Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ – 2002

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ – 2002

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 ց 73
Ղ-249

Խմբագիր՝ ֆ.մ.գ.դ.-ր, պրոֆեսոր Մ.Գ.Գրիգորյան

Ղալումյան Ա.Գ.
Ղ-249 Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ): Առաջին մաս: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ: Երևանի պետ. համալս. հրատ.: Եր., 2002, 78 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված է մաթեմատիկական անալիզի հիմնական բաժիններից մեկը՝ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվը: Նախատեսված է ԵՊՀ-ի և նրա Իջևանի մասնաճյուղի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողների համար:

Ղ $\dfrac{1602000000}{704(02)}$ 2002

ԳՄԴ 22.1 ց 73

ISBN 5-8084-0437-1

1. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

Մաթեմատիկայում կան սահմանվող և չսահմանվող հասկացություններ:

Բազմությունը չսահմանվող հասկացություն է: Ասում են, որ A բազմությունը տրված է, եթե հայտնի է, թե ինչից (ինչ տարրերից) է այն բաղկացած:

$a \in A$ գրությունը նշանակում է, որ a տարրը պատկանում է A բազմությանը: $a \notin A$ նշանակում է, որ a-ն չի պատկանում A-ին: Դատարկ ($\varnothing$) կոչվում է տարրերից զուրկ բազմությունը: Բազմությունները հավասար են, եթե բաղկացած են միևնույն տարրերից:

Տանք որոշ, հետագայում օգտագործվող սիմվոլների բացատրությունը:

$\forall$ սիմվոլը նշանակում է կամայական,ցանկացած: $\exists$ սիմվոլը նշանակում է գոյություն ունի: $A \Rightarrow B$ գրությունը նշանակում է՝ A պայմանից հետևում է B պայմանը: $A \Leftrightarrow B$ (A պայմանը համարժեք է B-ին) նշանակում է՝ $A \Rightarrow B$ և $B \Rightarrow A$:

Ասում են, որ A բազմությունը B բազմության ենթաբազմությունն է ($A \subset B$ կամ $B \supset A$), եթե A–ի յուրաքանչյուր տարր պատկանում է B–ին ($a \in A \Rightarrow a \in B$):

Դատարկ բազմությունը ցանկացած A բազմության ենթաբազմությունն է, քանի որ, լինելով տարրերից զուրկ, այն չունի այնպիսի տարր, որը չպատկանի այդ A բազմությանը:

Ակնհայտ է որ՝ $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ և $B \subset A$:

A և B բազմությունների միավորում ($A \cup B$) է կոչվում այն բազմությունը, որի տարրերը պատկանում են A-ին կամ B-ին ($a \in A \cup B \Rightarrow a \in A$ կամ $a \in B$):

Ակնհայտ է, որ՝ $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$: A և B բազմությունների հատում ($A \cap B$) է կոչվում դրանց ընդհանուր տարրերի բազմությունը ($a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ և $a \in B$):

Ակնհայտ է, որ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$: A և B բազմությունների տարբերություն (A-ն առանց B-ի) կոչվում է B–ին չպատկանող A-ի բոլոր տարրերի բազմությունը, և գրվում է՝ $A \setminus B$:

$(a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A$ և $a \notin B)$:

Օրինակ. Եթե $A = \{1,2,3\}$ և $B = \{2, 4\}$, ապա՝ $A \cup B = \{1,2,3,4\}$,

$A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$:

Վարժություններ: Ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները:

1) $A \cup A = A$, 2) $A \cap A = A$, 3) $A \cup \varnothing = A$, 4) $A \cap \varnothing = \varnothing$,

5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$,

7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

10) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:

2. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ (ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ)

Տանք իրական թվերի բազմության աքսիոմային սահմանումը: Իրական թվերի բազմություն է կոչվում հետևյալ հատկություններով (աքսիոմներով) օժտված (R) բազմությունը:

I. ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

Ցանկացած a և b թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ երեք առնչություններից միայն մեկը՝ $a<b$ (a-ն փոքր է b -ից), $a>b$ (a-ն մեծ է b-ից), $a=b$ (a–ն հավասար է b-ին):

Ընդ որում՝ $a< b$ և $b < c \Rightarrow a < c$, $a < b \Leftrightarrow b > a$, $a \le b \Leftrightarrow a < b$ կամ $a = b$:

Նույն կերպ սահմանվում է ≥ 0 առնչությունը:

$<, >, \leq, \geq 0$ առնչությունները կոչվում են անհավասարություններ:

II. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

Ցանկացած (a, b) թվերի կարգավորված զույգին համապատաս–խանեցվում է միակ $a+b$ թիվը, որը կոչվում է a և b թվերի գումար: Ընդ որում, ճշմարիտ են հետևյալ հատկությունները:

1. $\forall a, b \in R : a + b = b + a$ (: սիմվոլը նշանակում է տեղի ունի,

ճշմարիտ է):

2. $\forall$ a, b, c $\in$ R : $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$:

3. Գոյություն ունի թիվ, որը անվանվում է զրո (0), այնպես, որ՝ $\forall a \in R : a + 0 = a$:

4. $\forall a \in R$ $\exists (-a) \in R$ (a–ի հակադիրը), այնպես որ՝ $a + (-a) = 0$:

Ըստ սահմանման՝ $a - b = a + (-b)$: Եթե $a > 0$, ապա a թիվը կոչվում է դրական, իսկ եթե $a<0$, ապա a-ն կոչվում է բացասական:

5. Եթե $a < b$ և c-ն կամայական թիվ է, ապա՝ $a + c < b + c$:

III. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

Յանկացած (a, b) կարգավորված զույգին համապատասխանեցվում է միակ $a \cdot b$ թիվը և կոչվում է a և b թվերի արտադրյալ, եթե ճշմարիտ են հետևյալ հատկությունները:

1. $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$:

2. $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a\,b\,c$:

3. Գոյություն ունի թիվ, որը կոչվում է միավոր (1), այնպես որ $\forall a \in R : a1 = a$:

4. Յանկացած $a \neq 0$ թվի համար գոյություն ունի նրա հակադարձ թիվը ($\frac{1}{a}$) այնպիսին, որ՝ $a\frac{1}{a} = 1$:

5. Եթե՝ $a < b$ և $c > 0$, ապա՝ $ac < bc$, իսկ եթե՝ $a < b$ և $c < 0$, ապա $ac > bc$:

Ըստ սահմանման, եթե $b \neq 0$, ապա $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$: Ըստ սահմանման՝ $1+1=2$, $2+1=3$, …: 1, 2, 3, … թվերը կոչվում են բնական թվեր: Բնական թվերի բազմությունը նշանակում են N:

Դիցուք՝ $a \in R$, և $n \in N$: Ըստ սահմանման՝ $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}$, $\sqrt[n]{a} = b$ նշանակում է, որ $b^n = a$: Երբ n -ը զույգ է, ենթադրվում է որ $a \geq 0$ և $b \geq 0$:

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ բազմությունը կոչվում է ամբողջ թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ ամբողջ թվեր:

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ բազմությունը կոչվում է ռացիոնալ թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ ռացիոնալ թվեր:

$I = R \setminus Q$ բազմությունը կոչվում է իռացիոնալ (ոչ ռացիոնալ) թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ իռացիոնալ թվեր:

IV. ԲԱՇԽԱԿԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

$\forall$ a, b, c $\in$ R : a (b + c) = ab + ac:

Յուրաքանչյուր a թվի համար սահմանվում է նրա բացարձակ արժեքը | a | հետևյալ կերպ՝

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

: Պարզ է, որ՝ $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$, $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$:

Սահմանենք միջակայքեր՝ $[a; b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, $(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$, $[a; b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$, $(a; b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$, $[a; +\infty) = \{x \in R : x \geq a\}$, $(-\infty; a] = \{x \in R : x \leq a\}$, $(-\infty; +\infty) = R$:

V. ԱՐՔԻՄԵԴԻ* ԱՔՍԻՈՄԸ

Յուրաքանչյուր a թվի համար գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ n թիվ որ՝ n > a:

VI. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

Դիցուք՝ A և B թվային ոչ դատարկ բազմությունները այնպիսին են, որ՝ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq b$: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի c թիվ, որ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq c \leq b$:

Նկատենք, որ c թիվը կարող է միակը չլինել :

Օրինակ 1: Դիցուք՝ $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 7, 10\}$: Այս դեպքում վերը նշված c–ի դերում կլինի յուրաքանչյուր թիվ ընկած 2-ի և 5-ի միջև:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $A = \{a \in R: a^2 < 2, a \geq 0\}$, $B = \{a \in R : a^2 > 2$ և $a \geq 0\}$: Այս դեպքում $c = \sqrt{2}$ և c-ն միակն է:

Վարժություններ: 1. Ապացուցել, որ զրոն և թվի հակադիրը միակն են:

2. Ապացուցել, որ միավորը և զրոյից տարբեր թվի հակադարձը միակն են:

3. Ապացուցել, որ $\forall a \in R : (-a)(-a) = a$:

4. Ապացուցել, որ եթե a<b և c<d, ապա՝ a+c<b+d:

5. Ապացուցել, որ 1>0:

6. Ապացուցել, որ a-0=0:

---

* Արքիմեդ (287-212 մթա.), հույն մաթեմատիկոս, մեխանիկ:

7. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ցանկացած $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի ($n \geq 2$) և b թվի համար ճշմարիտ է՝

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)b = a_1b+a_2b+\ldots+a_nb$:

8. Ապացուցել, որ $\forall$ a, b $\in$ R : $|ab| = |a|\,|b|$, $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, $|a-b| \geq |a| - |b|$, $||a| - |b|| \leq |a-b|$:

3. ՖՈՒՆԿՑԻԱ: ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Սահմանում 1: Դիցուք A-ն և B-ն կամայական ոչ դատարկ բազմություններ են: Կասենք, որ տրված է ֆունկցիա կամ արտապատկերում A-ն B-ի մեջ, եթե A-ի յուրաքանչյուր x տարրին ինչ-որ օրենքով համապատասխանության մեջ է դրվում մեկ որոշակի $y \in B$: Գրում են՝ $f : A \to B$ կամ $y = f(x)$, x-ը կոչվում է նախապատկեր, y-ը պատկեր կամ արժեք: A բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ ($D_f = A$): Ասում են, որ f-ը որոշված է C բազմության վրա, եթե $C \subset A$: $E_f = \{f(x) : x \in A\}$-ը կոչվում է f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:

Օրինակ 1: Դիցուք A-ն տվյալ պահին, տվյալ պուրակում եղած բոլոր ծառերի բազմությունն է, իսկ B = R: Յուրաքանչյուր ծառին համապատասխանեցնենք նրա բարձրությունը: Այսպիսով՝ ունենք որոշակի ֆունկցիա $f : A \to B$: E_f – ը որոշակի դրական թվերի վերջավոր բազմություն է:

Սահմանում 2: Եթե $f : A \to B$ և $E_f = B$, ապա ասում են, որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի վրա, կամ սյուրյեկտիվ է: Եթե $f : A \to B$ այնպիսին, որ $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$, ապա f-ը կոչվում է փոխմիարժեք, կամ ինյեկտիվ ֆունկցիա:

Սահմանում 3: Սյուրյեկտիվ և ինյեկտիվ ֆունկցիան կոչվում է բիյեկտիվ կամ բիյեկցիա:

Սահմանում 4: A և B բազմությունները կոչվում են համարժեք ($A \sim B$), եթե գոյություն ունի բիյեկտիվ ֆունկցիա $f: A \to B$:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $A = (-\infty; 0]$, B = R, $f(x) = x^2$: Ունենք՝ $f : A \to B$: Այս ֆունկցիան ինյեկտիվ է, բայց ոչ սյուրյեկտիվ $\left(E_f = [0; +\infty)\right)$:

Օրինակ 3: Դիցուք՝ $A = (-\infty; 0]$, $B = [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$: Սա բիյեկցիա է: Այսպիսով՝ $(-\infty; 0] \sim [0; +\infty)$:

Օրինակ 4: Դիցուք՝ A = R, B = R, $f(x) = x^2$: Այս արտապատկե-

րումը ոչ ինյեկտիվ է, ոչ էլ՝ սյուրյեկտիվ
($E_f=[0;+\infty)$, $f(-1)=f(1)=1$):

Օրինակ 5: Դիցուք՝ $A = R$, $B = [0;\infty)$, $f(x)=x^2$: Սա սյուրյեկցիա է, բայց ոչ՝ ինյեկցիա:

Սահմանում 5: Դիցուք տրված է բիյեկցիա՝ $f: A \to B$: Յանկացած $y \in B$ տարրին համապատասխանեցնենք այն $x \in A$ տարրը, որ $f(x)=y$: Այդ x-ը միակն է շնորհիվ նրա, որ f-ը փոխմիարժեք է: Այսպիսով առաջանում է բիյեկտիվ ֆունկցիա, որի որոշման տիրույթը B-ն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ A-ն: Այն կոչվում է ***հակադարձ ֆունկցիա*** և գրվում է f^{-1} ($f^{-1}: B \to A$):

Ըստ սահմանման՝ $f^{-1}(f(x)) = x$ և $f(f^{-1}(y)) = y$:

Օրինակ 6: $A = (-\infty; 0]$, $B = [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$:

Յակադարձ ֆունկցիան կլինի $x=-\sqrt{y}$: Այսինքն՝ $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, $f^{1}: [0;+\infty)\to(-\infty;0]$:

Խնդիր1: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $(a;\ b)$ միջակայք համարժեք է R-ին:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ $(-1; 1) \sim R$:

Իրոք՝ $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ բիյեկցիա է ($f: (-1;1)\to R$), $\Rightarrow$ $(-1;1)\sim R$:

Իսկ՝ $g(x)=\dfrac{(b-a)x+a+b}{2}$ ֆունկցիան նույնպես բիյեկցիա է ($g: (-1;1) \to (a;b)$), $\Rightarrow$ $(-1;1)\sim(a;b)$: Այսպիսով՝ $(a;\ b)\sim(-1\ ;1)\sim R$ $\Rightarrow$ $(a\ ;b) \sim R$: ■ (■ – նշանակում է ապացուցման ավարտը)

4. ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵԶՐԵՐԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ E- ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: E-ն կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե՝ $\exists\, a \in R$, $\forall\, x \in E: x \le a$: Այդ a թիվը կոչվում է E բազմության վերին եզր: Պարզ է, որ եթե a-ն E- ի վերին եզրն է, ապա a-ից մեծ յուրաքանչյուր թիվ նույնպես E-ի վերին եզր է: Ուրեմն, վերին եզրերի բազմությունը անսահմանափակ է վերևից:

Սահմանում 2: Վերևից սահմանափակ E բազմության բոլոր վերին եզրերից ամենափոքրը կոչվում է E-ի *ճշգրիտ վերին եզր*: Այն նշանակում են՝ $\sup E$ (supremum լատինական բառի հապավումն է):

Այն, որ $\alpha = \sup E$ նույնն է ինչ՝ 1. $\forall x \in E : x \le \alpha$, 2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ (α – ից փոքր վերին եզր չկա):

Սահմանում 3. Դիցուք՝ E-ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: E-ն կոչվում է սահմանափակ ներքևից, եթե $\exists b \in R$, $\forall x \in E : x \ge b$: Այդ b թիվը կոչվում է E-ի ստորին եզր: Ստորին եզրերի բազմությունը անսահմանափակ է ներքևից (b-ից փոքր յուրաքանչյուր թիվ E-ի ստորին եզր է):

Սահմանում 4: Ներքևից սահմանափակ E բազմության բոլոր ստորին եզրերից ամենամեծը կոչվում է E-ի *ճշգրիտ ստորին եզր.* Այն նշանակում են inf E (infimum լատինական բառի հապավումն է): Այն որ $\beta = \inf E$, նույնն է ինչ՝

1. $\forall x \in E : x \ge \beta$, 2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ (β – ից մեծ ստորին եզր չկա):

Սահմանում 5: Թվային բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է վերևից և ներքևից:

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ E-ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: Եթե E-ն սահմանափակ է վերևից, (ներքևից), ապա գոյություն ունի E-ի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր և այն միակն է:

Ապացուցում: Դիցուք E-ն սահմանափակ է վերևից: Ուրեմն՝ $\exists a \in R$, $\forall x \in E : x \le a$: E բազմության բոլոր վերին եզրերի բազմությունը նշանակենք E' ($a \in E'$): Ակնհայտ է, որ $\forall x \in E$, $\forall y \in E' : x \le y$: Ըստ իրական թվերի բազմության անընդհատության աքսիոմի (տե՛ս. 2. VI.) $\exists c \in R$ այնպիսին, որ $\forall x \in E$, $\forall y \in E' : x \le c \le y$: Քանի որ $\forall x \in E : x \le c$, ապա c-ն վերին եզր է: Քանի որ $\forall y \in E' : c \le y$, ապա c-ն E բազմության վերին եզրերից ամենափոքրն է: Ուրեմն՝ $c = \sup E$: Քանի որ բազմության ամենափոքրը միակն է, ապա sup E-ն միակն է:

Ճշգրիտ ստորին եզրի գոյությունը ապացուցվում է նման ձևով: ■

Ըստ սահմանման, եթե E-ն անսահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա

$\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$) :

Վարժություններ:

1) Ապացուցել, որ եթե թվային բազմությունն ունի մեծագույն (փոքրագույն) տարր, ապա այն կլինի այդ բազմության ճշգրիտ վերին (ստորին) եզրը:

2) Դիցուք $E = (-\infty ; b)$: Ապացուցել, որ $\inf E = -\infty$, $\sup E = b$:

3) Դիցուք $E = (a ; +\infty)$: Ապացուցել, որ $\inf E = a$, $\sup E = +\infty$:

4) Դիցուք $E = (a ; b)$: Ապացուցել, որ $\inf E = a$, $\sup E = b$:

5) Ապացուցել, որ E թվային բազմության սահմանափակությունը համարժեք է հետևյալ պայմանին՝ $\exists C > 0$, $\forall x \in E : |x| \le C$:

5. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

5.1. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է ֆունկցիա $f : N \to R$: Այսինքն ցանկացած n բնական թվին համապատասխանեցված է մեկ որոշակի իրական x_n թիվ: Այս x_n համարակալված թվերի բազմությունը կոչվում է *հաջորդականություն* ($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$), իսկ x_n –ը՝ հաջորդականության n-րդ անդամ: Հաջորդականության արժեքների բազմությունը գրվում է՝ $\{x_n\}$: Այն կարող է լինել վերջավոր, իսկ ինքը հաջորդականությունը անվերջ է, քանի որ N-ը անվերջ է:

Օրինակ 1: Դիցուք՝ $x_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$: Այսինքն՝ $x_1 = C$, $x_2 = C$, ..., $x_n = C$, ...:

Այս հաջորդականության արժեքների $\{x_n\}$ բազմությունը բաղկացած է մեկ՝ C կետից:

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը և ինչ-որ a թիվ : Կասենք, որ այդ հաջորդականության սահմանը a թիվն է, կամ x_n-ը ձգտում է (զուգամիտում է) a-ին, եթե՝ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in N$ $\forall\, n \geq n_\varepsilon$: $|x_n - a| < \varepsilon$ (այստեղ և հետագայում, առանց հատուկ նշելու, հասկանում ենք, որ հաջորդականությունները համարակալված են բնական թվերով ($n \in N$)):

Գրվում է՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, կամ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$: Պարզ է որ՝ $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$: $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ միջակայքը կոչվում է a թվի ε շրջակայք: Այսպիսով $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ ունի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ a թվի յուրաքանչյուր $U_\varepsilon(a)$ շրջակայքի համար գոյություն ունի, ինչ- որ համար (n_ε), որ դրանից մեծ համար ($n \geq n_\varepsilon$) ունեցող բոլոր x_n անդամները կհայտնվեն այդ շրջակայքում: Այլ կերպ ասած, a թվի յուրաքանչյուր շրջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով հաջորդականության անդամներ:

Սահմանում 3: Հաջորդականությունը կոչվում է *զուգամետ*, եթե կա թիվ, որին այն ձգտում է: Հակառակ դեպքում հաջորդականությունը կոչվում է *տարամետ* :

Օրինակ 1: $x_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$ (հաստատուն հաջորդականություն): Ապացուցենք, որ այն զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$: Իրոք՝

$\forall\varepsilon>0$, $\forall$ n, $x_n = C \in U_\varepsilon(C)$: Այս դեպքում, որպես n_ε կարելի է վերցնել կամայական բնական թիվ, օրինակ $n_\varepsilon = 1$:

Օրինակ 2: $x_n = (-1)^n, (n = 1, 2, \ldots)$, $x_{2k} = 1(k = 1, 2, \ldots)$,

$x_{2k-1} = -1(k = 1, 2 \ldots)$:

Ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունը տարամետ է, այսինքն ոչ մի (a) թվի այն չի ձգտում: Դրա համար բավական է գտնել կամայական a կետի այնպիսի շրջակայք, որից դուրս կգտնվեն այս հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ: Քանի որ –1 և 1 թվերի միջև հեռավորությունը հավասար է 2-ի, ապա $U_1(a) = (a-1; a+1)$ շրջակայքից դուրս կհայտնվի այդ թվերից գոնե մեկը, ուստի և անվերջ թվով անդամներ կգտնվեն $U_1(a)$-ից դուրս: Օրինակ, եթե $-1 \in U_1(a)$, ապա բոլոր զույգ համար ունեցող հաջորդականության անդամները հայտնվում են այդ շրջակայքից դուրս:

Օրինակ 3: Դիցուք՝ $x_n = \dfrac{n}{(n+1)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$: Ապացուցենք, որ

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Այսինքն՝ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon : \dfrac{n}{(n+1)^n} < \varepsilon$: (1)

Բայց $\forall n \geq 2 : \dfrac{n}{(n+1)^n} < \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leq \dfrac{1}{n}$: (2)

Պարզենք, թե ո՞ր n_ε համարից սկսած ճշմարիտ է $1/n < \varepsilon$ անհավասարությունը:

$\dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$: Ըստ Արքիմեդի աքսիոմի (տե՛ս 2. V)՝

$\exists\ n_\varepsilon \in N : \ n_\varepsilon > \max\left\{\dfrac{1}{\varepsilon}, 1\right\}$: (3)

Վերցնենք $\forall n \geq n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$: (4)

(2)-ից և (4)-ից հետևում է (1)-ը :

5.2. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 1: Հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե այն ձգտում է զրոյի:

Սահմանում 2: Կասենք, որ՝

ա) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, եթե $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon\ :\ |x_n| > \varepsilon$

բ) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, եթե $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon\ :\ x_n > \varepsilon$,

գ) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, եթե $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon\ :\ x_n < -\varepsilon$ ։

Նկատենք, որ եթե $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, կամ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ապա $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$։

Հակառակը ճիշտ չէ։ Օրինակ, եթե $x_n = (-1)^n\, n$, ապա $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, բայց $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \not\to \pm\infty$։

Սահմանում 3: Հաջորդականությունը կոչվում է ***անվերջ մեծ***, եթե այն ձգտում է ∞-ի։

Թեորեմ 1: Անվերջ փոքրի հակադարձը անվերջ մեծ է, իսկ անվերջ մեծի հակադարձը՝ անվերջ փոքր։

Ապացույց: Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ x_n \neq 0$ ։ Դա նշանակում է, որ

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\ :\ 0 < |x_n| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} > \varepsilon\ \ (n \geq n_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ ։$$

Թեորեմի մյուս մասը ապացուցվում է նույն կերպ։ ■

Թեորեմ 2. Անվերջ փոքրերի գումարը (տարբերությունը) անվերջ փոքր է։

Ապացույց. Դիցուք՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$։ Դա նշանակում է, որ

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\ n_1\ \ \forall n \geq n_1\ :\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ \exists\ n_2\ \ \forall n \geq n_2:\ \ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք $\max\{n_1, n_2\} = n_3$, $\forall n \geq n_3$: $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ և $|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$:

Ուրեմն՝ $\forall\, n \geq n_\varepsilon\ :\ |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$\Rightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0: ■$$

Սահմանում 4. Կասենք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե սահմանափակ է $\{x_n\}$թվային բազմությունը։

Այսինքն՝ $\exists C > 0 \ \forall n : |x_n| \le C$:

Թեորեմ 3: Անվերջ փոքրի և սահմանափակի արտադրյալը անվերջ փոքր է:

Ապացուցում. Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է, իսկ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը՝ սահմանափակ: Այսինքն՝

$\exists C > 0 \ \forall n : |y_n| \le C$: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \ge n_\varepsilon : |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{C}$

$\Rightarrow \forall n \ge n_\varepsilon : |x_n y_n| = |x_n| \, |y_n| \le \dfrac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon \ \Rightarrow x_n y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: ■

5.3. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 1: Հաջորդականության սահմանը միակն է:

Ապացուցում: Դիցուք տրված $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ունի տարբեր սահմաններ և $x_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ $(a < b)$: $\dfrac{b-a}{2} = \varepsilon$ դրական թվի համար $\exists n_1 \ \forall n \ge n_1 : x_n \in U_\varepsilon(a)$, $\exists n_2 \ \forall n \ge n_2 : x_n \in U_\varepsilon(b)$:

Եթե $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, ապա $\forall n \ge n_3 : x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$

Բայց՝ $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Թեորեմ 2. Զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Ապացուցում: Դիցուք՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \in R$: Այստեղից ստանում ենք $1 > 0$ թվի համար $\exists n_1 \ \forall n \ge n_1 : a-1 < x_n < a+1$:

Նշանակենք $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_1-1}, a+1\}$,

$m = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_1-1}, a-1\}$: Կստանանք՝ $\forall n : m \le x_n \le M$: ■

Դիտողություն. Թեորեմ 2-ը հակադարձելի չէ:

Օրինակ. $x_n = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, բայց՝ տարամետ:

Լեմմ. Որպեսզի $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝ $x_n = a + \alpha_n$, $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

Ապացուցում. Այն, որ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \ \forall\, n \ge n_\varepsilon :$ $|x_n - a| < \varepsilon$: Դա, իր հերթին համարժեք է նրան, որ $x_n - a = \alpha_n$ հաջորդականությունը ծգտի զրոյի: ■

Թեորեմ 3. Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ և $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$: Այդ դեպքում՝

$$1.\ \exists \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b, \quad 2.\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

$$3.\ \exists \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\ \left(y_n \ne 0, b \ne 0\right):$$

Ապացուցում: Ըստ լեմմի՝ $x_n = a + \alpha_n,\ \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ և $y_n = b + \beta_n, \beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Ուրեմն՝ $x_n \pm y_n = a \pm b + \gamma_n$, որտեղ $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (տես. 5.2, թեորեմ 2) :

Այստեղից, ըստ լեմմի ստանում ենք $x_n \pm y_n \underset{n\to\infty}{\to} a \pm b$:

$x_n y_n = ab + \gamma_n$, որտեղ $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$: Քանի որ $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ զուգամետ է, ուրեմն այն նաև սահմանափակ է, ուստի՝ $\alpha_n\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (տես .5.2, թեորեմ 3): Հետևաբար՝ $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ($a\beta_n$ և $b\alpha_n$ հաջորդականությունները նույնպես անվերջ փոքր են):

Այստեղից, ըստ լեմմի՝ $x_n y_n \underset{n\to\infty}{\to} ab$:

Այժմ ապացուցենք, որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, $b \ne 0$: $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b \ne 0$

$$\Rightarrow \exists\, n_1 \ \ \forall n \ge n_1 : \ |y_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |b| - |y_n| \le |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow |y_n| \ge |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}:$$

Այսպիսով՝ $\forall\, n \ge n_1 : \ |y_n| > \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow \forall n \ge n_1 : \ \dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|b|}$

$\Rightarrow \left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Բայց՝ $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha_n b-\beta_n a}{y_n b}=\frac{1}{y_n}\gamma_n$,

որտեղ $\gamma_n=\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$, $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n}\cdot\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

Այստեղից, ըստ լեմմի՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$: ■

Թեորեմ 4: Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $a<b$: Այդ դեպքում $\exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$: $x_n<b$:

Ապացուցում: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1: |x_n-a|<b-a\ (b-a>0)$ $\Rightarrow x_n<a+(b-a)\Rightarrow x_n<b$: ■

Թեորեմ 5 (սահմանային անցում անհավասարության մեջ): Դիցուք՝ $\forall n\in N$ $x_n \le y_n$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$: Այդ դեպքում $a\le b$: Այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \le \lim\limits_{n\to\infty}y_n$:

Ապացուցում: Կատարենք հակառող ենթադրություն՝ $a>b$ $\Rightarrow$ $y_n-x_n \underset{n\to\infty}{\to} b-a<0$: Համաձայն նախորդ թեորեմի $\exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$: $y_n-x_n<0$: Ստացվածը հակասում է թեորեմի պայմանին: ■

Դիտողություն: Եթե $x_n<y_n$, ապա $a\le b$, բայց ոչ անպայման՝ $a<b$: Օրինակ: $\forall\, n\in N: -\frac{1}{n}<0$, բայց $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$:

Թեորեմ 6 («ոստիկանների» կանոնը): Եթե տրված են երեք հաջորդականություններ՝ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, այնպիսիք, որ

$\forall n\in N$: $y_n\le x_n\le z_n$, ընդ որում $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, ապա $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$:

Ապացուցում: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$ $y_n>a-\varepsilon$, $\exists n_2\ \forall n\ge n_\varepsilon$: $z_n<a+\varepsilon$: Եթե $n_3=\max\{n_1,n_2\}$, ապա $\forall\, n\ge n_3$: $a-\varepsilon<y_n\le x_n\le z_n<a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ $(n\ge n_3)$: Ուրեմն՝ $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$: ■

5.4. ՄՈՆՈՏՈՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ, e ԹԻՎԸ: ՆԵՐԴՐՎԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն չնվազող (չաճող), եթե՝ $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$), $n = 1, 2, \ldots$:

Սահմանում 2. Եթե հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է կամ մոնոտոն չաճող, ապա այն կոչվում է մոնոտոն:

Սահմանում 3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն աճող, եթե $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$: Իսկ, եթե՝ $a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, ապա հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն նվազող:

Թեորեմ 1: Մոնոտոն չնվազող (չաճող) և վերևից (ներքևից) սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է, ընդ որում՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right):$$

Ապացույց. Որոշակիության համար դիտարկենք մոնոտոն չնվազող հաջորդականության դեպքը: Քանի որ $\{a_n\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, ապա՝ $\exists \sup\{a_n\} = \alpha \Rightarrow \forall n \in N : a_n \le \alpha$ և $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ այնպիսին, որ $a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$: Շնորհիվ մոնոտոնության՝ $\forall n \ge n_\varepsilon : a_n \ge a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$: Այսինքն՝ $\forall n \ge n_\varepsilon : \alpha - \varepsilon < a_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon$ $\Rightarrow \forall n \ge n_\varepsilon :\ \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$: ■

Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունը $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

Թեորեմ 2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և՝ սահմանափակ վերևից:

Ապացույց: Ըստ Նյուտոնի* երկանդամի բանաձևի՝

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} + \ldots +$$

* Նյուտոն Իսահակ (1643-1727) – անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

$$+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n^n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right): \quad (1)$$

Քանի որ $1-\frac{s}{(n+1)}>1-\frac{s}{n}$ $(s=1,2,\dots,n-1)$, ապա x_{n+1}-ի վերլուծության բոլոր գումարելիները մեծ են x_n-ի համապատասխան գումարելիներից: Բացի այդ x_{n+1}-ը պարունակում է դրական լրացուցիչ գումարելի (վերջինը): Այսպիսով՝ $\forall$ $n\in N$ $x_{n+1}>x_n$: Այսինքն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է:

(1)-ից հետևում է, որ՝ $x_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\dots+\frac{1}{n!}$: Նկատի ունենանք, որ $k!=2\cdot3\cdots k\geq2^{k-1}$ $(k\geq2)$: Ուրեմն՝

$$x_n\leq1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3 \ (n\geq2):$$

Այսինքն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից: ■

Հետևանք: Համաձայն թեորեմ 1–ի $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{նշ}{=} e$:

Ընդ որում թեորեմ 2-ի ապացույցից հետևում է, որ $2<x_n<3$ $\Rightarrow$ $e\in[2,3]$:

Կարելի է ապացուցել, որ e թիվը իռացիոնալ է և՝ $e\approx2,718\dots$:

Սահմանում 4. Դիցուք տրված է հատվածների հաջորդականություն $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր բնական թվին համապատասխանեցված է մեկ որոշակի $[a_n;b_n]$ հատված: Այս հաջորդականությունը կոչվում է ներդրված, եթե $\forall n:[a_{n+1};b_{n+1}]\subset[a_n;b_n]$: Դա նշանակում է, որ $\forall n: a_{n+1}\geq a_n$ և $b_{n+1}\leq b_n$:

Այսինքն՝ $\{a_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է, իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{n=\infty}$-ը՝ մոնոտոն չաճող:

Թեորեմ 3 (Ներդրված հատվածների հաջորդականության մասին): Դիցուք $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{n=\infty}$-ը ներդրված հատվածների հաջորդականություն է, այնպիսին, որ $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: Այդ դեպքում՝ գոյություն ունի միակ c թիվ, որը պատկանում է $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին և՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$:

Ապացուցում: Ըստ թեորեմի պայմանների $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է, իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը՝ մոնոտոն չաճող: Ընդ որում $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է վերևից, քանի որ՝ $\forall n \;\; a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1 \Rightarrow a_n \le b_1$: Նույն կերպ ստացվում է, որ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից՝ $\forall n \;\; b_n \ge a_1$: Ըստ թեորեմ 1-ի $\exists \; a, b \in R$, այնպիսիք որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = b$: Քանի որ $\forall n \;\; a_n \le b_n$, ապա $a \le b$: Այսպիսով ունենք՝ $\forall n: \; a_n \le a \le b \le b_n$: Այսինքն՝ a և b թվերը պատկանում են $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին: Այժմ ապացուցենք միակությունը, այսինքն, եթե որևէ երկու α և β թվեր պատկանում են $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին, ապա նրանք համընկնում են: Դիցուք՝ որոշակիության համար $\alpha \le \beta$: Ունենք $\forall n \in N: a_n \le \alpha \le \beta \le b_n \Rightarrow 0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n$: Այս անհավասարություններից մեջ անցնենք սահմանի (0-ն և $\beta-\alpha$-ն դիտում ենք որպես հաստատուն հաջորդականություններ), երբ $n\to\infty$: Կստանանք՝ $0 \le \beta-\alpha \le 0 \Rightarrow \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$: Մասնավորապես՝ $a=b=c$: ■

5.5. ԵՆԹԱՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՎԵՐԻՆ ԵՎ ՍՏՈՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Սահմանում 1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է կոչվում $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը, որտեղ $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$-ը մոնոտոն աճող բնական թվերի հաջորդականություն է՝ $n_1 < n_2 \ldots < < n_k < \ldots$:

Օրինակ1: $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություններն են, իսկ

$a_1, a_2, a_5, a_3, \ldots$ հաջորդականությունը այդ հաջորդականության ենթահաջորդականությունը չէ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա յուրաքանչյուր ենթահաջորդականություն լինի զուգամետ և ձգտի միևնույն սահմանի:

Ապացույց. Անհրաժեշտություն. Դիցուք` $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \in R$ և $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$-ը $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության կամայական ենթահաջորդականությունն է: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall\ n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$:

Քանի որ $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$-ն մոնոտոն աճող է, ապա $n_1 \geq 1$, $n_2 > n_1 \Rightarrow n_2 \geq 2$, $\ldots$, $n_k \geq k$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow n_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \exists\ k_1\ \forall\ k \geq k_1$: $n_k > n_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon\ (k \geq k_1) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$:

Բավարարություն. $\exists$ $a \in R$ այնպիսին, որ յուրաքանչյուր ենթահաջորդականություն ձգտում է a-ի: Քանի որ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը ինքն իր ենթահաջորդականությունն է, ապա $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:■

Սահմանում 2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության որևէ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականության սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության մասնակի սահման:

Օրինակ 2. Դիցուք`

$$a_n = (-1)^n\ , n = 1,2\ldots \Rightarrow a_{2k} = 1 \underset{k\to\infty}{\to} 1,\ a_{2k-1} = -1 \underset{k\to\infty}{\to} -1:$$

