)^T$, $(2,-1,-1,-2)^T$,
բ) $(1,1,-1,-2)^T$, $(2,5,1,3)^T$,
գ) $(2,1,3,-1)^T$, $(3,2,-3,-1)^T$, $(1,5,1,10)^T$:

308.
ա) $\left\{\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}, 0\right)^T, \left(0, -\frac{2\sqrt5}{5}, 0, \frac{\sqrt5}{5}\right)^T\right\}$,
բ) $\left\{\left(\frac{\sqrt2}{2}, 0, \frac{\sqrt2}{2}, 0\right)^T, \left(\frac{\sqrt6}{6}, 0, -\frac{\sqrt6}{6}, \frac{\sqrt6}{3}\right)^T\right\}$:

310. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ե) այո, զ) ոչ:

322.
ա) $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$,

բ) $P = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$,

գ) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$,

դ) $P = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$:

323.

ա) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, բ) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

գ) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, դ) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$:

324. ա) ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ:

325. $(2,-2,-1,0)^T$, $(1,1,0,-1)^T$:

326. $S^{\perp} = lin\{(0,0,1,0)^T, (2,-1,0,1)^T\}$,
$(S^{\perp})^{\perp} = lin\{(1,2,0,0)^T, (0,1,0,1)^T\}$:

327. $(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$:

328. $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3})^T$:

329. $(1,-1,2)^T$:

330.

ա)
$\mathcal{R}(A) = lin\{(1,0)^T, (0,1)^T\} = R^2$, $\mathcal{N}(A^T) = lin\{(0,0)^T\}$,
$\mathcal{N}(A) = lin\{(-3,0,1)^T\}$, $\mathcal{R}(A^T) = lin\{(1,0,3)^T, (0,1,0)^T\}$,

բ)

$\mathcal{R}(A) = lin\{(1,0,1,1)^T, (0,1,1,2)^T\} = R^2,$
$\mathcal{N}(A^T) = lin\{(-1,-1,1,0)^T, (-1,-2,0,1)^T\}$
$\mathcal{N}(A) = lin\{(-1,-1,0,1)^T, (0,-1,1,0)^T),$
$\mathcal{R}(A^T) = lin\{(1,0,0,1)^T, (0,1,1,1)^T\}$:

332. $y = 3a_1 - 2a_2 = (1,-1,-1,5)^T,\ y^\perp = (3,0,-2,-1)^T$:

333. $y = 2a_1 - a_2 = (3,1,-1,-2)^T,\ y^\perp = (2,1,-1,4)^T$:

334. $y = (5,-5,-2,-1)^T,\ y^\perp = (2,1,1,3)^T$:

335.

ա) սկալյար մատրիցների ենթատարածությունը,

բ) սիմետրիկ մատրիցների ենթատարածությունը:

337.

ա) $x = (1,-1)^T$, բ) $x = (2,-2,1)^T$:

338. $T(t) = 30.9306 + 2.0463t$:

339. $T(t) = 33.3426 + 2.37757lnt$:

340. $T(t) = 30.9622 + 1.98957t + 0.019944t^2$:

341.

ա) $\frac{4}{3} + \frac{3}{4}x$: Միջին քառակուսային սխալը՝ $\frac{1}{6}$:

բ) $4 - 2x$: Միջին քառակուսային սխալը՝ 2:

343.

ա) $1.3 + 0.6x$,

բ) $\frac{10}{3} + \frac{8}{7}x$,

գ) $1.75 - 0.65x$,

դ) $-\frac{1}{3} + 2x$:

345.

ա) $g(x) = -\frac{1}{6} + x$,

բ) $g(x) \approx 0.1945 + 6x$,

գ) $g(x) \approx 0.1148 + 0.6644x$:

346.

ա) $g(x) = 1.5x^2 - 0.6x + 0.05$,

բ) $g(x) \approx -0.0505 + 1.3122x - 0.4177x^2$:

347.

ա) $(-1,7)^T,\ (11,-8)^T$, բ) $(1,5,4)^T,\ (5,-6,t)^T$,

գ) $(-14,-7)^T,\ (1,1,t)^T$:

348.