Ուրեմն այս հաջորդականության համար 1-ը և −1-ը մասնակի սահմաններ են: Համաձայն նախորդ թեորեմի $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Թեորեմ 2 (Բոլցանո-Վայերշտրասի**).* Յուրաքանչյուր սահմանափակ հաջորդականություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացույց: $\{x_n\}_1^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, այսինքն գոյություն ունեն a և b թվեր, այնպիսիք, որ $\forall\ n \in N : a < x_n < b$:

---

* Բոլցանո Բեռնարդ, չեխ մաթեմատիկոս,փիլիսոփա (1781-1848):

** Վայերշտրաս Կարլ Թեոդոր Վիլհելմ (1815-1897), գերմանացի մաթեմատիկոս:

Տրոհենք $[a; b]$ հատվածը երկու հավասար մասի՝ $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$: Ակնհայտ է, որ այս հատվածներից գոնե մեկում կա $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ: Ընտրենք հենց այդ կեսը: Եթե այդ երկու հատվածներն էլ պարունակում են հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ, ապա միևնույն է, թե նրանցից որը ընտրենք: Այդպես ընտրված հատվածը նշանակենք $[a_1; b_1]$ և ընտրենք նրան պատկանող որևէ անդամ՝ x_{n_1}: Այնուհետև $[a_1; b_1]$ հատվածը նորից կիսենք և նույն սկզբունքով ընտրենք նրա կեսը՝ $[a_2; b_2]$ հատվածը: $[a_2; b_2]$-ի մեջ ընկած հաջորդականության անթիվ թվով անդամներից ընտրենք մի որևէ x_{n_2} անդամ այնպիսին, որ $n_2 > n_1$: Կիսելու պրոցեսը անվերջ շարունակենք: k-րդ քայլին առաջացած $[a_k; b_k]$ հատվածից ընտրենք x_{n_k}-ն այնպես, որ՝ $n_k>n_{k-1}$: Այսպիսով առաջանում է $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն $\left(x_{n_k} \in [a_k;b_k], k=1,2...\right)$: Առաջանում է նաև $\{[a_k;b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն, այնպիսին, որ՝

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0:$$

Ըստ հայտնի հատկության (տե՛ս. 5.4, թ.3) $\exists$ միակ c թիվ, որը պատկանում է $[a_k;b_k]$ $(k=1,2...)$ հատվածներից յուրաքանչյուրին, ընդ որում՝ $c=\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, $\forall k\ a_k \le x_{n_k} \le b_k$: Օգտվելով 5.3-ի թ.6-ից ստանում ենք $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c$: ■

Հետևանք: Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր սահմանափակ հաջորդականություն ունի մասնակի սահման:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ վերևից (ներքևից) սահմանափակ հաջորդականության համար գոյություն ունի մասնակի սահմաններից ամենամեծը (ամենափոքրը):

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ եթե հաջորդականությունը անսահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա $+\infty$-ը ($-\infty$-ը) մասնակի սահման է:

Սահմանում 3: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության մասնակի սահմաններից ամենամեծը կոչվում է վերին սահման $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, իսկ մասնակի սահմաններից ամենափոքրը կոչվում է ստորին սահման $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$: Այն դեպքում, երբ $+\infty$ $(-\infty)$-ը մասնակի սահման է, ապա ըստ սահմանման՝ $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$:

Այժմ թեորեմ 1-ը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի հաջորդականությունը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա վերին և ստորին սահմանները լինեն վերջավոր և իրար հավասար:

5.6. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ. ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 1: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է ***ֆունդամենտալ***, եթե այն բավարարում է հետևյալ (Կոշիի[*]) պայմանին:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall m \geq n_\varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon: \; |x_m - x_n| < \varepsilon: \qquad (1)$$

Դիտողություն: Վերջին անհավասարության մեջ m-ի և n համարների տեղերը կարելի է փոխել, ուրեմն կարևոր չէ թե m, n թվերից որն է մեծ: Ենթադրենք

$m > n \;\Rightarrow m - n = p \in N$: Այդ դեպքում Կոշիի պայմանը կարելի է ձևակերպել հետևյալ համարժեք ձևով՝

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall n \geq n_\varepsilon \;\forall p \in N: \; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon: \qquad (2)$$

Թեորեմ 1: Որպեսզի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն. Տրված է, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը զուգամետ է, այսինքն՝ $\exists\, a \in R, \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_\varepsilon \;\forall n \geq n_\varepsilon: |x_n - a| < \varepsilon$ $\left(\forall m \geq n_\varepsilon: |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \forall\, n, m \geq n_\varepsilon: \; |x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leq$

$\leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \;\; (m, n \geq n_\varepsilon)$: Ուրեմն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

Բավարարություն. Տրված է, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը ֆունդամենտալ է:

---

[*] Կոշի Օգյուստեն Լուի (1789-1057), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$\Rightarrow 1>0\ \exists n_1\ \ \forall n\geq n_1:\left|x_n-x_{n_1}\right|<1$

$\Rightarrow \forall n\geq n_1:\left|x_n\right|=\left|x_n-x_{n_1}+x_{n_1}\right|\leq\left|x_n-x_{n_1}\right|+\left|x_{n_1}\right|<1+\left|x_{n_1}\right|:$

Այսպիսով՝ x_n, $n=n_1,n_1+1,\ldots$ ենթահաջորդականությունը սահմանափակ է: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի, գոյություն ունի այդ հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (այն նաև $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականությունն է): Այսինքն՝ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$: Դա նշանակում է որ՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon\ \forall k\geq k_\varepsilon\ :\ \left|x_{n_k}-a\right|<\varepsilon/2: \tag{1}$$

Քանի որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ապա $\exists\, n_\varepsilon\ \forall m,n\geq n_\varepsilon: |x_m-x_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$: Քանի որ $n_k \underset{k\to\infty}{\to}\infty\ (n_k\geq k)$, ապա $\exists\ k'$

$$\forall k\geq k':n_k>n_\varepsilon\Rightarrow\ \left|x_{n_k}-x_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ (n\geq n_\varepsilon,\ k\geq k'): \tag{2}$$

Դիցուք՝ $p=\max\left\{k',k_\varepsilon\right\}$: Ապա (1) – ից և (2)-ից ստանում ենք՝

$\forall n\geq n_\varepsilon:$

$$|x_n-a|=\left|\left(x_n-x_{n_p}\right)+\left(x_{n_p}-a\right)\right|\leq\left|x_{n_p}-x_n\right|+\left|x_{n_p}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}=a:$ ■

Վարժություններ. 1. Ապացուցել, որ՝

$x_n=\dfrac{\sin 1!}{1.2}+\dfrac{\sin 2!}{2.3}+\ldots+\dfrac{\sin n!}{n.(n+1)}$ (n=1,2...) հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

2. Ապացուցել, որ $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (n=1,2...) հաջորդականությունը տարամետ է (ֆունդամենտալ չէ):

Խնդիրներ. 1. Ապացուցել, որ՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow b^{x_n}\underset{n\to\infty}{\to} b^a\ \ (b>0)$:

2. Ապացուցել, որ՝

$x_n\underset{n\to\infty}{\to}a \Leftrightarrow \log_b x_n\to\log_b a\ \ (x_n>0,a>0,b>0,b\neq 1):$

Ցուցում. Օգտվել հաջորդականության սահմանի սահմանումից:

5.7. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ԱՆՎԵՐՋ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՏԵՍՔՈՎ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԱՆՀԱՇՎԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 1: Թվի ամբողջ մաս՝ [a] կոչվում է այն ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը չի գերազանցում այդ a թվին :

Օրինակ, [1,5]=1, [–1,5]=-2:

Դիցուք՝ $a \geq 0$ և $[a] = \alpha_0 \geq 0$: $[\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ հատվածը տրոհենք տաս հավասար մասի և նրանցից կընտրենք այն, որը պարունակում է a-ն: Այն դեպքում, երբ a-ն միաժամանակ պատկանում է տրոհված հատվածներից երկուսին (a-ն տրոհված հատվածների ընդհանուր ծայրակետ է), ապա կընտրենք այն հատվածը, որի համար a-ն ձախ ծայրակետ է: Այսպիսով, գոյություն ունի այդ պայմաններին բավարարող միակ միջակայքը՝ $[\alpha_0,\alpha_1; \alpha_0,\alpha_1 + 10^{-1}]$, այնպիսին որ $a \in [\alpha_0,\alpha_1; \alpha_0,\alpha_1 + 10^{-1})$: Առաջացած հատվածը նորից տրոհենք տաս հավասար մասի և նույն սկզբունքով ընտրենք միակ միջակայքը (միակ α_2 թվանիշը), որը պարունակում է a-ն: Շարունակելով այս պրոցեսը կստանանք ներդրված հատվածների հաջորդականություն $[a_n; a'_n]$, n= 0,1,2,..., որտեղ՝ $a_0 = \alpha_0$, $a'_0 = \alpha_0 + 0,1$, $a_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, $a'_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + 10^{-n}$, $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, k=1,2,...: Այդ հատվածների երկարությունների հաջորդականությունը՝ $10^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: Այդ պատճառով նշված հատվածներից յուրաքանչյուրին պատկանող a կետը միակն է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n = a$: Այսպես առաջացած $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ սիմվոլը կոչվում է անվերջ տասնորդական կոտորակ:

Դիտողություն 1: Այս տասնորդական կոտորակի 9 թվանշանը անվերջ կրկնվել չի կարող (9-ը պարբերություն չէ): Ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը՝ ∃ n_1, որ՝ $\alpha = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{n_1}99\ldots9\ldots$, որտեղ $\alpha_{n_1} \neq 9$, երբ $n_1 \neq 0$: Այդ դեպքում՝ $a \in [\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n_1}99\ldots9; \ \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n_1} + 10^{-n}]$ $(n \geq n_1)$: Այստեղից հետևում է, որ a-ն համընկնում է այդ հատվածների աջ ծայրակետի հետ (դա $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n_1-1}(\alpha_{n_1}+1)$ կետն է, երբ $n_1 \neq 1$ և α_0+1 կետն է, երբ $n_1 = 1$), որը հակասում է հատվածների ընտրության սկզբունքին:

Ինը պարբերություն չունեցող տասնորդական կոտորակը կոչվում է *թույլատրելի:* Այսպիսով յուրաքանչյուր ոչ բացասական թվին համապատասխանության մեջ է դրվում միակ թույլատրելի տասնորդական կոտորակը, ընդ որում ստացված համապատասխանությունը փոխմիարժեք է:

Եթե $a< 0$, ապա $a > 0$ և ուրեմն, $-a$ -ին համապատասխանեցվում է $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ բերված տասնորդական կոտորակը: Մնում է a-ին համապատասխանեցնել $-\alpha_0,\alpha_1\dots\alpha_n\dots$ կոտորակը: Այսպիսով առաջանում է փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր իրական թվերի և բոլոր թույլատրելի տասնորդական կոտորակների բազմություննների միջև : a իրական թվի և նրան համապատասխան տասնորդական կոտորակի միջև ընդունված է դնել հավասարության նշան՝ $a=\alpha_0,\alpha_1\dots\alpha_n\dots$:

Դիտողություն 2. Յուրաքանչյուր a իրական թվի համար գոյություն ունի իրեն զուգամետ իրարից տարբեր ռացիոնալ թվերի հաջորդականություն: Իրոք, a թիվը ներկայացնենք բերված անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ $a = \alpha_0, \alpha_1 \dots\alpha_n \dots$: Այդ դեպքում՝ $a'_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n + 10^{-n}$ $(n=1,2,\dots)$ ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունը զուգամիտում է a-ին և, ըստ այդ հաջորդականության կառուցման $\{a'_n\}$բազմությունը անվերջ է:

Սահմանում 2. A բազմությունը կոչվում է ***հաշվելի***, եթե այն համարժեք է բնական թվերի բազմությանը ($A\sim N$): Այսինքն՝ գոյություն ունի բիյեկցիա՝ $f : A \to N$: Դա նշանակում է որ A բազմության բոլոր իրարից տարբեր տարրերը կարելի է համարակալել՝ օգտագործելով բոլոր իրարից տարբեր բնական թվերը:

Թեորեմ 1: Ռացիոնալ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

Ապացույց. Նախ դիտարկենք դրական ռացիոնալ թվերի դեպքը՝ $r = \dfrac{m}{n}$, $m,n \in N$: Այդ թվի բարձրություն անվանենք՝ $h=m+n$ թիվը: Այժմ համարակալենք տարբեր դրական ռացիոնալ թվերը ըստ իրենց բարձրության աճման՝դասավորելով միևնույն բարձրություն ունեցող թվերը ըստ աճման: Այսպիսով դրական ռացիոնալ թվերը կհամարակալվեն հետևյալ կերպ՝

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1},\frac{1}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{3},\frac{7}{1},\dots:$$

Այդ թվերը նշանակենք՝ $r_1,r_2,r_3,\dots$: Այժմ բոլոր ռացիոնալ թվերը համարակալենք հետևյալ կերպ՝ $0, r_1,-r_1,r_2,-r_2,r_3,-r_3,\dots$ ■

Թեորեմ 2. Իրական թվերի բազմությունը անհաշվելի է:

Ապացույց. Դիցուք հակառակը՝ R-ը հաշվելի է, այսինքն՝ իրական թվերը, ուրեմն նաև նրանց համապատասխան թույլատրելի տասնորդական կոտորակները, կարելի է համարակալել՝

$x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots\alpha_n^{(1)} \dots$

$x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(2)} \dots$
$x_m = \alpha_0^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \alpha_2^{(m)} \dots \alpha_n^{(m)} \dots$

....

Ընտրենք α_n թվանիշերը, $n = 1, 2 \dots$ այնպես, որ $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ և $\alpha_n \neq 9$: Այդ դեպքում $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ թիվը չի համընկնում x_m $(m=1,2,3,\dots)$ թվերից և ոչ մեկի հետ: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Թեորեմ 3. Յուրաքանչյուր (a ; b) միջակայք համարժեք է $(-\infty ; \infty)$ միջակայքին:

Ապացուցում: Տե՛ս 3.-ի խնդ.1-ը :

Հետևանք: Յուրաքանչյուր միջակայք անհաշվելի է:

Թեորեմ 4. Յուրաքանչյուր միջակայք պարունակում է անվերջ քանակությամբ ռացիոնալ թվեր:

Ապացուցում. Վերցնենք $(a;b)$ միջակայքի որևէ c կետ, և այն ներկայացնենք բերված անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ $c = c_0, c_1 \dots c_n \dots$: Այդ դեպքում՝ $c_n' = c_0, c_1 \dots c_n + 10^{-n}$ $(n = 1,2,\dots)$ անվերջ թվով ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունը (տե՛ս 5.7, դիտ. 2.) ձգտում է c–ին: Ուրեմն, ինչ-որ համարից սկսած այդ հաջորդականության բոլոր անդամները կհայտնվեն (a;b) միջակայքի մեջ: ■

Թեորեմ 5. Յուրաքանչյուր միջակայք ունի անվերջ քանակությամբ իռացիոնալ թվեր:

Ապացուցում. Ենթադրենք հակառակը՝ միջակայքը պարունակում է վերջավոր քանակությամբ իռացիոնալ թվեր: Այստեղից հետևում է, որ միջակայքը հաշվելի է (տե՛ս թ.4 և խնդ.4.): Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Խնդիրներ. 1.Ապացուցել, որ ամբողջ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

2.Ապացուցել, որ հաշվելի բազմության անվերջ ենթաբազմությունը հաշվելի է:

3. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի քանակությամբ հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է:

4. Ապացուցել,որ հաշվելի և վերջավոր բազմությունների տարբերությունը հաշվելի է:

5. Ապացուցել,որ յուրաքանչյուր անվերջ բազմություն ունի հաշվելի ենթաբազմություն:

6. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում 1: a–ն ($a \in R$) կոչվում է $E \subset R$ բազմության սահմանային կետ, եթե a–ի յուրաքանչյուր շրջակայքում կա իրենից տարբեր, E-ին պատկանող կետ:

Լեմմ: Եթե a-ն E-ի սահմանային կետն է, ապա գոյություն ունի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ՝ $x_n \in E\setminus\{a\}$ $(n = 1, 2,\ldots)$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

Ապացուցում: Ըստ սահմանման՝ $\forall\, n \in N\ \exists\, x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$, $x_n \in E \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} a,\ x_n \neq a$$

(տե՛ս 5.3-ի ք.6-ը («ոստիկանների» կանոնը)): ■

Սահմանում 2: Դիցուք՝ $f : E \to R$ $(E \subset R)$ և a -ն E-ի սահմանային կետ է: Կասենք որ, *f(x)-ի սահմանը a կետում հավասար է K թվին* և կգրենք $\lim\limits_{x\to a} f(x) = K$ $\left(f(x) \underset{x\to a}{\to} K\right)$, եթե՝

1^0. (*հաջորդականության լեզվով*, կամ *ըստ Հայնեի*)[*]

$\forall x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} a : f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} K$:

2^0. (*(ε, δ) լեզվով*, կամ *ըստ Կոշիի*)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E\ \ 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - K| < \varepsilon$:

Թեորեմ 1: 1^0 և 2^0 սահմանումները իրար համարժեք են:

Ապացուցում: Նախ ցույց տանք որ $1^0 \Rightarrow 2^0$: Դիցուք 2^0 սխալ է: Այսինքն՝ $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \ \exists\, x \in E\ \ 0 < |x - a| < \delta :\ |f(x) - K| \geq \varepsilon$:

Այստեղից ստանում ենք՝ $\forall n \in N\ \exists\, x_n \in E : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - K| \geq \varepsilon$:

Դա նշանակում է, որ՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a,\ x_n \neq a$, բայց՝ $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} K$:

Ստացվածը հակասում է 1^0-ն:

Այժմ ցույց տանք, որ $2^0 \Rightarrow 1^0$: Դիտարկենք $\forall\, x_n \in E$, $x_n \neq a$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exists\, n_1\ \forall\, n \geq n_1 : 0 < |x_n - a| < \delta$: $1^0 \Rightarrow |f(x_n) - K| < \varepsilon$: $(n \geq n_1)$:

Այստեղից հետևում է 2^0-ը: ■

---

[*] Հայնե Հենրիխ Էդուարդ (1821 – 1881), գերմանացի մաթեմատիկոս :

Դիտողություն : Պարզ է, թե հաջորդականության լեզվով ինչպես կարելի է տալ ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը, երբ $x \to \infty$ $(+\infty, -\infty)$, կամ $K = \infty$ $(+\infty, -\infty)$: Բերենք $\varepsilon - \delta$ լեզվով այդպիսի սահմանումների օրինակներ:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = K \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E\ x < -\delta : |f(x) - K| < \varepsilon$:

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E\ |x| > \delta : f(x) > \varepsilon$:

7. ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Սահմանում 1: x_0 թվի «ծակած» δ շրջակայք է կոչվում $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ շրջակայքը առանց x_0-ի՝

$$\overset{0}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta):$$

Սահմանում 2: $+\infty$ $(-\infty)$ – ի δ $(\delta > 0)$ շրջակայք է կոչվում $(\delta; +\infty)$ $((-\infty; -\delta))$ միջա-կայքը: $<a; b>$-ն դա $(a; b)$ միջակայքի ընդհանուր գրելաձևն է, այն կարող է և պարունակել a,b ծայրակետերը (կամ նրանցից որևէ մեկը):

Սահմանում 3: Դիցուք՝ $f: <a; b> \to R$, կասենք, որ այդ ֆունկցիայի *աջակողմյան (ձախակողմյան) սահմանը* x_0 $(x_0 \in (a; b))$ կետում հավասար է K-ի և կգրենք

$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = K$ $(f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = K)$, եթե $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ $(U_\delta(x_0) \subset (a; b))$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $(x \in (x_0 - \delta; x_0))$: $|f(x) - K| < \varepsilon$:

$<a; b>$ միջակայքի ծայրակետերում իմաստ ունեն միայն $f(a + 0)$, $f(b - 0)$ միակողմանի սահմանները:

Թեորեմ: Որպեսզի ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման միջակայքի ներքին կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում գոյություն ունենան միակող-մանի սահմանները և լինեն իրար հավասար:

Ապացուցում. Անհրաժեշտություն. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = K \in R$ $(x_0 \in (a; b))$:

Այսինքն՝ $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta\ (\varepsilon) > 0$ $(U_\delta(x_0) \subset (a; b))$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$ $((x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)) : |f(x) - K| < \varepsilon$:

Ուրեմն՝ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta\ (\varepsilon) > 0\ \left(U_\delta(x_0) \subset (a;b)\right)\ \forall x,\ x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$: $|f(x) - K| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = K$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = K\right)$:

Բավարարություն: $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ և՝ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = K$:

Ուրեմն՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \ \delta_1(\varepsilon) > 0\ \left(U_{\delta_1}(x_0) \subset (a;b)\right)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1;\ x_0)$: $|f(x) - K| < \varepsilon$,

$\exists\ \delta_2\ (\varepsilon) > 0\ \left(U_{\delta_2}(x_0) \subset (a;b)\right)\ \ \forall x \in (x_0\ ;\ x_0 + \delta_2)$: $|f(x) - K| < \varepsilon$:

Նշանակենք $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta > 0$ և, վերցնենք $\forall x$, $0 < |x - x_0| < \delta$:

Հնարավոր է երկու դեպք՝ 1. $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_2$ $\Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$,

2. $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = K$: ■

Դիտողություն: Թեորեմը մնում է ուժի մեջ, երբ ֆունկցիան որոշված է x_0-ի «ծակած» δ շրջակայքում $\left(\overset{0}{U}_\delta(x_0) \subset (a;b)\right)$

Օրինակ: $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, $f(+0) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x}{x} = 1$, $f(-0) = \lim\limits_{x\to -0} \left(-\dfrac{x}{x}\right) = -1$:

Հետևաբար, ֆունկցիան չունի սահման $x = 0$ կետում:

8. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Քանի որ ֆունկցիայի սահմանը բերվում է հաջորդականության սահմանի, ապա ֆունկցիայի սահմանը օժտված է բոլոր այն հատկություններով, ինչ հաջորդականության սահմանը:

Թեորեմ: Եթե գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ և $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, ապա՝

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

3. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $(g(x) \neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0)$:

Ապացուցենք օրինակ 3-ը: Ունենք, որ՝ $\forall\ x_n \to x_0\quad x_n \neq x_0$, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \neq 0$: Այստեղից, ստանում ենք՝

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{A}{B}: \quad \blacksquare$$

Դիտողություն: Թեորեմը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ $x_0 = \infty, +\infty, -\infty$:

9. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐԻ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

Սահմանում 1: Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է a-ի «ծակած» շրջակայքում: f(x)–ը կոչվում է անվերջ փոքր (անվերջ մեծ) a կետում, եթե՝

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad (\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty)$:

Սահմանում 2: a կետում անվերջ փոքր (անվերջ մեծ) f(x), g(x) ֆունկցիաները կոչվում են միևնույն կարգի անվերջ փոքր (անվերջ մեծ), եթե $g(x) \neq 0$ և

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in R,\ C \neq 0: \qquad (1)$$

Սահմանում 3: Եթե (1)-ի մեջ C=1, ապա f(x) և g(x) ֆունկցիաները կոչվում են իրար համարժեք և գրվում է՝ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

$(\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x))$:

Օրինակ 1: $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$: Իրոք՝ $\dfrac{x + x^2}{x} = 1 + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$:

Սահմանում 4: f(x) ֆունկցիան անվանում են ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան g(x)-ը, x-ը a-ին ձգտելիս, եթե f-ը և g-ն այնպիսի անվերջ փոքրեր են, որ $g(x) \neq 0$ և $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$: Այդ դեպքում գրում են՝ $f(x)= o(g(x)),\ x\to a$:

Օրինակ 2: $x^2 = o(x),\ x\to 0$:

Թեորեմ: Արտադրյալի սահման հաշվելիս, արտադրիչը կարելի է փոխարինել համարժեք ֆունկցիայով (դրանից չի փոխվի ոչ սահմանի գոյությունը, ոչ էլ սահմանի արժեքը):

Ապացույց: Դիցուք $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = A$, ընդ որում՝ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ $(f(x)\neq 0,\ h(x)\neq 0)$:

Պետք է ապացուցել, որ $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = A$:

Իրոք՝ $\lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]\cdot\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right] = A\cdot 1 = A$: Եթե այժմ ենթադրենք, որ $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, բայց $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = A$, ապա $f(x)g(x) = [h(x)g(x)]\cdot\left[\dfrac{f(x)}{h(x)}\right]\underset{x\to a}{\to} A\cdot 1 = A$: Ստացված հակասությունը նշանակում է, որ՝ $\nexists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)$: ■

10. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f: E\to R$ $(E\subset R)$: f-ը կոչվում է մոնոտոն աճող (նվազող), եթե $\forall\, x_1, x_2\in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$:

Սահմանում 2: f ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն չնվազող (չաճող), եթե $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$:

Սահմանում 3: Ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն, եթե այն մոնոտոն չնվազող է կամ մոնոտոն չաճող:

Թեորեմ 1: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն չնվազող է (չաճող է) $(a;b)$ միջակայքում և $x_0\in(a;b)$, ապա՝

$$\exists f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup_{(a;x_0)} f,\quad \exists f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{(x_0;b)} f$$

$$\left(\exists f(x_0-0) = \inf_{(a;x_0)} f,\quad \exists f(x_0+0) = \sup_{(x_0;b)} f\right):$$

Ապացույց: Քննարկենք մոնոտոն չնվազող ֆունկցիայի դեպքը: Ցույց տանք, որ $f(x_0-0) = \sup\limits_{(a;x_0)} f$ (մյուս պնդումները ապացուցվում են նույն կերպ)։

$\{f(x);\ x \in (a;\ x_o)\}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից $\forall x \in (a;x_o)\ f(x) \le f(x_o) \Rightarrow \exists \sup\limits_{(a;x_0)} f = \alpha \Rightarrow \forall x \in (a;x_o) : f(x) \le \alpha$,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a;x_o) : f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$: Նշանակենք $\delta = x_o - x_\varepsilon > 0$: $\forall x \in (x_o-\delta;x_o) = (x_\varepsilon;x_o) : f(x) \ge f(x_\varepsilon) > \alpha-\varepsilon \Rightarrow f(x) > \alpha-\varepsilon$:

Այսպիսով՝ $\forall x \in (x_o-\delta;x_o) : \alpha-\varepsilon < f(x) \le \alpha < \alpha+\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \alpha$: ■

Դիտողություն: Մոնոտոն չնվազող (չաճող) ֆունկցիայի համար

$$\exists f(a+0) = \inf_{(a;b)} f,\ \exists f(b-0) = \sup_{(a;b)} f\ \left(f(a+0) = \sup_{(a;b)} f,\ \exists f(b-0) = \inf_{(a;b)} f \right):$$

Ընդ որում նշված ճշգրիտ եզրերը կարող են լինել անվերջ: Օրինակ, $\sup\limits_{(a;b)} f = +\infty$, եթե $f(x)$–ը մոնոտոն չնվազող է և վերևից անսահմանափակ:

11. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԿՈՇԻԻ ՊԱՅՄԱՆԸ

Սահմանում: Դիցուք $f(x)$–ը որոշված է x_o քվի $\overset{0}{U}_\gamma(x_0)$ «ծակած» շրջակայքում, կասենք, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է Կոշիի պայմանին x_o կետում, եթե $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ (\delta < \gamma)$ $\forall x' x''\ 0<|x'-x_o|<\delta,\ 0 < |x''-x_o| < \delta : |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$:

Թեորեմ 1: Որպեսզի $f(x)$-ը ունենա վերջավոր սահման $x = x_o$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(x)$-ը բավարարի Կոշիի պայմանին այդ կետում:

Ապացուցում. Անհրաժեշտություն. Դիցուք՝ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = K \in R$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$

$$(\delta < \gamma)\ \forall x,\ 0 < |x-x_o| < \delta : |f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x', x''\ |x'-x_o| < \delta,$$

$$|x''-x_o| < \delta : |f(x') - K| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x'') - K| < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Այստեղից՝ $|f(x') - f(x''| = |[f(x') - K] + [K - f(x'')]| \le |f(x') - K| +$ $+|f(x'') - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$:

Ապացույց: Ունենք՝ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ (\delta < \gamma)\ \forall\ x', x''$, $0 < |x'-x_o| < \delta$, $0 < |x''-x_o| < \delta$: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$:

Վերցնենք $\forall x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, $x_n \in \overset{0}{U}_\gamma(x_0) \Rightarrow \delta > 0\ (\delta < \gamma)\ \exists\ n_1\ \forall\ n \geq n_1$: $0 < |x_n-x_o| < \delta$,

$\forall\ m \geq n_1$: $0 < |x_m-x_o| < \delta \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$:

Այսինքն՝ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ուրեմն՝ այն զուգամետ է : Ուրեմն $\exists\ K \in R$: $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} K$:

Մնում է ցույց տալ, որ կամայական այլ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($y_n \in \overset{0}{U}_\gamma(x_0)$) հաջորդականության համար, որը ձգտում է x_o-ի: $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} K$: Դիցուք՝ $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} M$: Կազմենք նոր հաջորդականություն՝ $z_n = x_k$, երբ $n=2k-1$ և $z_n=y_k$, երբ $n=2k$:

Ակնհայտ է, որ $z_n \underset{n\to\infty}{\to} x_o \Rightarrow \{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$-ը զուգամետ է:

Դիցուք՝ $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} N$: Բայց՝ $N = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{2k-1}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = K$ և $N = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = M$: Այստեղից ստանում ենք՝ $M = K$: ■

Դիտողություն: Կոշիի պայմանը, երբ օրինակ $x_o= +\infty$ կայանում է հետևյալում՝ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\ x', x'' \in D_f$, $x' > \delta$, $x'' > \delta$: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$: Այս պայմանը ևս համարժեք է $+\infty$-ում վերջավոր սահմանի գոյությանը (համ. 5.6 (1)):

12. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԵՏՈՒՄ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $<a; b>$ միջակայքում և $x_o \in (a\ ;\ b)$: $f(x)$-ը կոչվում է անընդհատ x_o կետում, եթե $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$:

Եթե $f(x)$ որոշված է նաև միջակայքի a (b) ծայրակետում, ապա $f(x)$-ը անընդհատ է a-ում (b-ում), եթե $\exists\ f(a+0) = f(a)$ ($\exists\ f(b-0) = f(b)$):

Օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի հատկություններից, ստանում ենք անընդհատ ֆունկցիաների հետևյալ հատկությունները:

Թեորեմ 1: Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված են $<a;\ b>$ միջակայքում, անընդհատ են x_0 կետում ($x_0 \in <a;\ b>$), ապա x_0–ում անընդհատ են նաև $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ և $\frac{f(x)}{g(x)}$, ($g(x_0) \neq 0$) ֆունկցիաները:

Ապացուցենք, օրինակ վերջինը:

Ունենք՝ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$: ■

Թեորեմ 2: Եթե f(x)-ը անընդհատ է $<a\ ;\ b>$ միջակայքի ներքին x_0 կետում և $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, ապա f(x)-ը պահպանում է այդ կետում իր ունեցած նշանը x_0-ի որոշ շրջակայքում: Այսինքն՝

$\exists\ U_\delta(x_0) \subset (a;b)\ \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) > 0\ \ (f(x) < 0)$:

Ապացուցում: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0 \ \Rightarrow\ \varepsilon = f(x_0) > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$

$(U_\delta(x_0) \subset (a;b))\ \forall x \in U_\delta(x_0) : |f(x)-f(x_0)| < f(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)-f(x_0) = 0$:

$f(x_0) < 0$ դեպքը, ըստ էության չի տարբերվում նախորդից: ■

Սահմանում: Դիցուք $f : A \to B$, $g : C \to D$ $(D \subset A)$ (A-ն, B-ն, C-ն և D-ն միջակայքեր են): $\forall t \in D$, $g(t) \in D \subset A \Rightarrow g(t) \in A$: Ուրեմն իմաստ ունի $h(t) = f(g(t)) \in B$: Ծնվեց ֆունկցիա՝ $h : C \to B$: Այն կոչվում է *բարդ ֆունկցիա*՝ $h(t) = f(g(t))$:

Թեորեմ 3 (բարդ ֆունկցիայի անընդհատության մասին):

Դիցուք՝ f(x)-ը անընդհատ է X միջակայքի ներքին x_0 կետում, իսկ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է T միջակայքի t_0 ներքին կետում և $\varphi(t_0) = x_0$: Այդ դեպքում $f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է t_0-ի որոշ շրջակայքում և անընդհատ է t_0 կետում:

Ապացուցում: f (x)–ի անընդհատությունից x_0 կետում հետևում է, որ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ U_\gamma(x_0) \subset X$, $\forall x \in U_\gamma(x_0) : |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$: $x = \varphi(t)$-ն անընդհատ է $t_0 \in T$ կետում $\Rightarrow \gamma > 0\ \exists\ \delta > 0$, $U_\delta(t_0) \subset T$, $\forall\ t \in U_\delta(t_0)$: $x = \varphi(t) \in U_\gamma(x_0) \subset X \Rightarrow f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է $U_\delta(t_0)$-ում և անընդհատ է t_0-ում: ■

Խնդիր 1 (հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության մասին): Դիցուք $f: [a;\ b] \to R$, $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է [a; b] հատվածի յուրաքանչյուր կետում և մոնոտոն աճող (նվազող) է: Ապացուցել, որ $\exists x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան՝ $f^{-1} : [c;\ d] \to [a;\ b]$, $c=f(a)$, $d=f(b)$ ($c=f(b)$, $d=f(a)$): Այդ ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ է [c ; d] – ի յուրաքանչյուր կետում:

Խնդիր 2. Դիցուք f: (a; b) $\to$ R, y=f(x)-ը անընդհատ է (a; b)-ի յուրաքանչյուր կետում և մոնոտոն աճող (նվազող) է: Գոյություն ունեն (վերջավոր կամ անվերջ) c=f(a+0), d=f(b-0) (c=f(b-0), d=f(a+0)): Ապացուցել, որ $\exists x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիա՝ $f^{-1}: (c; d) \to (a; b)$: Այդ ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ է (c; d) – ի յուրաքանչյուր կետում: Այն դեպքում, երբ $a = -\infty$, ապա $c = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\left(d = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right)$, իսկ երբ $b = +\infty$, ապա

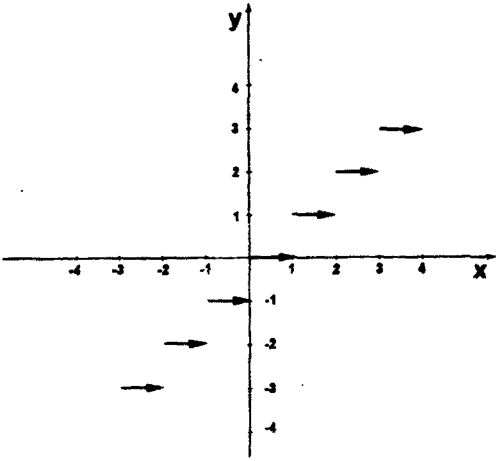
$$d = \lim_{x \to +\infty} f(x) \ \left(c = \lim_{x \to +\infty} f(x)\right):$$

13. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ, ԽԶՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ f(x)-ը որոշված է X միջակայքում: $x_0 \in X$ կոչվում է ***խզման կետ,*** եթե այն անընդհատության կետ չէ: Դա նշանակում է, որ կամ այդ կետում գոյություն չունի վերջավոր սահման, կամ սահմանը գոյություն ունի, բայց այն հավասար չէ ֆունկցիայի արժեքին այդ կետում: Խզման կետերը լինում են առաջին և երկրորդ սեռի: x_0 խզման կետը կոչվում է ***առաջին սեռի խզման կետ,*** եթե $\exists\, f(x_o - 0)$ և $\exists\, f(x_o+0)$: Մասնավորապես, եթե $f(x_o-0) = f(x_o+0)$, ապա x_0 խզման կետը կոչվում է ***վերացնելի խզման կետ.*** Եթե x_o-ն առաջին սեռի խզման կետ չէ, ապա այն կոչվում է ***երկրորդ սեռի խզման կետ:*** Մասնավորապես, եթե $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, ապա x_o–ն երկրորդ սեռի խզման կետ է:

Օրինակներ. **1) f(x) = [x] (x-ի ամբողջ մասը):** Ըստ ամբողջ մասի սահմանման՝

$f(x)=n-1,\ x\in[n-1;n)$ և $f(x)=n,\ x\in[n;n+1)$ $(n \in Z)$: Ուրեմն՝ $f(n-0)=n-1$, $f(n+0)=n$: Այսպիսով, այս ֆունկցիայի համար յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ հանդիսանում է առաջին սեռի խզման կետ (տե՛ս նկ.1):



Նկ.1

2° $f(x)=\dfrac{(x^2-1)}{(x-1)}$, $x\neq 1$, $f(1)=A$:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1)$, եթե $A\neq 1$: Այս դեպքում x=1–ը առաջին սեռի վերացնելի խզման կետ է: Երբ A=1, ապա x=1-ը անընդհատության կետ է:

3°. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=A$: $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$:

Իրոք $x_n = (\dfrac{\pi}{2}+\pi n)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, բայց $f(x_n) = \sin(\dfrac{\pi}{2}+\pi n) = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է: Օգտվելով սահմանումից ըստ Հայնեի, ստանում ենք՝ $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$: Ուրեմն՝ x = 0–ն երկրորդ սեռի խզման կետ է:

14. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում: Տարրական են կոչվում y=c հաստատուն, $y=x^\alpha$ $(x>0, \alpha\neq 0)$ աստիճանային, $y=a^x$ $(a>0)$ ցուցչային, $y=\log_a x$

($a>0,\ a\neq 1$) լոգարիթմական, y=sinx, y=cosx, y=tgx, y= ctgx եռանկյունաչափական, y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները և այն բոլոր ֆունկցիաները, որոնք ստացվում են վերը նշված ֆունկցիաների թվաբանական գործողություններից և այդ ֆունկցիաների վերջավոր թվով վերադրումից (բարդ ֆունկցիաներից):

Թեորեմ 1: Բոլոր տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման (գոյության) տիրույթի բոլոր կետերում (այսինքն, այն կետերում, որտեղ իմաստ ունի գրված արտահայտությունը):

Ապացույց: Այն, որ հաստատունը անընդհատ է` $\forall x_0 \in R$ կետում ակնհայտ է: Ապացուցենք, որ $y=x^{\alpha}\ (\alpha\neq 0)$ ֆունկցիան անընդհատ է կամայական $x_0>0$ կետում: Այսինքն` $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\alpha}=x_0^{\alpha}$, որը հաջորդականության լեզվով նշանակում է` $x_n>0,\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

$$\Rightarrow x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} x_0^{\alpha}\ \ (x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} x_0^{\alpha} \Leftrightarrow \ln x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} \ln x_0^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\cdot \ln x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha\cdot\ln x_0$$

$\Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, տե՛ս 5.6, խնդ. 2):

$a^x\ (a>0)$ ցուցչային և $\log_a x$ ($a>0,\ a\neq 1$) լոգարիթմական ֆունկցիաների անընդհատությունը անմիջապես հետևում է 5.6-ի խնդ.1, 2–ից:

Այժմ ապացուցենք cosx–ի անընդհատությունը կամայական x_0 կետում: Այսինքն` $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$: Դա նշանակում է, որ`

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon,x_0)>0, \forall x\ \ |x-x_0|<\delta:\ \ |\cos x-\cos x_0|<\varepsilon:$$

Բայց` $|\cos x-\cos x_0|=$

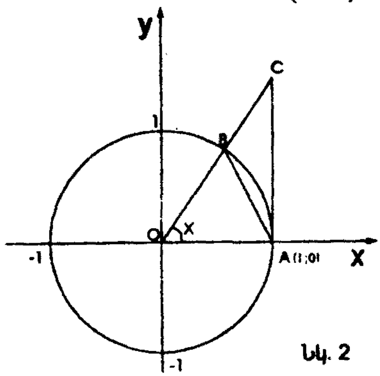
$$=2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|<\delta=\varepsilon\ :$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք $|\sin x|\leq|x|\ (x\in(-\infty;+\infty))$ անհավասարությունից, որը կապացուցենք ստորև (տե՛ս 15.(4)): Նկատենք, որ գտնված δ–ն կախված է միայն ε–ից (այն x_0–ից կախված չէ): y=sinx ֆունկցիայի անընդհատությունը ապացուցվում է նմանակերպ:

tgx և ctgx ֆունկցիաների անընդհատությունը իրենց որոշման տիրույթի կետերում հետևում է 12.–ի թ.1–ից: Յակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհատությունը հետևում է 12.–ի խնդ. 1, 2– ից:

15. ՈՐՈՇ ՆՇԱՆԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ Նախ, ենթադրենք՝ $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (տե՛ս նկ. 2):



Նկ. 2

Համեմատենք ΔAOB – ն սեկտոր AOB (u. AOB) –ի հետ: Պարզ է, որ $\Delta AOB \subset uAOB$: Ուրեմն, մակերեսների համար ստանում ենք՝

$$\Rightarrow S_{\Delta AOB} < S_{uAOB} \Rightarrow \frac{OA\cdot OB\sin x}{2} < \frac{OA^2}{2}x \Rightarrow \sin x < x$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (1):$$

Մյուս կողմից՝ $S_{uAOB} < S_{\Delta AOC} \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{OA\cdot AC}{2}(AC=\operatorname{tg}x)$:

Ուրեմն՝ $x < \operatorname{tg}x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \cos x$:

Այսպիսով՝ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$: (2)

Այժմ, ենթադրենք $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right) \Rightarrow -x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ և, ուրեմն $(-x)$-ի համար ճշմարիտ է (2)-ը՝ $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$: Քանի որ cosx–ը զույգ է, իսկ sinx–ը՝ կենտ, ապա նորից ստանում ենք (2)–ը: Այսպիսով՝

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\quad\left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right): \tag{3}$$

Քանի որ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$, ապա ըստ հայտնի «ոստիկանների» կանոնի ստանում ենք՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

Դիտողություն: (3) –ից հետևում է, որ՝ $|\sin x|\le|x|\quad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$: Ապացուցենք, որ այդ անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $|x|\ge\frac{\pi}{2}$ դեպքում: Իրոք՝ $|\sin x|\le 1<\frac{\pi}{2}\le|x|\;\Rightarrow|\sin x|<|x|$: Այսպիսով՝

$$|\sin x|\le|x|\quad\left(x\in(-\infty;+\infty)\right): \tag{4}$$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ Նախ ապացուցենք, որ՝ $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$: Դա նշանակում է, որ՝ $\forall x_n>0, x_n\underset{n\to\infty}{\to}0\;:\;(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\to e$: Պարզ է, որ՝ $p_n=\frac{1}{x_n}\underset{n\to\infty}{\to}+\infty$: Հետևաբար ինչ որ N համարից սկսած՝ $p_n>1$: Կարելի է համարել, որ՝ N=1 (հաջորդականության առաջին վերջավոր թվով անդամներ սահմանի վրա չեն ազդում): Եթե $m_n=[p_n]$ ($m_n\in N$), ապա՝ $m_n\le p_n<m_n+1$:

Ուրեմն՝ $y_n=\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n}<\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}<\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}=z_n$:

Մնում է ապացուցել, որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$:

Նկատենք, որ՝ $y_n=\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{-1}$,

$\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{-1}\underset{n\to\infty}{\to}1\qquad\left(m_n>p_n-1\Rightarrow m_n\underset{n\to\infty}{\to}+\infty\right)$ և

$z_n=\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n}\cdot\left(1+\frac{1}{m_n}\right),\qquad 1+\frac{1}{m_n}\underset{n\to\infty}{\to}1$:

Խնդիրը հանգեց նրան, որ՝ $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \underset{n\to\infty}{\to} e, k_n \in \mathbf{N}, \quad k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$:

Քանի որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e$, ապա՝ $\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n \ge N: \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$:

$$k_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \exists n_0, \forall n \ge n_0 : k_n > N \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} - e\right| < \varepsilon \ (n \ge n_0)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \underset{n\to\infty}{\to} e:$$

Այսպիսով ապացուցվեց, որ $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$: Այն, որ $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ապացուցվում է նման կերպ:

3. $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$, $a>0, a\ne1$:

Իրոք՝

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to0}\log_a e\cdot\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \log_a e\cdot\ln e = \log_a e:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք $\ln x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից $x=e$ կետում:

Երբ՝ $a=e$, ունենք՝ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$:

4. $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$, $a>0$:

Քանի, որ a^x ֆունկցիան անընդհատ է $x=0$ կետում, ապա՝ $y = a^x - 1 \underset{x\to0}{\to} 0 \ (x = \log_a(1+y))$:

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$:

Մասնավորապես՝ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$:

5. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha}$

$$y(x)=(1+x)^\alpha-1\ \left((1+x)^\alpha=1+y(x)\Rightarrow \alpha\cdot\ln(1+x)=\ln(1+y(x))\right)$$

ֆունկցիան անընդհատ է $x=0$ կետում: Նույն կետում անընդհատ է նաև $\ln(1+y(x))$ բարդ ֆունկցիան (տե՛ս 12. թ.3): Ուրեմն՝ $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$:

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{\ln(1+y(x))}\cdot\frac{\alpha\cdot\ln(1+x)}{x}=\alpha$:

Ստացված սահմաններից հետևում է՝ $\boxed{\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x}$,

$\boxed{\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x}$, $\boxed{a^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x\ln a}$, $\boxed{(1+x)^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha x}$:

Քննարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Հաշվել՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$:

Սահմանը հաշվելիս, արտադրիչը փոխարինել ենք համարժեք ֆունկցիայով (տե՛ս 9. թ.1): Նկատենք, որ գումարելին, ընդհանրապես ասած, չի կարելի փոխարինել համարժեք ֆունկցիայով: Եթե քննարկվող օրինակում, cosx-ը փոխարինենք իրեն համարժեք 1-ով, ապա կստանանք սխալ արդյունք՝ 0: Ստացանք, որ՝ $\boxed{1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}}$:

Օրինակ 2. Հաշվել՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi^{\sin 3x}-1}{\ln(\cos 5x)}\cdot\left((1+x)^{\frac{1}{3}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\ln\pi}{\ln(1+(\cos 5x-1))}\cdot\frac{x}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln\pi}{-2\sin^2\frac{5}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2\cdot\ln\pi}{-2\cdot 25x^2}=-\frac{2}{25}\cdot\ln\pi:$$

Օրինակ 3. Հաշվել՝ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\mathrm{ctg}x^2}$: Այստեղ առկա է 1^∞ տեսքի անորոշությունը: Ընդհանրապես, երբ պետք է հաշվել $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, որտեղ՝ $f(x)\neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1, \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, ապա նպատակահարմար է կատարել հետևյալ ձևափոխությունը՝

$[f(x)]^{g(x)} = \{ [1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \}^{g(x)(f(x)-1)}$ և օգտվել $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ սահմանից: Եթե $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = A \in R$, ապա հեշտ է ապացուցել, որ՝ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{A}$: Տվյալ դեպքում՝

$$\lim_{x\to 0} ctgx^2 \cdot (\cos 3x - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}\cdot \cos x^2}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-9x^2}{2x^2} = -4{,}5:$$

Ուրեմն՝

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{ctgx^2} = e^{-4.5}:$$

16. ՀԱՏՎԱԾԻ ՎՐԱ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ E բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է E բազմության յուրաքանչյուր կետում: Այդ փաստը գրի է առնվում հետևյալ կերպ՝ $f\in C(E)$ (C տառը լատիներեն continuum (անընդհատ) բառի առաջին տառն է):

Թեորեմ 1 (Վայերշտրասի առաջին թեորեմը): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է: $f\in C[a;b] \Rightarrow$ f-ը սահմանափակ է:

Ապացուցում. Դիցուք ճիշտ է հակառակը՝ f ֆունկցիան անսահմանափակ է: Ենթադրենք այն անսահմանափակ է,օրինակ, վերևից: $\Rightarrow \forall n\in N \ \exists x_n\in[a;b] : f(x_n)>n$: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ սահմանափակ հաջորդականությունը ($x_n\in[a;b]$) ունի $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_o$, $x_o\in[a;b]$: $f\in C[a;b]$ $\Rightarrow$ f-ը անընդհատ է x_o կետում, այսինքն՝ $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_o)$: Մյուս կողմից $f(x_{n_k})>n_k\geq k \Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը (այն դեպքում, երբ f-ը անսահմանափակ է ներքևից, ապացույցը ստացվում է նման կերպ): ■

Հետևանք 1. Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ունի ճշգրիտ եզրեր:

Թեորեմ 2 (Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմը) :

Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերին, այսինքն՝ $\exists\ x_1,\ x_2 \in [a;b] : f(x_1)=\sup\limits_{[a;b]} f$, $f(x_2) = \inf\limits_{[a;b]} f$ (ունի մեծագույն ($f(x_1)$) և փոքրագույն ($f(x_2)$) արժեքներ:

Ապացուցում. Դիցուք $\sup\limits_{[a:b]} f = M$, $\inf\limits_{[a;b]} f = m$: Պետք է ապացուցել, որ M-ը և m -ը արժեքներ են: Ենթադրենք M–ը արժեք չէ, այսինքն՝ $\forall x\in[a;\ b] : f(x) < M$: Դիցուք՝ $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$: Ակնհայտ է, որ՝ $g\in C[a;\ b]$ և $\forall x \in [a;\ b] : g(x)> 0$: Ըստ թեորեմ 1-ի g(x)-ը սահմանափակ է $\Rightarrow \exists\ K\in R\ \forall x\in[a;b] : 0 < g(x) \le K: \Rightarrow K>0,\ \dfrac{1}{M-f(x)} \le K$

$\Rightarrow [M-f(x)]\,K \ge 1 \Rightarrow M-f(x)\ge\dfrac{1}{K} \Rightarrow f(x) \le M-\dfrac{1}{K}$:

Ստացվեց, որ f–ի արժեքների բազմությունը ունի M-ից փոքր վերին եզր, դա հակասում է նրան, որ M= sup f: Նույն կերպ ապացուցվում է, որ m–ը արժեք է: ■

Թեորեմ 3. (Բոլցանո-Կոշիի թեորեմը ֆունկցիայի զրոների մասին): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան, որը ծայրակետերում ունի տարբեր նշանի արժեքներ, գոնե մեկ ներքին կետում հավասարվում է զրոյի: Այսինքն

$$f\in C[a;b],\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c\in(a;b) : f(c) = 0:$$

Ապացուցում: Դիցուք $f(a) < 0$, $f(b) > 0$: Կիսենք [a ; b] հատվածը: Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$: Այս դեպքում թեորեմի ապացուցումը ավարտված է ($c=\dfrac{a+b}{2}$):

2. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$: Այս դեպքում գոյություն ունի [a; b]-ի այն $[a_1;\ b_1]$ կեսը, որ՝ $f(a_1) < 0$, $f(b_1) >0$ (եթե $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$, ապա $[a_1;\ b_1] = [\dfrac{a+b}{2};\ b]$ իսկ, եթե $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$, ապա՝ $[a_1;\ b_1] = [\,a\ ;\ \dfrac{a+b}{2}]$):

Կիսելու պրոցեսը շարունակենք. հնարավոր է երկու դեպք՝

1. Ինչ-որ քայլում կիսված հատվածի միջնակետում ֆունկցիան դառնում է զրո, և թեորեմի ապացուցումը ավարտվում է:

2. Ոչ մի քայլում կիսված հատվածների միջնակետերում f(x)-ը զրո չի դառնում: Այս դեպքում առաջանում է ներդրված $[a_k; b_k]$ հատվածների հաջորդականություն այնպիսին, որ՝

$f(a_k)<0$, $f(b_k)>0$, $k=1,2,\ldots$: Ընդ որում՝ $b_k-a_k = \frac{b-a}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$: Ըստ ներդրված հատվածների հաջորդականության հայտնի հատկության (տե՛ս 5.4,թ.3)՝ $\exists\, c\in [a_k; b_k]$ $(k = 1, 2,\ldots)$, $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$:

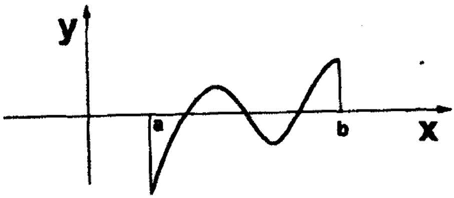
$f\in C[a;b] \Rightarrow$ f(x)-ը անընդհատ է c կետում,

$$\forall k, f(a_k)<0 \Rightarrow f(c)=\lim_{k\to\infty} f(a_k)\leq 0: \qquad (1)$$

$$\forall k, f(b_k)>0 \Rightarrow f(c)=\lim_{k\to\infty} f(b_k)\geq 0 \qquad (2)$$

(1)-ից և (2)-ից հետևում է, որ $f(c) = 0$: ■

Թեորեմը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն (տե՛ս նկ. 2):



Նկ.2

Դիտողություն. Թեորեմի ապացուցումը ցույց է տալիս, թե ինչպես ցանկացած ճշտությամբ կարելի է գտնել f(x)-ի զրոները:

Թեորեմ 4 (Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմը միջանկյալ արժեքների մասին): Եթե հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան ծայրակետերում ունի տարբեր արժեքներ, ապա նրանց միջև ընկած ցանկացած թիվ նույնպես արժեք է:

Այսինքն՝ $f\in C[a;b]$, $f(a)<f(b)$ $(f(a)>f(b)) \Rightarrow \forall M\in(f(a);f(b))$ $(M\in(f(b);f(a)))$ $\exists c\in(a;b)$: $f(c)=M$:

Ապացուցում: Դիցուք $f(a) < M < f(b)$: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝ $g(x)=M-f(x)$, $g\in C[a;b]$, $g(a)=M-f(a) > 0$, $g(b)=M-f(b)<0$:

Ըստ թեորեմ 3-ի՝ $\exists\, c\in (a; b)$: $g(c) = 0 \Rightarrow M - f(c)=0 \Rightarrow f(c) = M$: ■

Հետևանք (տե՛ս. թ. 1–4): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը հատված է (հատվածը կարող է բաղկացած լինել մեկ կետից):