ա) այո, եթե $a = 0$, բ) այո, եթե $c = o$,գ) այո, դ) ոչ, ե) այո, զ) ոչ, է) ոչ, ը) ոչ, թ) այո, ժ) այո, ի) այո, լ) այո:

349. $n = 4, m = 3, (-1, 9, 9)^T, (4t, t, 0, -t)^T$:

350. $n = 2, m = 3, (8, 12, 4)^T, (-2, -1/2)^T$:

351. $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$:

352. $T\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$:

353. $x^2 - 3x - 5$:

354. $\begin{pmatrix}12 & -1\\7 & 4\end{pmatrix}$:

355. $T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$:

356. $T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}$:

357.
$T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)/2\\(\alpha+\beta)/2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix},$
$T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.5\\3.5\end{pmatrix}, T^2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.5\\3.5\end{pmatrix}$:

359. $(t, 0)$:

360. (t, t) :

364.
ա) R^3, բ) $\{o\}$, գ) $\{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1, a_2, a_3 \in R^1\}$,
դ) $\{a_1x; a_1 \in R^1\}$, ե) $\{o\}$, զ) $\{(t, t)^T; t \in R^1\}$:

365. ա) $\mathcal{N}(T) = \{o\}, \mathcal{R}(T) = R^2$, բ) $\{(-4, -2, 1)^T\}, \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$:

366. ա) $\mathcal{N}(T) = \{o\}$, $\mathcal{R}(T) = R^2$, բ) $\mathcal{N}(T) = \{o\}$, $dim(\mathcal{R}(T)) = 2$:

367. $p(x) = a_0$:

368. $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, որտեղ $a_0 + a_1/2 + a_2/3 = 0$:

369. $dim(\mathcal{N}(T)) = 2,\ dim(\mathcal{R}(T)) = 1$,
միջուկի բազիսը՝ $\{(1, 0, -2)^T,\ (0, 1, 1)^T\}$:

371. ա) $dim(\mathcal{R}(T)) = n$, բ) $dim(\mathcal{R}(T)) < n$:

376.
ա) $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, բ) $A = \begin{pmatrix}5 & -3\\1 & 1\\1 & -4\end{pmatrix}$,

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, դ) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$:

377. ա) $(35, -7)$, բ) $(0, 0)$:

378.

ա) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (-3, -4)^T$, բ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (3, 4)^T$,

գ) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, (-4\sqrt{2}, 0)^T$,

դ) $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3} + 1)^T$,

ե) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (3, 2, -2)^T$, զ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (-2, 3, 4)^T$:

379.

ա) $(T_2T_1)_B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $(T_1T_2)_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$,

բ) $(T_2T_1)_B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $(T_1T_2)_B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$:

380.

ա) $T^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1 + v_2)/2 \\ (v_1 - v_2)/2 \end{pmatrix}$,

բ) հակադարձելի չէ,

գ) $T^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1/5 \\ v_2/5 \end{pmatrix}$:

381. ա) $(9, 5, 4)^T$, բ) $(-1, 5)^T$:

382. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

383. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$:

387. n^2:

388. nm:

390. ա) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$:

391. Ձևափոխության մատրիցի i–րդ սյունը բաղկացած է $v_1, \cdots, v_n$ բազիսում u_i վեկտորի կոորդինատներից:

392. $\begin{pmatrix} 20/3 & -5/3 & 5 \\ -16/3 & 4/3 & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$:

393. $(T_1)_B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$, $(T_2)_B = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$:

394. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$:

395.

ա) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

բ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$:

396. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

397. ա) $(T)_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$, բ) $(T)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

գ) $(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

398. $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(Tv)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $(Tv)_{B'} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 5 \end{pmatrix}$:

406. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

407. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29.5 & -25 \end{pmatrix}$:

413. $\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$:

414.ա) այո, բ) այո, եթե $a = 0$:

415.

ա) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,-4)^T$, $f_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^T$,

$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$:

բ) $f_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^T$, $f_2 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)^T$, $f_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)^T$,

$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$:

417. $T^* = -T$:

421. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

422. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$:

423. $\begin{pmatrix} 20 & -14 & 5 \\ 40 & -30 & 11 \\ 55 & -43 & 16 \end{pmatrix}$:

430.

ա) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$,

բ) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = -y_2 + y_3$,

գ) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$,

դ) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$,

$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$,

$x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$,

ե) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$,

$x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$,

զ) $y_1^2 - y_2^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$,

է) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$,

$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_1 - \frac{1}{15}\sqrt{15}y_2 + \frac{2}{85}\sqrt{85}y_3 - \frac{1}{629}\sqrt{629}y_4$,

$x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{15}y_2 - \frac{6}{85}\sqrt{85}y_3 + \frac{3}{629}\sqrt{629}y_4$,

$x_3 = \frac{1}{17}\sqrt{85}y_3 + \frac{6}{629}\sqrt{629}y_4$, $x_4 = \frac{1}{37}\sqrt{629}y_4$:

431.

ա) $\lambda > 2$, **բ)** $|\lambda| < \sqrt{5/3}$, **գ)** $-0.8 < \lambda < 0$, **դ)** Այդպիսի λ–ի արժեքներ չկան, ե) Այդպիսի λ-ի արժեքներ չկան:

432.

ա) $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$,

$$x_1=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,\ x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3,$$
$$x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,$$

բ) $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$;

$$x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3,\ x_2=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,$$
$$x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,$$

գ) $3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$,

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,$$
$$x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2,$$

դ) $5y_1^2-y_2^2-2y_3^2$,

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,$$
$$x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2,$$

ե) $9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$,

$$x_1=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,\ x_2=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3,$$
$$x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3,$$

զ) $3y_1^2-6y_2^2$

$$x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\ x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}y_2,$$
$$x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3:$$

433. ա) $\lambda < -20$, բ) $\lambda < -0.6$:

434. ա) $x = -2, y = -3$, բ) $x = 2, y = 1$:

435. ա) $5+3i$, բ) $-3-7i$, գ) $4-8i$, դ) $-4-5i$, ե) $19+14i$, զ) $-\frac{11}{2} - \frac{17}{2}i$:

436. ա) $2+3i$, բ) $-1-2i$, գ) $-2+9i$:

437. ա) $k_1 = -5, k_2 = 3$, բ) $k_1 = 3, k_2 = 1$:

438. ա) $z_1 z_2 = 3+3i, z_1^2 = -9, z_2^2 = -2i$, բ) $z_1 z_2 = 26, z_1^2 = -20 + 48i, z_2^2 = -5 - 12i$, գ) $z_1 z_2 = \frac{11}{3} - i, z_1^2 = \frac{4}{9}(-3+4i), z_2^2 = -6 - \frac{5}{2}i$:

439. ա) $9-8i$, բ) $-63+16i$, գ) $-32-24i$, դ) $22+19i$:

440. ա) $1+18i$, բ) $4i$, գ) $7+17i$, դ) $10-11i$, ե) $14-5i$, զ) $5+i$,

է) $13/2 - 1/2\,i$, ը) $11/5 - 27/5\,i$, թ) 4, ժ) $52i$:

441. ա) i, բ) -1, գ) $-i$:

442. ա) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, բ) $\pm(2-i)$, գ) $\pm(3-2i)$, դ) $z_1 = 1-2i, z_2 = 3i$,

ե) $z_1 = 5-2i, z_2 = 2i$, զ) $z_1 = 5-3i, z_2 = 2+i$, է) $z = \pm i$,

ը) $z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}$:

443.

ա) $5(\cos 0 + i\sin 0)$, բ) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, գ) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$,

դ) $3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$, ե) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, զ) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$,

է) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, ը) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

թ) $2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$, ժ) $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$, ի) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$,

լ) $2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, խ) $2(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$, ծ) $\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$,

կ) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$:

444. ա) 2^{50}, բ) 2^{150}, գ) -2^{30}, դ) -2^{6}, ե) $2^{15}i$:

445. ա) $3+4i$, բ) $5-12i$:

446. ա) $\begin{pmatrix} 1+6i & -3+7i \\ 3+8i & 3+12i \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 3-2i & 6+5i \\ 3-5i & 13+3i \end{pmatrix}$,
գ) $\begin{pmatrix} 3+3i & 2+5i \\ 9-5i & 13-2i \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 9+i & 12+2i \\ 18-2i & 13+i \end{pmatrix}$:

449.
ա) $x^2+y^2=1$,
բ) կոորդինատների սկզբնակետից դուրս եկող ճառագայթ, որը աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է $\pi/3$ անկյուն,
գ) $x^2+y^2 \leq 4$, դ) $(x-1)^2+(y-1)^2<1$, ե) $(x+3)^2+(y+4)^2 \leq 25$,
զ) $4<x^2+y^2<9$, է) $1 \leq x^2+(y-2)^2<4$, ը) $|x| \leq 1$, թ) $|y|=1$,
ժ) $\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}=1$, ի) $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1$, լ) $0<y<1$:

450. ա) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$, բ) $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, գ) $\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}, -3, -\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, դ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, -i$, ե) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$,
զ) $-1+i\sqrt{3}, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, 1-i\sqrt{3}$:

451. ա) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$, բ) $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$:

453.
ա) $\begin{pmatrix} 13+13i & -8+12i & -33-22i \\ 1+i & 0 & i \\ 7+9i & -6+6i & -16-16i \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 6+2i & -11+19i \\ -1+6i & -9-5i \end{pmatrix}$,
գ) $\begin{pmatrix} 6i & 1+i \\ -6-i & 5-9i \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} 22-7i & 2+10i \\ -5-4i & 6-8i \\ 9-i & -1-i \end{pmatrix}$:

455. ա) $1-i$, բ) $-1+8i$, գ) $-5-3i$, դ) $5+17i$, ե) $7+9i$,
զ) $7+9i$:

456.
ա) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^5=A$
բ) $A^{57}=A, A^{1995}=A^3$,
գ) $A^n=A, n=1,5\cdots,4k+1, A^n=A^2, 2,6,\cdots,4k+2, A^n=A^3, n=3,7\cdots,4k+3, A^n=A^4, n=4,8,\cdots,4k$:

457.
ա) $A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} i & -3i \\ -2+i & 6 \end{pmatrix}$,
բ) հակադարձելի չէ,

գ) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$:

458. ա) $-\frac{5}{3} - i\frac{10}{3}$, բ) i:

459.

ա) $x_1 = i, x_2 = -i$, բ) $x_1 = 1+i, x_2 = 1-i$,

գ) $x_1 = \frac{1}{2} + i, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} - i$, դ) $x_1 = i, x_2 = 0, x_3 = -i$:

460. ա) $x_1 = -(1+i)t, x_2 = t$, բ) $x_1 = (1+i)t, x_2 = 2t$:

461. $x_1 = -(1-i)t, x_2 = -it, x_3 = t$:

462.

ա) $(3i, -i, -2-i, 4)$, բ) $(3+2i, -1-2i, -3+5i, -i)$,

գ) $(-1-2i, 2i, 2-i, -1)$, դ) $(-3+9i, 3-3i, -3-6i, 12+3i)$,

ե) $(-3+2i, 3, -3-3i, i)$, զ) $(-1-5i, 3i, 4, -5)$:

463. $(2+i, 0, -3+i, -4i)$:

464. $c_1 = -2-i, c_2 = 0, c_3 = 2-i$:

466. այո:

467. ոչ:

468. ա):

469. բ):

470. ա) և դ):

471. ա), բ) և դ):

472.

ա) $(3-2i)u + (3-i)v + (1+2i)w$, բ) $(2+i)u + ((-1+i)v + (-1-i)w$,

գ) $0u + 0v + 0w$, դ) $(-5-4i)u + (5-2i)v + (2 = 4i)w$:

473. ա) այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ:

474. $f - 3g - 3h = 0$:

475.

ա) $(-1-i, 1)^T$, բ) $(1, 1, -i)^T$,

գ) $(3+6i, -3i, 1)^T$, դ) $(5/2i, -1/2, 1, 0)^T, (-1/4, 3/4i, 0, 1)^T$:

476.

ա) $\lambda_1 = 2+3i, \lambda_2 = 2-3i, \lambda_3 = 1$,

$(3/4 - i3/4, 5/4 - i3/4, 1)^T, (3/4 + i3/4, 5/4 + i3/4, 1)^T, (1, 2, 1)^T$,

բ) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2, (0, 0, 1)^T, (-i, 1, 0)^T, (i, 1, 0)^T$,

գ) $\lambda_1 = i\sqrt{14}, \lambda_2 = -i\sqrt{14}, \lambda_3 = 0$,

$(-3/5 \pm i\sqrt{7}/5\sqrt{2}, 1/5 \pm i3\sqrt{7}/5\sqrt{2}, 1)^T, (3, -1, 2)^T$,

դ) $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 1$,

$(-1/2 + i, 1/2 - i/2, 1)^T, (-1/2 - i, 1/2 + i/2, 1)^T, (-2, 1, 1)^T$:

477. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

479. ա) $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+2i \\ -1+5i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

480. $lin\{(0,0)\}$:

481. ա) $2i$, բ) 37:

484. ա) $4-4i$, բ) 42: **485.** ա) ոչ, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո:

486. -9-5i:

487. ոչ:

489. ա) $3\sqrt{10}$, բ) $\sqrt{14}$:

490. ա) $7\sqrt{2}$, բ) $2\sqrt{3}$:

491. ա) $-i\frac{8}{3}$, բ) չկան այդպիսի արժեքներ:

492. ա) այո, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ:

493. ա) ոչ, բ) այո, գ) այո:

495. ա) $\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{3i}{\sqrt{10}}\right)^T, \left(\frac{3i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}\right)^T\right\}$, բ) $\{(i,0)^T, (0,-i)^T\}$:

496.