Ապացուցում: Դիցուք $f\in C[a; b]$ և E_f-ը նրա արժեքների բազմությունն է: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $\exists \sup\limits_{[a;b]} f=M$, $\exists \inf\limits_{[a;b]} f=m$: Ապացուցենք, որ $E_f = [m; M]$: Ըստ թեորեմ 2-ի, m-ը և M-ը արժեքներ են՝ $\exists\, x_1, x_2 \in [a; b]$, $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$: Եթե $m = M$, ապա $\forall x \in [a; b] : m \le f(x) \le m \Rightarrow f(x) \equiv m \Rightarrow E_f = \{m\} = [m; m]$, և թեորեմը ապացուցված է: Այժմ ենթադրենք $m<M$ և, որոշակիության համար՝ $x_1 < x_2$: Պարզ է, որ $f \in C[x_1; x_2]$ և՝ $f(x_1)<f(x_2)$: Ըստ թ.4. -ի՝ $\forall K$, $m<K<M$ $\exists\, c \in (x_1;x_2) : f(c) = K \Rightarrow K \in E_f$: Այսպիսով՝ $[m; M] \subset E_f$: Մյուս կողմից՝ $\forall y \in E_f$, $\exists x \in [a; b]$, $f(x)=y$, $m \le f(x) \le M \Rightarrow y \in [m ; M] \Rightarrow E_f \subset [m; M]$, ուրեմն՝ $E_f = [m; M]$: ■

17. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում: Դիցուք f(x)-ը որոշված է X միջակայքի վրա: Կասենք, որ f(x) ֆունկցիան ***հավասարաչափ անընդհատ*** է X-ի վրա եթե՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon > 0\ \forall\ x_1,x_2 \in X$, $|x_1-x_2|< \delta$: $|f(x_1)-f(x_2)|< \varepsilon$: Պարզ է, որ հավասարաչափ անընդհատությունից հետևում է անընդհատությունը X-ի յուրաքանչյուր կետում (կետ առ կետ անընդհատությունը): Կետ առ կետ անընդհատության պայմանը տարբերվում է հավասարաչափ անընդհատությունից նրանով, որ δ-ն, ընդհանրապես ասած, կախված է նաև կետից՝ $\delta = \delta(\varepsilon, x)$: Այդ պատճառով կետ առ կետ անընդհատությունից, ընդհանրապես ասած, չի բխում հավասարաչափ անընդհատությունը:

Ոչ հավասարաչափ անընդհատությունը X-ի վրա նշանակում է՝ $\exists\, \varepsilon > 0\quad \forall\ \delta > 0\quad \exists\, x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| < \delta$: $|f(x) - f(x_2)| \ge \varepsilon$: Ոչ հավասարաչափ անընդհատության համար բավարար է հետևյալ պայմանը՝

$\exists\, x'_n, x''_n \in X : x'_n - x''_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ և $|f(x'_n) - f(x''_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$ (K-ն դրական թիվ է կամ $+\infty$):

Իրոք, վերցնենք $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0$, երբ $K>0$ ($\varepsilon = 1$, երբ $K = +\infty$), $\exists n_1$ այնպիսին, որ $\forall\ n \ge n_1 : |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon$ և $\forall \delta > 0\ \exists\, n_2$ այնպիսին, որ $\forall n \ge n_2$ $|x'_n - x_n''| < \delta$: Եթե $n_3=\max(n_1;n_2)$, ապա $\forall n \ge n_3 : |x'_n - x_n''| < \delta$ և $|f(x_n')-f(x_n'')| \ge \varepsilon \Rightarrow$ f(x)-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է X-ի վրա:

Օրինակներ.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0;+\infty)$: Ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝

$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\le\sqrt{x_1-x_2}$ $(x_1\ge x_2\ge 0)$: Իրոք, այդ գնահատականը համարժեք է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}\le x_1-x_2 \Leftrightarrow x_2\le\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow\sqrt{x_2}\le\sqrt{x_1}\Leftrightarrow x_2\le x_1$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2,\ x_1-x_2<\delta\ (x_1\ge x_2)$:

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\le\sqrt{x_1-x_2}<\sqrt{\delta}\le\varepsilon \ \Rightarrow\ \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}<\varepsilon\ \ (0<\delta\le\varepsilon^2)$$: Ուրեմն

$f(x)=\sqrt{x}$ -ը հավասարաչափ անընդհատ է $[0;+\infty]$-ի վրա:

2. $f(x)=\ln x$, $x\in(0;1]$, $f\in C(0;1]$: Նկատենք, որ $f(+0)=-\infty$: Օգտվենք ոչ հավասարաչափ անընդհատության բավարար պայմանից: Ընտրենք հետևյալ երկու հաջորդականությունները՝

$$x_n'=\frac{e}{n},\ x_n''=\frac{1}{n}:$$

Ունենք՝

$$|x_n'-x_n''|=\frac{e}{n}-\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \ |f(x_n')-f(x_n'')|=\ln\frac{e}{n}-\ln\frac{1}{n}=\ln e=1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1:$$

$\Rightarrow$ $f(x)=\ln x$-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է $(0;1]$-ի վրա (այն հատված չէ):

Կանտորի թեորեմը:* Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է: $f\in C[a;b]\Rightarrow f$-ը հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացույց: Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ f-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է: Այսինքն՝ $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\ x',x''\in[a;b]$, $|x'-x''|<\delta$: $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon$: $\Rightarrow$ $\delta_n=\frac{1}{n}>0$, $\exists\ x_n', x_n''\in[a;b]$, $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$:

$|(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon$ $(n=1,2...)$:

$\{x_n'\}$-ը սահմանափակ է $(x_n'\in[a;b],\ n=1,2...)$: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի գոյություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $\{x_{n_k}'\}$:

Դիցուք՝

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=c\in[a;b]:|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}\Rightarrow x_{n_k}'-\frac{1}{n_k}<x_{n_k}''<x_{n_k}'+\frac{1}{n_k}:$$

Քանի որ $n_k\to\infty$, ապա՝ $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}'\pm\frac{1}{n_k})=c$

$$\Rightarrow\exists\lim_{k\to\infty}x_{n_k}''=c:f\in C[a;b]\Rightarrow f\text{-ը անընդհատ է } c \text{ կետում:}$$

---

* Կանտոր Գեորգ (1845-1918), գերմանացի մաթեմատիկոս :

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(c)$: Ստացվածը հակասում է $\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| \geq \varepsilon$ (k=1,2...) պայմանին: ■

18. ԱԾԱՆՑՅԱԼ

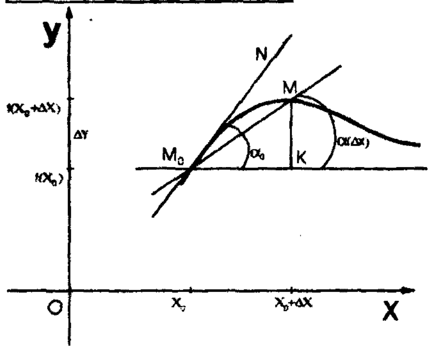
18.1. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՄԱՍՏԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում, x_o-ն X միջակայքի ներքին կետ է, Δx-ը (անկախ փոփոխականի աճը) այնպիսին է, որ $x_o+\Delta x \in X$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_o)$ (ֆունկցիայի աճը x_o կետում): Եթե $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ապա այդ սահմանը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի ***ածանցյալ*** x_o կետում, իսկ ֆունկցիան կոչվում է ***ածանցելի*** այդ կետում: Ածանցյալը x_o կետում նշանակում են՝ $f'(x_0)$, կամ՝ $\dfrac{df}{dx}(x_0)$: Այսպիսով՝

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}:$$

Ածանցյալը կարելի է սահմանել հետևյալ համարժեք ձևով՝

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad (x - x_0 = \Delta x):$$



Նկ 3.

Սահմանում 2: $M_o(x_o,y_o)$ և $M(x_o+\Delta x,\ y_o+\Delta y)$ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերը միացնող ուղիղը կոչվում է հատող: Դիցուք $\alpha(\Delta x)$-ը M_oM ուղղի OX առանցքի հետ կազմած անկյունն է (տե՛ս նկ.3): Եթե $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)=\alpha_o$, ապա կասենք, որ գոյություն ունի հատողների սահմանային դիրք, երբ M-ը մնալով գրաֆիկի վրա ձգտում է M_o-ին: Հատողների այդ սահմանային դիրքը կոչվում է M_o կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի *շոշափող:*

Թեորեմ: M_o կետում շոշափող գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ x_o կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ վերջավոր կամ անվերջ: Ընդ որում անվերջ ածանցյալի դեպքում շոշափողը զուգահեռ է Y առանցքին:

Ապացույց: Տանենք M_oK-ն զուգահեռ X-ին, $<MM_oK = \alpha(\Delta x)$: Շոշափողի գոյությունը համարժեք է նրան, որ $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = \alpha_o$:

Այն իր հերթին, երբ $\alpha_0\neq\frac{\pi}{2}$ համարժեք է նրան, որ

$\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg(\alpha(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$: Եթե $f'(x_o)=\infty$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$), ապա $\alpha_o=\frac{\pi}{2}$: ■

Դիտողություն: Եթե $f'(x_0)\neq\infty$, ապա շոշափողի անկյունային գործակիցը՝ $tg\alpha_0=f'(x_0)$:

Դրանում է կայանում ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: $M_o(x_o,y_o)$ կետում շոշափողի հավասարումն է՝ $\boxed{y= f'(x_o)(x-x_o) + y_o}$ $(f(x_o)=y_o)$:

Այժմ տանք ածանցյալի ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք մարմինը (նյութական կետը) կատարում է ուղղագիծ շարժում: Այն բնորոշվում է ժամանակի t պահին անցած $x = x(t)$ ճանապարհով: t_0-ից մինչև $t_0+\Delta t$ ժամանակի ընթացքում մարմինը կանցնի $\Delta x=x(t_o+\Delta t)-x(t_o)$ ճանապարհ: Այդ դեպքում $\frac{\Delta x}{\Delta t}$-ն ունի միջին արագության իմաստ: Իսկ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=x'(t_0)$-ն կոչվում է t_o պահին մարմնի *ակնթարթային արագություն:*

18.2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

Սահմանում: Դիցուք $y=f(x)$ որոշված է x_o կետի ինչ-որ շրջակայքում: Այդ ֆունկցիան կոչվում է *դիֆերենցելի* x_o կետում, եթե՝

$$\boxed{\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0} \qquad (1)$$

որտեղ A-ն հաստատուն է, $o(\Delta x)$-ը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան Δx-ը, երբ $\Delta x\to 0$: Այսինքն՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$:

Թեորեմ: Որպեսզի $y=f(x)$ ֆունկցիան, որոշված x_o կետի ինչ-որ շրջակայքում լինի դիֆերենցելի x_o կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ածանցելի x_o կետում, այսինքն $f(x)$-ը ունենա վերջավոր ածանցիալ $f'(x_o)$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Տրված է, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_o կետում, այսինքն տեղի ունի (1)-ը:

$$(1)\ \Rightarrow\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\underset{\Delta x\to 0}{\to}A\Rightarrow\exists f'(x_0)=A:$$

Բավարարություն: Հայտնի է, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ x_o կետում

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\to}0\quad\Rightarrow\quad\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(\Delta x):$$

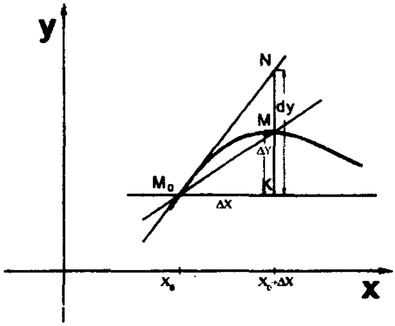
Բայց՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=0$: Այսպիսով՝ ճիշտ է (1)-ը, ուրեմն $f(x)$-ը դիֆերենցելի է x_o կետում: ■

Դիտողություն: Դիֆերենցիելության (1) պայմանը կարելի է գրել հետևյալ համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,\quad \Delta x\to 0}, \qquad (2)$$

որտեղ $\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$ և հետագայի համար նպատակահարմար է ընդունել, որ $\alpha(0)=0$:

Սահմանում: Դիցուք $y=f(x)$-ը որոշված է x_o-ի շրջակայքում և դիֆերենցելի է x_o կետում: $dy=df(x_o)=f'(x_o)\Delta x$-ը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի *դիֆերենցիալ* x_o կետում: Ընդ որում, անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալ ասելով հասկանում ենք նրա աճը՝ $dx=\Delta x$: Այսպիսով, դիֆերենցիալը՝ $\boxed{dy=df(x)=f'(x)dx}$: Ինչպես տեսնում ենք, դիֆերենցիալը կախված է x-ից և Δx-ից: Դիֆերենցելիության (1) պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝ $\boxed{\Delta f(x_0)=df(x_0)+o(dx),\ \ dx\to 0}$: Նկար 4-ից երևում է դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը՝ dy=KN (Δy=KM, M_0N–ը շոշափողն է):



Նկ.4

Օրինակ: $f(x)=x^2$,

$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$:

Ուրեմն՝ $2x_0=A=f'(x_0)$, $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$ ($\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{\to} 0$):

18.3. ՈՐՈՇ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԸ

Ածանցյալները հաշվելիս կօգտվենք նշանավոր սահմաններից (տե՛ս 15.), 9.-ի թ.1-ից և տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունից:

1. $y=x^\alpha$ $(\alpha\neq 0)$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{\Delta x}=\lim\frac{\alpha x^\alpha\Delta x}{x\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}}$, մասնավորապես՝ $x'=1$:

2. $y=a^x$ $(a>0)$, $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$:

Այսպիսով՝ $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a}$, մասնավորապես՝ $\boxed{(e^x)'=e^x}$:

3. y=sinx

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos\frac{x+\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x :$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$:

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$:

18.4. ԱԾԱՆՑՄԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

Լեմմ: Եթե ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և ածանցելի է այդ միջակայքի ինչ-որ x կետում, ապա այդ կետում այն անընդհատ է:

Ապացուցում. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = y'(x)0 = 0 :$

Այսինքն՝ $\lim_{\Delta x \to 0} (y(x+\Delta x) - y(x)) = 0 :$

Ստացվեց, որ y(x)-ը անընդհատ է x կետում: ■

Թեորեմ 1: Դիցուք U(x), V(x) ֆունկցիաները որոշված են x կետի ինչ-որ շրջակայքում և՝ $\exists\, U'(x)$, $\exists\, V'(x)$: Այդ դեպքում x կետում գոյություն ունեն U(x) և V(x) ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի ածանցյալները և՝

1) $(U \pm V)' = U' \pm V'$,

2) $(U.V)' = U'V + V'U$,

3) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{(U'V - UV')}{V^2}$ (V(x)≠0):

Ապացուցում: Ապացուցենք (1)-ը:

$\Delta(U \pm V)(x) = U(x+\Delta x) \pm V(x+\Delta x) - (U(x) \pm V(x)) = \Delta U(x) \pm \Delta V(x)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta(U \pm V)(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} U'(x) \pm V'(x):$$

(2)-ը և (3)-ը ապացուցվում են նման կերպ: Ապացուցենք, օրինակ (3)-ը: Նկատենք, որ

$\Delta U(x) = U(x+\Delta x) - U(x) \Rightarrow U(x+\Delta x) = \Delta U(x) + U(x)$:

Ստանում ենք՝

$$\frac{\Delta\left(\frac{U}{V}\right)(x)}{\Delta x}=\left(\frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)}-\frac{U(x)}{V(x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=$$

$$=\frac{(U(x)+\Delta U(x))V(x)-(V(x)+\Delta V(x))U(x)}{\Delta x\cdot V(x)V(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{V(x)\cdot\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}-U(x)\cdot\frac{\Delta V(x)}{\Delta x}}{\Delta x V(x)V(x+\Delta x)}\underset{\Delta x\to 0}{\to}\frac{U'(x)V(x)-V'(x)U(x)}{V^2(x)}: \blacksquare$$

Դիտողություն: 2)-ից հետևում է՝ $(C\cdot U(x))'=C\cdot U'(x)$, որտեղ C-ն հաստատուն է:

18.5. ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ: ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՈՒՄԸ

Սահմանում: Դիցուք y=f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և x_o-ն այդ միջակայքի ներքին կետ է: Եթե $\exists\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ ($\exists\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_-(x_0)$), ապա այն անվանում են աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ x_o կետում: Այդ ածանցյալները կոչվում են միակողմանի:

Թեորեմ 1: Որպեսզի y = f(x) ֆունկիան ունենա ածանցյալ X միջակայքի ներքին x_o կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա այդ կետում ունենա միակողմանի ածանցյալներ՝ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ և $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$:

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է 7.-ի, թ.1-ից:

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքի x_o կետում, իսկ x=g(t) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (α,β) միջակայքի t_0 $(x_0=g(t_0))$ կետում: Այդ դեպքում y=f(g(t)) բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է t_0 կետում և՝ $(f(g(t)))'|_{t=t_o}=f'(x_o)g'(t_o)$:

Ապացույց: t_o-ին տանք բավականաչափ փոքր $\Delta t\neq 0$ աճ: x=g(t) ֆունկցիան կստանա Δx աճ (այն կարող է և զրո լինել), որի շնորհիվ y=f(x) ֆունկցիան կստանա Δy աճ: Ըստ դիֆերենցելիության պայմանի՝ $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, $\Delta x\to 0$ $(\alpha(0)=0)$: (1)

Նկատենք, որ $\Delta f(g(t_o))= f(g(t_o+\Delta t))-f(g(t_o)) = f(g(t_o)+\Delta x)-f(x_o)=$
$= f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=\Delta y$:

$$(1) \Rightarrow \frac{\Delta f(g(t_0))}{\Delta t}=\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\to} f'(x_0)g'(t_0)=f'(g(t_0))g'(t_0):$$

Հաշվի առանք, որ՝ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x=0$ ($x=g(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից t_0 կետում հետևում է նրա անընդհատությունը այդ կետում): ■

Օրինակ: $(\cos^2 3x)'=2\cos 3x(\cos 3x)'=-2\cos 3x(\sin 3x)\,3=-3\sin 6x$:

18.6. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ՏԵՍՔԻ ԱՆՓՈՓՈԽԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ (ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՈՒԹՅՈՒՆԸ)

Նախորդ թեորեմի պայմանների առկայությամբ՝
$dy=df(g(t))=f'(g(t))g'(t)dt=f'(x)dx$:

Ստացվեց, որ դիֆերենցիալի տեսքը կախված չէ նրանից, թե արդյոք x-ը անկախ փոփոխական է, թե այն իր հերթին կախված է այլ փոփոխականից: Բայց խոսքը միայն տեսքի մասին է: Իրոք՝ անկախ փոփոխականի դեպքում $dx=\Delta x$, իսկ երբ x-ը կախյալ փոփոխական է, ապա՝ $dx = g'(t)dt \neq \Delta x$ (հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x=g(t)$ ֆունկցիան գծային է):

18.7. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ x_o-ի որոշ շրջակայքում և այդտեղ f(x)-ը մոնոտոն է (աճող կամ նվազող): Եթե $\exists\ \frac{dy}{dx}=f'(x_o)\neq 0$, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիայի $x=f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան ունի ածանցյալ $y_o= f(x_o)$ կետում և

$$\frac{dx}{dy}(y_0)=\frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0)}: \qquad (1)$$

Ապացույց: Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան վերը նշված շրջակայքում: Թեորեմի պայմանների դեպքում գոյություն ունի $x=f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան y_o-ի որոշ շրջակայքում, անընդհատ է այդտեղ (տե՛ս 12-ի խնդ. 1) և նույնպես մոնոտոն (եթե $f(x)$-ը աճող (նվազող) է, ապա $f^{-1}(y)$-ը նույնպես աճող (նվազող) է): Այստեղից ստանում ենք, որ` $\Delta y \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 \Leftrightarrow \Delta x \underset{\Delta y \to 0}{\to} 0$: Ընդ որում, եթե $\Delta x \neq 0$, ապա և $\Delta y \neq 0$ և հակառակը: Հետևաբար`

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow (1): \blacksquare$$

Օրինակներ: 1. $y=\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Ուրեմն` գոյություն ունի նրա հակադարձը` $x=\arcsin y$, որը որոշված է $[-1;1]$ հատվածի վրա, իսկ արժեքների բազմությունն է $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-ը: Այն նույնպես մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=\cos x \neq 0$, երբ $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ապա, ըստ թեորեմի` $x=\arcsin y$ $(y \in (-1;1))$ հակադարձ ֆունկցիան ունի ածանցյալ և`

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\arcsin y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}:$$

Այսպիսով`

$$\boxed{(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \in (-1;1))}$$

2. $y=\cos x$, $x \in [0;\pi]$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Նրա հակադարձը` $x=\arccos y$ (որոշման տիրույթն է` $[-1;1]$-ը, արժեքների բազմությունը` $[0;\pi]$-ն) նույնպես մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=-\sin x \neq 0$, երբ $x \in (0;\pi)$, ապա` $x=\arccos y$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ և`

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{-1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}:$$

Այսպիսով` $\boxed{(\arccos t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$, $t \in (-1;1)$:

3. $y=\operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Նրա հակադարձ` $x=\operatorname{arctg} y$ ֆունկցիան (որոշման տիրույթն է

$(-\infty;+\infty)$-ը, արժեքների բազմությունը՝ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-ն) մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$, ապա x=arctgy-ը ունի ածանցյալ

և՝ $$(\mathrm{arctg}y)'=\frac{1}{(\mathrm{tg}x)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\mathrm{arctg}t)'=\frac{1}{1+t^2}}$, $t\in(-\infty;+\infty)$:

4. y=ctgx, $x\in(0;\ \pi)$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Նրա հակադարձ x=arcctgy ֆունկցիան (որոշման տիրույթն է $(-\infty;+\infty)$-ը, արժեքների բազմությունը՝ $(0;\pi)$-ն) նույնպես մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Քանի որ՝ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}\neq 0$, ապա՝

$$(\mathrm{arcctg}y)'=\frac{1}{(\mathrm{ctg}x)'}=-\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}}=-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\mathrm{arcctg}t)'=-\frac{1}{1+t^2}}$, $t\in(-\infty;+\infty)$:

5. $y=e^x$, $x\in(-\infty;\infty)$: Ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Այս ֆունկցիայի հակադարձը՝ x=lny որոշված է $(0,+\infty)$, իսկ արժեքների բազմությունն է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքը: x=lny ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Ընդ որում՝ $(\ln y)'=\frac{1}{(e^x)'}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$: Այսպիսով՝ $\boxed{(\ln t)'=\frac{1}{t}\quad (t>0)}$:

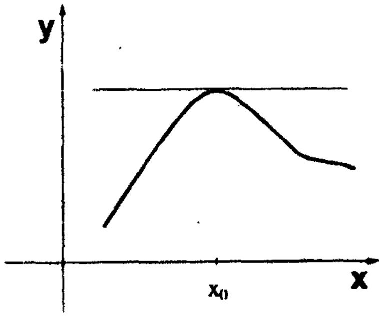
Ընդհանուր դեպքում՝ $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$), քանի որ $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\log_a e\cdot\ln x$, ապա՝ $\boxed{(\log_a x)'=\log_a e\cdot\frac{1}{x}}$:

19. ՄԻՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում: X միջայքում որոշված ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի (ածանցելի) այդ միջակայքում, եթե այն ունի ածանցյալ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում:

Ֆերմայի[*] թեորեմը: Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան որոշված է X մի-ջակայքում, և ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը X մի-ջակայքի ներքին x_0 կետում: Եթե y=f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա $f'(x_0)=0$:

Թեորեմը ունի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ (տե՛ս նկ. 5.): Եթե վերը նշված x_0 աբսցիս ունեցող կետում գրաֆիկը ունի շոշափող, ապա այն զուգահեռ է X առանցքին:



Նկ. 5

Ապացույց: Դիցուք՝ $\max\limits_X f = f(x_0)$:

Ունենք՝ $f'(x_0)=f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to+0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$,

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0, \quad \Delta x>0 \quad \Rightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0}\le 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0)\le 0:$$

Մյուս կողմից՝ $f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\ge 0 \;\; (\Delta f(x_0)\le 0,\ \Delta x<0)$:

Ստացվեց, որ նաև՝ $f'(x_0)\ge 0$: Ուրեմն՝ $f'(x_0)=0$: ■

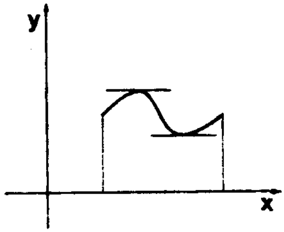
Ռոլլի[**] թեորեմը: Դիցուք՝ [a;b] հատվածի վրա անընդհատ f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքում և f(a)=f(b): Այդ դեպ-քում գոյություն ունի ներքին c կետ ($c\in(a;b)$), այնպիսին, որ $f'(c)=0$:

Թեորեմը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն (տե՛ս նկ. 6)՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կան ներքին կետեր, որտեղ տար-ված շոշափողը զուգահեռ է X-ին:

---

[*] Ֆերմա Պիեր (1601–1665), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

[**] Ռոլլ Միշել (1652 – 1719), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:



Նկ 6.

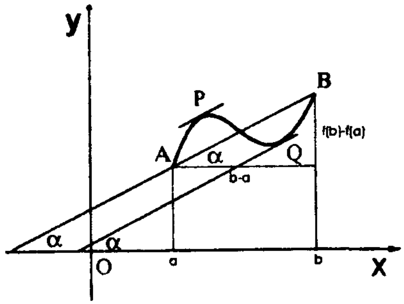
Ապացույց: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի f(x)-ը ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ՝ $M=\max\limits_{x} f$, $m=\min\limits_{x} f$: Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. M=m: Այս դեպքում՝ $\forall x\in[a;b]$ $m\le f(x)\le m$: Այսինքն՝ $f(x)\equiv m$ հաստատուն է: Ուրեմն յուրաքանչյուր կետում ածանցյալը հավասար է զրոյի:

2. M>m: Քանի որ f(a)=f(b), ապա մեծագույն, փոքրագույն արժեքներից գոնե մեկը կընդունվի միջակայքի ներքին c կետում: Այդ դեպքում ըստ Ֆերմայի թեորեմի f'(c)=0: ■

Լագրանժի[*] *թեորեմը.* Եթե $f\in C[a;b]$ և f(x) դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքում, ապա գոյություն ունի ներքին c կետ ($c\in(a;b)$), այնպիսին որ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

Թեորեմի երկրաչափական իմաստը երևում է նկար 7-ից: Ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կան ներքին կետեր (P, Q), որտեղ տարված շոշափողները զուգահեռ են AB-ին (A(a; f(a)), B(b; f(b))):



Նկ. 7

Ապացույց: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝ $g(x)=f(x)-\lambda x$:

[*] Լագրանժ Ժոզեֆ Լուի (1736 – 1813), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ:

Յաստատուն λ-ն ընտրենք՝ ելնելով g(a)=g(b) պայմանից: Կստանանք՝

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\alpha \text{ (տե՛ս նկ. 7):}$$

Ակնհայտ է, որ g(x)-ը բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին, ընդ որում $\forall x \in (a;b)$, $g'(x) = f'(x) - \lambda$:

Ուստի, ըստ այդ թեորեմի՝ $\exists\, c \in (a;b)$ այնպիսին, որ

$$g'(c)=f'(c)-\lambda=0:$$

Այսինքն՝ $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}: \blacksquare$$

Կոշիի թեորեմը: Եթե $f,g \in C[a;b]$, $\forall x \in (a;b)$ $\exists\, f'(x)$, $\exists\, g'(x) \neq 0$, ապա $\exists\, c \in (a;b)$ այնպիսին, որ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}:$$

Նկատենք, որ թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $g(a) \neq g(b)$, հակառակ դեպքում ըստ Ռոլլի թեորեմի, ինչ որ ներքին t կետում $g'(t)=0$: Կոշիի թեորեմը Լագրանժի թեորեմի ընդհանրացումն է (երբ $g(x) \equiv x$ Կոշիի թեորեմը վերածվում է Լագրանժի թեորեմի):

Ապացույց: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$: Յաստատուն λ-ն ընտրենք այնպես, որ $F(a)=F(b)$ $\left(\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)$:

Պարզ է, որ F(x)-ը բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին: Ուրեմն $\exists\, c \in (a;b)$, այնպիսին, որ՝ $F'(c)=0$: Այսինքն $f'(c)-\lambda g'(c)=0$: Ուրեմն՝ $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$: $\blacksquare$

Յետևանք 1 (ֆունկցիայի հաստատունության մասին): Եթե $f \in C[a;b]$ և $\forall x \in (a;b)$ $\exists\, f'(x) = 0$, ապա f(x)-ը հաստատուն է:

Ապացույց: Պետք է ապացուցել, որ $\forall x_1, x_2 \in [a;b]$ $(x_1<x_2)$: $f(x_1)=f(x_2)$:

Կիրառենք Լագրանժի թեորեմը, դիտարկելով f(x)-ը $[x_1; x_2]$ հատվածի վրա: Ըստ այդ թեորեմի $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ այնպիսին, որ $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$: Բայց՝ $f'(c)=0$, ուրեմն՝ $f(x_1)=f(x_2)$: $\blacksquare$

Դիտողություն 1: Ակնհայտ է, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձը, քանի որ հաստատունի ածանցյալը զրո է:

Յետևանք 2 (ֆունկցիայի մոնոտոնության մասին): Եթե $f \in C[a;b]$ և $\forall x \in (a;b)$ $f'(x)>0$ (<0), ապա f(x)-ը մոնոտոն աճող (նվազող) է:

Ապացույց: Ենթադրենք $f'(x)>0$: Վերցնենք $\forall x_1,x_2 \in [a;b]$, $x_1< x_2$ և կիրառենք Լագրանժի թեորեմը, դիտարկելով $f(x)$-ը $[x_1; x_2]$-ի վրա: Ըստ այդ թեորեմի $\exists\, c\in(x_1,x_2)$ այնպիսին, որ
$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$: ■

Խնդիր: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և դիֆերենցելի է $(a; b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $f(x)$-ի մոնոտոն աճող (նվազող) լինելու համար անհրաժեշտ է, որ $\forall x\in(a;b)$: $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ պայմանը:

20. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ

Սահմանում: Դիցուք՝ $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում և x_0-ն այդ միջակայքի ներքին կետ է: Եթե գոյություն ունի x_0 կետի շրջակայք՝ $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset X$, այնպիսին որ՝ $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$: $f(x)\leq f(x_0)$ $(f(x)\geq f(x_0))$, ապա x_0-ն կոչվում է ***մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:*** Եթե $\exists\, U_\delta(x_0)\subset X$, այնպիսին, որ $\forall x\in U_\delta(x_0)$ $(x\neq x_0)$: $f(x)<f(x_0)$ $((f(x)>f(x_0))$, ապա x_0 անվանում են խիստ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ: Մաքսիմումի (խիստ մաքսիմումի) կամ մինիմումի (խիստ մինիմումի) կետը կոչվում է ***էքստրեմումի*** (խիստ էքստրեմումի) ***կետ:***

Թեորեմ 1 (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում, և նրա ներքին x_0 կետը էքստրեմումի կետ է: Այդ դեպքում, կամ $\nexists\, f'(x_0)$ կամ $f'(x_0)=0$: Միջակայքի այն ներքին կետը, որտեղ կա՛մ ածանցյալ չկա, կամ էլ այն հավասար է զրոյի, կոչվում է ***կրիտիկական կետ:*** Այսպիսով, ըստ թեորեմ 1-ի էքստրեմումի կետ կարող է լինել միայն կրիտիկական կետը:

Ապացույց: Ըստ թեորեմի պայմանի $\exists\, U_\delta(x_0)\subset X$ այնպիսին, որ $f(x)$-ը այդ շրջակայքում ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը նրա x_0 ներքին կետում: Ուստի, եթե այդ կետում կա ածանցյալ, ապա ըստ Ֆերմայի թեորեմի՝ $f'(x_0)=0$: ■

Թեորեմ 2 (էքստրեմումի բավարար պայմանները):

Դիցուք՝ $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում, անընդհատ է միջակայքի ներքին x_0 կետում և $f'(x)$-ը «x_0 կետով անցնելիս» փոխում է իր նշանը՝ պլյուսից մինուս (մինուսից պլյուս): Այսինքն՝ $\exists\, U_\delta(x_0)\subset X$ այնպիսին, որ $\forall\, x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ $\exists\, f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ և $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ $\exists\, f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$: Այդ դեպքում x_0-ն խիստ մաքսիմումի (խիստ մինիմումի) կետ է:

Ապացույց: Դիցուք՝ որոշակիության համար, $f'(x)$-ը «x_0 կետով անցնելիս» փոխում է նշանը պլյուսից մինուս: Թեորեմի պայմանների հետևում է (տե՛ս. 19, հետ. 2), որ f(x)-ը $(x_0-\delta;x_0]$ միջակայքում մոնոտոն աճող է, իսկ $[x_0;x_0+\delta)$ միջակայքում՝ մոնոտոն նվազող: Այսպիսով՝ $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$: $f(x)<f(x_0)$ և $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)$: $f(x)<f(x_0)$: Ուրեմն x_0-ն մաքսիմումի կետ է: ■

21. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ f(x) ֆունկցիան որոշված է x_0-ի շրջակայքում և ունի այդ շրջակայքի յուրաքանչյուր կետում ածանցյալ $f'(x)=g(x)$: Եթե g(x) ֆունկցիան իր հերթին ունի ածանցյալ x_0 կետում, ապա $g'(x_0)$-ն կոչվում է f(x)-ի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0 կետում: $f''(x_0)=g'(x_0)=(f'(x))'|_{x=x_0}$: n կարգի ածանցյալը սահմանվում է ինդուկտիվ եղանակով: Եթե $\exists f^{(k)}(x)$ k=1,...,n-1 և $\exists\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, ապա $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$:

Օրինակ 1: Հաշվել f(x)=cosx-ի ածանցյալները: $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-(\sin x)'=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{IV}(x)=\cos x$...:

Այսպիսով՝ $(\cos x)^{(2n)}=(-1)^n\cos x$ (n=1,2...), իսկ $(\cos x)^{(2n+1)}=$ $=(-1)^{n+1}\sin x$ (n=0,1,2...):

2. f(x) = sinx: Նույն կերպ ստացվում է՝ $\sin^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x$ (n=1,2,...) $\sin^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x$ (n=0,1,...):

Սահմանում 2: Դիցուք՝ f(x)-ը որոշված է և երկու անգամ դիֆերենցելի (a; b) միջակայքում: Այսինքն, այդ միջակայքում դիֆերենցելի են f(x)-ը և f'(x)-ը: Այդ դեպքում f(x) ֆունկցիայի x կետում երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ է կոչվում՝ $d^2f(x)=f''(x)dx^2$: Եթե f(x) ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է (a; b) միջակայքում, այսինքն դիֆերենցելի են $f(x)$-ը, $f'(x)$-ը, ... ,$f^{(n-1)}(x)$-ը, ապա ասելով n կարգի դիֆերենցիալ x կետում հասկանում ենք՝ $\boxed{d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n}$:

Վարժություն: Դիցուք՝ f(x)-ը և g(x)-ը n-անգամ դիֆերենցելի են X միջակայքի x կետում:

Հաշվի առնելով արտադրյալի ածանցման կանոնը ինդուկցիայի եղանակով, ապացուցել արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը՝

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,f(x)^{(k)}\cdot g(x)^{(n-k)},\ \text{որտեղ}\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$f^{(0)}(x)=f(x)$:

Որպես օրինակ հաշվել $(x^2\sin x)^{(100)}$:

Սահմանում 3: Կասենք, որ $f\in C^n<a,b>$, եթե $f^k(x)\in C<a;b>$, $k=0,1,\dots,n$:

22. ԼՈՊԻՏԱԼԻ* ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

Լոպիտալի կանոնները վերաբերվում են $\frac{0}{0}$ և $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություններին:

Թեորեմ 1: Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված a կետի շրջակայքում ($g(x)\neq 0$), ունեն ածանցյալ a կետում, $g'(a)\neq 0$ և $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ապա $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$:

Ապացուցում: f(x)-ը, g(x)-ը ունեն ածանցյալ a կետում, ուրեմն՝ այդ կետում նրանք անընդհատ են: Այսինքն՝ $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $g(a)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$:

Ուրեմն՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]^{-1}=\frac{f'(a)}{g'(a)}: \blacksquare$$