ա) $\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^T, \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(\frac{i}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}\right)^T\right\}$,

բ) $\left\{(i,0,0)^T, \left(0, \frac{7i}{\sqrt{53}}, -\frac{2i}{\sqrt{53}}\right)^T, \left(0, \frac{2i}{\sqrt{53}}, \frac{7i}{\sqrt{53}}\right)^T\right\}$:

497.

$\left(0, \frac{2i}{\sqrt{5}}, \frac{i}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \left(\frac{5i}{\sqrt{30}}, -\frac{i}{\sqrt{30}}, \frac{2i}{\sqrt{30}}, 0\right)^T,$

$\left(\frac{i}{\sqrt{10}}, \frac{i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}, -\frac{2i}{\sqrt{10}}\right)^T, \left(\frac{i}{\sqrt{15}}, \frac{i}{\sqrt{15}}, -\frac{2i}{\sqrt{15}}, \frac{3i}{\sqrt{15}}\right)^T$:

503.

ա) $\begin{pmatrix} -2i & 4 & 5-i \\ 1+i & 3-i & 0 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -2i & 4 & -i \\ 1+i & 5+7i & 3 \\ -1-i & i & 1 \end{pmatrix}$,

գ) $\begin{pmatrix} -7i \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix}$, դ) $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} \end{pmatrix}$:

504. ա) ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ղ) այո:

505. $k = 3+5i, l = i, m = 2-4i$:

506. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ղ) ոչ:

507.

ա) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5}i & -\frac{3}{5}i \end{pmatrix}$, բ) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$,

գ) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{3}-i) & \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$,

դ) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3-i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4-3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$:

510.

ա) $P = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,

բ) $P = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

գ) $P = \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

դ) $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3-i}{\sqrt{14}} & \frac{3-i}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

ե) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, գ) $P = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

511. $\lambda = 2 \pm i\sqrt{15}$:

527.

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, բ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, գ) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

դ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ե) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, զ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

է) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ը) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$:

528.

ա) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = (1,4,3)^T$, $e_2 = (1,0,0)^T$, $e_3 = (3,0,1)^T$:

բ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = (1,-3,-2)^T$, $e_2 = (1,0,0)^T$, $e_3 = (1,0,1)^T$:

գ) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = (6,6,-8)^T, e_2 = (3,1,0)^T, e_3 = (2,1,-1)^T$:

դ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $e_1 = (3,1,1)^T$, $e_2 = (1,0,0)^T$, $e_3 = (5,0,1)^T$:

532.

ա) $e^A = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$, բ) $e^A = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$, գ) $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$, դ) $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$, ե) $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2/2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$:

533. ա) e^2, բ) e^{-1} :

535. mpn բազմապատկում և $mp(n-1)$ գումարում:

536. $(k-1)n^3$ բազմապատկում և $(k-1)(n^3-n^2)$ գումարում:

543. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}$:

544. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$:

545.

ա) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$,

բ) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$,

գ) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$,

դ) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$:

546.

ա) $x_1 = -8$, $x_2 = 3$, $x_3 = -7$, $x_4 = 6$,

բ) $x_1 = 5$, $x_2 = -7 - x_4$, $x_3 = 3 - x_4$, $x_4 = x_4$:

548. Հարկավոր է փոխել A մատրիցի երկրորդ և երրորդ տողերը: Ստացված մատրիցն ունի LU-վերլուծություն, որտեղ

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} :$$

549.

ա) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

բ) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

550.

ա) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

բ) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

գ) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

551.

ա) $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \sqrt{\frac23}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}\sqrt2 & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & \sqrt{\frac32}\end{pmatrix}$,

բ) $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}\sqrt3 & \sqrt3\\ 0 & \sqrt2\end{pmatrix}$,

գ) $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\sqrt{\frac23} & 0\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}\sqrt3 & \frac{2}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \sqrt{\frac23} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$,

դ) $Q=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & -\frac12 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}2 & 2 & -\frac12\\ 0 & 2 & \frac12\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$,

552.

ա) $Q=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac56 & \frac16 & \frac16\\ \frac12 & \frac16 & \frac16 & -\frac56\\ \frac12 & \frac16 & -\frac56 & \frac16\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, պ) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ջ) $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$,

ռ) $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 28 & 14 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{49} \\ \frac{5}{98} \\ -\frac{2}{49} \end{pmatrix}$,

ս) $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 38 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

553.

ա) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 0 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \frac{5}{36} \\ 0 \\ -\frac{1}{36} \end{pmatrix}$,

բ) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$,

q) $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \frac{59}{98} \\ \frac{5}{98} \end{pmatrix}$:

564. $A^+ = (0)$.
566. $A^+ = A^T$.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ա.Գ.Թունիեվ, Յու.Մ.Մովսիսյան, Գծային հանրահաշվի և Գծային ծրագրավորման մեթոդներ: Ասողիկ հրատարակչություն, Երևան, 2003:

2. Յու.Ռ.Հակոբյան, Թվային մեթոդներ: Հանրագիտարան "Արմենիկա", Երևան, 2003:

3. Պ.Է.Մելիք-Ադամյան, Գծային Հանրահաշիվ (դասախ.): ԵՊՀ-ի հրատարակչություն, Երևան, 2002:

4. Հ.Միքայելյան, Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց: Նաիրի, Երևան, 2001.

5. Պ.Է.Մելիք-Ադամյան, Գծային օպերատորի ժորդանի ձևը և նրա որոշ կիրառությունները (դասախոսություններ): ԵՊՀ-ի հրատարակչություն, Երևան, 1985:

6. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк, Линейная Алгебра. Москва, Наука-Физматлит, 1999.

7. Д.К.Фадеев, И.С.Соминский, Задачи по высшей алгебре. Санкт-Петербург,1998.

8. Р.Хорн, Ч.Джонсон, Матричный анализ. Издательство "Мир" 1989.

9. А.И.Кострикина, Сборник задач по алгебре, Москва, Наука, 1987.

10. Л.А.Беклемишева, А.Ю.Петрович, И.А.Чубаров, Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Москва, Наука, 1987.

11. Н.Ч.Крутицкая, А.А.Шишкин, Линейная Алгебра в вопросах и задачах. Москва, Высшая Школа, 1985.

12. И.В.Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре. Москва, Наука, 1984.

13. А.Г.Курош, Курс высшей алгебры, Москва, Наука, 1971.

14. Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, Наука, 1966.

15. Л.Я.Окунев, Сборник задач по высшей алгебре, Москва, Просвещение, 1964.

16. Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц. Москва, Гостехиздат, 1953.

17. И.М.Гельфанд, Лекции по линейной алгебре. Москва, Гостехиздат, 1951.

18. А.И.Мальцев, Основы линейной алгебры. Москва, Гостехиздат, 1948.

19. Roland E.Larson and Bruce H. Edwards, Elementary Linear algebra. D.C.Health and Company, 1996.

20. G.H.Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations. John Hopkins University Press, London, 1996.

21. G.Strang, Linear Algebra and its Applications. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, Florida, 1988.

22. Howard Anton. Elementary Linear algebra. John Wiley & Sons,1987.

23. Jim Hefferon, Linear Algebra. Saint Michael's College, Colchester, Vermont, USA.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գ Լ ՈՒ Խ   Ե Ր Ր Ո Ր Դ
ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գ Լ ՈՒ Խ   Չ Ո Ր Ր Ո Ր Դ
ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ

Գ Լ ՈՒ Խ   Հ Ի Ն Գ Ե Ր Ո Ր Դ
ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գ Լ ՈՒ Խ Վ Ե Ց Ե Ր Ո Ր Դ
ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՃՇԳՐԻՏ ԵՎ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

Գ.Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Վ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Գ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Բուհական ուսումնական ձեռնարկ

Հրատ. խմբագիր՝ Դ.Վ. Պետրոսյան
Տեխ. խմբագիր՝ Վ.Ջ. Բդոյան

Ստորագրված է տպագրության 20.01.05 թ.:
Չափսը՝ $60\times84^{1}/_{16}$: Թուղթ՝ օֆսեթ: Հրատ. 26.1 մամուլ, տպագր. 29.75 մամուլ= 27.67 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 300: Պատվեր՝ 17:

Երևանի համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի համալսարանի «Ռոտապրինտ» տպագրական արտադրամաս
Երևան, Ալ. Մանուկյան, 1