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված են a կետի «ծակված» $\overset{0}{U}_\delta(a)$ շրջակայքում, $\forall x\in \overset{0}{U}_\delta(a)$ $\exists$ $f'(x)$ և $g'(x)$ ($g'(x)\neq 0$), $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g(x)\neq 0$ և $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ (K-ն կարող է լինել և անվերջ):

Այս պայմանների դեպքում՝ $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$:

Ապացուցում. Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K$: Վերցնենք $\forall x\in(a,a+\delta)$ և դիտարկենք f(t) և g(t) ֆունկցիաները (a; x) միջակայ-

* Լոպիտալ Գիյոմ Ֆրանսուա Անտուան (1661 – 1704), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

քում: Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիաներ որոշված $[a;x]$ հատվածի վրա:

$$\tilde{f}(t)=f(t), t\in(a;x], \tilde{f}(a)=0, \text{ և } \tilde{g}(t)=g(t), t\in(a;x], \tilde{g}(a)=0:$$

Ակնհայտ է, որ $\tilde{f}, \tilde{g}\in C[a;x]$, քանի որ

$$\lim_{t\to a+0}\tilde{f}(t)=\lim_{t\to a+0}f(t)=0=\tilde{f}(a)$$
$$\text{և } \lim_{t\to a+0}\tilde{g}(t)=\lim_{t\to a+0}g(t)=0=\tilde{g}(a):$$

Պարզ է նաև, որ

$\forall t\in(a;x)$ $\exists$ $\tilde{f}'(t)=f'(t)$ $\exists$ $\tilde{g}'(t)=g'(t)\neq 0$: Ըստ Կոշիի թեորեմի $\exists c_x\in(a;x)$ այնպիսին որ՝ $\dfrac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)}=\dfrac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}$:

Այսինքն՝ $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\quad (c_x\in(a;x)): \qquad (1)$$

Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K, K\in R$ ($K=\infty$ դեպքը կքննարկենք առանձին):

Դա նշանակում է՝ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $\gamma>0$ $(\gamma<\delta)$ $\forall x\in(a;\gamma)$: $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\varepsilon$:

Օգտվենք (1)-ից և հաշվի առնենք, որ $x\in(a;\gamma)\Rightarrow c_x\in(a;\gamma)$:

Կստանանք՝ $\forall x\in(a;\gamma)$: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-K\right|=\left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-K\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$: Դիցուք՝ այժմ $K=\infty$, այսինքն՝ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $\gamma\in(a;\delta)$ $\forall x\in(a;\gamma)$: $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right|>\varepsilon$:

Ունենք՝ $\forall x\in(a;\gamma)$: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right|>\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$:

Այն որ՝ $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ ապացուցվում է նմանապես: ■

Լոպիտալի կանոններին վերաբերվող հաջորդ թեորեմները, ապացուցվում են ըստ էության նման ձևով: Բերենք միայն ձևակերպումները:

Թեորեմ 3: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են և դիֆերենցելի $(a;+\infty)$ $((-\infty;a))$ միջակայքում, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ և $\exists \lim_{x\to\pm\infty} (f'(x)/g'(x))=K$: Այդ դեպքում $\exists \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)/g(x))=K$:

Թեորեմ $2'$: Նույնն է ինչ թեորեմ 2.- ը, միայն $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ պայմանը պետք է փոխարինել $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ պայմանով:

Թեորեմ $3'$: Նույն է ինչ թեորեմ 3-ը, միայն $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ պայմանը պետք է փոխարինվի $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\infty$ պայմանով:

Դիտողություն: Այն դեպքում, երբ a-ն ֆունկցիայի որոշման տիրույթի (միջակայքի) ծայրակետ է, ապա Լոպիտալի կանոնները մնում են ուժի մեջ, միայն թե խոսքը համապատասխան միակողմանի սահմաների մասին է:

Օրինակ: Հաշվել հետևյալ սահմանը $K=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$: Քանի որ $\ln\sin x-\ln x=\ln\frac{\sin x}{x}\underset{x\to+0}{\to}0$, ապա ունենք $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն:

Օգտվելով թ.2-ից, կստանանք $K=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=$

$=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$ (սահմանը հաշվելիս, $\sin^2 x$-ը փոխարինեցինք նրան համարժեք x^2-ով և երկու անգամ կիրառեցինք Լոպիտալի համապատասխան կանոնը:

23. ԹԵՅԼՈՐԻ* ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Երբ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում և այդ կետում ունի ածանցյալ, ապա ֆունկցիան դիֆերենցելի է, այսինքն նրա աճը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

որտեղ $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$: Ուրեմն գոյություն

* Թեյլոր Բրուկ (1685 – 1731), անգլիացի մաթեմատիկոս:

ունի գծային ֆունկցիա $P_1(x)=y_0+A(x-x_0)$, այնպիսին, որ՝ $f(x) = P_1(x)+o(x-x_0)$, $x\to x_0$: Ընդ որում $P_1(x_0)=y_0=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=A=f'(x_0)$:

Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և $\exists f^{(n)}(x_0)$ ($x_0\in X$, $n\in N$): Մեր առջև դնենք ավելի ընդհանուր խնդիր՝ գտնել այնպիսի $P_n(x;x_0)$ բազմանդամ, որ $f(x)=P_n(x;x_0)+o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$, և $P_n^{(k)}(x_0;x_0)=f^{(k)}(x_0)$ ($k=0,1,\dots,n$, $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$):

Սահմանում 1: $P_n(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ բազմանդամը կոչվում է f(x)-ի Թեյլորի բազմանդամ, եթե՝ $P_n^{(k)}(x_0;x_0)=f^{(k)}(x_0)$ ($k=0,1,\dots,n$, $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$): (1)

Գտնենք a_k գործակիցները: Ըստ (1)-ի՝ $P_n^{(0)}(x_0;x_0)=f^{(0)}(x_0)$ $\Rightarrow a_0=f(x_0)$: Ունենք՝ $P_n'(x;x_0)=a_1+2a_2(x-x_0)+\dots+na_n(x-x_0)$: Ըստ (1)-ի՝ $P^{(1)}(x_0;x_0)=f^{(1)}(x_0)$: Ուրեմն՝ $a_1=\dfrac{f'(x_0)}{1!}$: Ունենք նաև՝

$P_n''(x;x_0)=2!a_2+3!a_3(x-x_0)+\dots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$:

$P_n''(x_0;x_0)=f''(x_0)$ $\Rightarrow a_2=\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$: Ինդուկցիայի եղանակով դժվար չէ ապացուցել, որ՝ $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k=0,1,\dots,n$):

Այսպիսով՝ f(x)-ի Թեյլորի բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

կամ՝ $P_n(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$:

Սահմանում 2: $\boxed{f(x)=P_n(x;x_0)+r_n(x;x_0)}$ (2)

առնչությունը կոչվում է Թեյլորի բանաձև, որտեղ $P_n(x;x_0)$ Թեյլորի բազմանդամն է, իսկ $r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)$ կոչվում է մնացորդային անդամ:

Սահմանում 3: Ասում են, որ $r_n(x;x_0)$ ***մնացորդային անդամը ունի***

Պեանոյի տեսքը*, եթե

$$\boxed{r_n(x;x_0)=0\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0}: \qquad (3)$$

Թեորեմ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և $\exists f^{(n)}(x_0)$, $x_0\in X$: Դա նշանակում է, որ $f(x)$-ը n-1 անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի շրջակայքում և $\exists\ f^{(n)}(x_0)$: Եթե x_0-ն ծայրակետ է, ապա շրջակայքը միակողմանի է:

Այս պայմանների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծության $r_n(x;x_0)$ մնացորդային անդամը ունի հետևյալ հատկությունը՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0$$

Այսինքն, այն ունի Պեանոյի տեսքը՝ $r_n(x;x_0)=0\left((x-x_0)^n\right)$, $x\to x_0$:

Ապացուցում: Քանի որ $r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)$, ապա $r_n(x;x_0)$-ն $n-1$ անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի շրջակայքում, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to x_0} r_n^{(k)}(x;x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x;x_0)\right]=f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_0;x_0)=0$$

$(k=0,1,\ldots,n-1)$:

Կիրառենք $n-1$ անգամ Լոպիտալի կանոնը (տե՛ս. 22, թ.2)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x;x_0)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x;x_0)}{n!(x-x_0)}:$$

Այժմ կիրառենք 22-ի թ.1-ը: Կստանանք՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)-P_n(x_0;x_0)}{n!}=0: \ \blacksquare$$

Մնացորդային անդամի Պեանոյի տեսքը միշտ չէ որ հարմար է, ստանանք մնացորդային անդամի այլ տեսքեր:

Դիցուք՝ $f(x)$-ը որոշված է $[x_0;x_0+\delta]$ միջակայքում, $f\in C^n[x_0;x_0+\delta]$ և $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)\ \exists\ f^{(n+1)}(x)$: Վերցնենք $\forall x\in[x_0;x_0+\delta]$ և այն հաստատագրենք: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

$z\in[x_0;x]$:

Պարզ է, որ $\varphi\in C[x_0;x]$, $\forall z\in(x;x_0)\ \exists\varphi'(z)$ ընդ որում՝

---

* Պեանո Ջուզեպպե (1858 – 1932), իտալացի մաթեմատիկոս:

$$\varphi'(z)=-f'(z)+f'(z)-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)+\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-z)^n=-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-z)^n:$$

Ներմուծենք նաև որևէ այլ օժանդակ ֆունկցիա՝ $\psi\in C[x_0;x]$ այնպիսին որ, $\forall z\in(x_0;x)$ $\exists\psi'(z)\neq0$: Կիրառենք Կոշիի թեորեմը $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաների նկատմամբ.

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\quad(x_0<c<x):$$

Քանի որ $\varphi(x)=0,\varphi(x_0)=r_n(x;x_0)$ և $\varphi'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$,

ապա $r_n(x;x_0)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-c)^n:$

Դիցուք $\psi(z)=(x-z)^p$, $p>0$: Այդ դեպքում $\psi'(z)=-p(x-z)^{p-1}\neq0$, $x_0<z<x$: Պարզ է, որ $\psi(z)$-ը բավարարում է Կոշիի թեորեմի բոլոր պայմաններին: Ուրեմն՝

$$r_n(x;x_0)=\frac{(x-x_0)^p}{p(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n:$$ Քանի որ $c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$, ապա՝ $x-c=(x-x_0)(1-\theta)$: Ուրեմն՝

$$r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{pn!}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1: \quad (4)$$

Վերցնելով (4)-ի մեջ $p=n+1$ կստանանք ***մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքը***՝

$$\boxed{r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}: \quad (5)$$

Եթե (4)-ի մեջ վերցնենք $p=1$, ապա կստանանք ***մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը***՝

$$\boxed{r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}}: \quad (6)$$

Նկատենք, որ մնացորդային անդամի Լագրանժի (2) տեսքը հաճախ հարմար է մոտավոր հաշիվ կատարելիս:

24. ՈՐՈՇ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԹԵՅԼՈՐԻ (ՄԱԿԼՈՐԵՆԻ*) ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Թեյլորի բանաձևը, երբ $x_0=0$ կոչվում է Մակլորենի բանաձև՝

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x;0)}: \qquad (1)$$

Վերլուծենք որոշ տարրական ֆունկցիաներ՝ ըստ Մակլորենի բանաձևի:

1^0 $f(x)=e^x$: $f^{(k)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(k)}(0)=1$: Այստեղից հետևում է, որ $f(x)=e^x$ -ի համար (1)-ը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\ O(x^n),\ x\to 0}: \qquad (2)$$

(2)-ի մեջ մնացորդային անդամը՝ $r_n(x;0)$-ն գրված է Պեանոյի տեսքով: Այդպես կվարվենք և հետագայում:

2^0 $f(x)=\sin x$: $f(0)=0$, $f'(x)=\cos x$, $f'(0)=1$, $f''(x)=-\sin$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=-\cos x$, $f'''(0)=-1$ և այլն:

Այսպիսով՝ $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$, $k=0,1,\ldots$:

Ուրեմն՝ $$\boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ O(x^{2n+1}),\ x\to 0}: \qquad (3)$$

(3)-ի մեջ $O\left(x^{2n+1}\right)$-ի փոխարեն կարելի է գրել՝ $O\left(x^{2n+2}\right)$, քանի որ x-ի զույգ աստիճանները բացակայում են:

3^0 $f(x)=\sin x$: Հեշտ է պարզել որ՝

$f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots$:

Ուրեմն՝ $$\boxed{\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right),\ x\to 0}: \qquad (4)$$

(4)-ի մեջ $o\left(x^{2n}\right)$–ի փոխարեն կարելի է գրել՝ $o\left(x^{2n+1}\right)$:

4^0 $f(x)=(1+x)^\alpha$: $f(0)=1$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f'(0)=\alpha$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$:

---

* Մակլորեն Կոլին՝ (1698 – 1746), շոտլանդացի մաթեմատիկոս:

Այսպիսով՝ $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), k=1,2,...$:

Ուրեմն՝ $$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to 0} \quad (5)$$

(երկանդամային վերլուծություն):

Նկատենք,որ երբ $\alpha=n$, ապա (4)-ը վերածվում է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի, $o(x^n)=0$:

Եթե (5)-ի մեջ վերցնենք $\alpha=-1$ և x-ը փոխարինենք –x-ով, կստանանք՝

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{n}x^k+o(x^n),\ x\to 0}: \quad (6)$$

5°f(x)=ln(1+x):

$f(0)=0,\ f'(x)=(1+x)^{-1}, f'(0)=1\ f''(x)=-(1+x)^{-2},\ f''(0)=-1,$

$f'''(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3}, f'''(0)=2!,\ f^{(4)}(x)=-3!(1+x)^{-4}, f^{(4)}(0)=-3!,...:$

Այսպիսով՝ $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}(k-1)!,\ k=1,2,...$:

Ուրեմն՝ $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to 0$

կամ՝

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n), x\to 0}: \quad (7)$$

Վարժություն 1: Հաշվել cos59°-ը 10^{-6}-ի ճշտությամբ:

Դիտարկենք f(x)=cosx: Վերցնենք՝ $x_0=\frac{\pi}{3}, \Delta x=-\frac{\pi}{180}$ (ռադիան):

Հաշվի առնենք, որ $\forall k, \forall x, \left|f^{(k)}(x)\right|\le 1$ և օգտվենք մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից:

Կստանանք՝ $\left|r_n(x;x_0)\right|\le\frac{|\Delta x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\pi^{n+1}}{180(n+1)!}$:

Երբ n=2, ապա $|r_2(x;x_0)|<10^{-6}$, $|r_3(x;x_0)|<10^{-7}$:

Հետևաբար, օգտվելով (1)–ից՝

$\cos x=\cos x_0-\frac{\sin x_0}{1!}\Delta x-\frac{\cos x_0}{2!}\Delta x^2+r_2(x;x_0)$, ստանում ենք

Նշված ճշտությամբ՝ $\cos 59^\circ \approx \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \dfrac{\pi}{180} - \dfrac{\cos 60^\circ}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2$:

Որտեղից՝ $\cos 59^\circ \approx 0{,}515038$:

Վարժություն 2. Թեյլորի բանաձևի օգնությամբ հաշվել $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$: Սահմանը հաշվելիս, հարմար է օգտվել մնացորդային անդամի Պեանոյի տեսքից, ընդ որում հայտարարի x-ի մեկ աստիճանը ցույց է տալիս, որ համարիչը նույնպես պետք է վերլուծել ըստ Մակլորենի բանաձևի մինչև x -ի առաջին աստիճան: Ունենք՝

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} =$$

$$= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right): \qquad (8)$$

(8)-ը ստանալիս հաշվի առանք, որ՝ $o\left(-\dfrac{x}{2} + o(x)\right) = o(x)$:

Ունենք՝ $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} e\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{o(x)}{x}\right) = -\dfrac{e}{2}$:

25. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ածանցյալի օգնությամբ մենք արդեն գիտենք, թե ինչպես գտնել մոնոտոնության, հաստատունության միջակայքերը: Ածանցյալների օգնությամբ մենք նաև լուծում ենք էքստրեմումներ գտնելու խնդիրը: Ածանցյալների օգնությամբ կարելի է նաև պարզել ֆունկցիայի այլ հատկություններ:

25.1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՒՌՈՒՑԻԿՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆ. ՇՐՋՄԱՆ ԿԵՏԵՐ

Դիցուք՝ $f : (a; b) \to R$ և x_1, x_2 -ը կամայական կետեր են $(a; b)$-ից

$(a < x_1 < x_2 < b)$: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ կետերով տանենք ուղիղ:

Նրա հավասարումն է՝ $y = l(x)$,

որտեղ $l(x) = \dfrac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$ $(l(x_1) = f(x_1), l(x_2) = f(x_2))$:

Սահմանում 1: f ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ* (ուռուցիկ դեպի վար) (a;b) միջակայքի վրա, եթե $\forall x_1, x_2$ $a < x_1 < x_2 < b$ և $\forall x \in (x_1; x_2)$: $l(x) \geq f(x)$:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ [AB] հատվածի յուրաքանչյուր $(x; l(x))$ կետ գտնվում է գրաֆիկի $(x; f(x))$ կետից ոչ ներքև:

Եթե ուռուցիկության պայմանի մեջ առկա է անհավասարության խիստ նշանը $(l(x) > f(x))$, ապա ֆունկցիան կոչվում է խիստ ուռուցիկ:

Սահմանում 2: f ֆունկցիան կոչվում է *գոգավոր* (ուռուցիկ դեպի վեր) (a; b)-ի վրա, եթե $\forall x_1, x_2$ $a < x_1 < x_2 < b$ և $\forall x \in (x_1; x_2)$: $l(x) \leq f(x)$: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ [AB] հատվածի յուրաքանչյուր $(x; l(x))$ կետ գտնվում է գրաֆիկի $(x; f(x))$ կետից ոչ վերև: Եթե ուռուցիկության պայմանի մեջ առկա է անհավասարության խիստ նշանը $(l(x) < f(x))$, ապա ֆունկցիան կոչվում է խիստ գոգավոր:

Թեորեմ 1 (խիստ ուռուցիկության (գոգավորության) բավարար պայմանները). Եթե f ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է (a; b) միջակայքում և $\forall x \in (a;\ b)$ $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, ապա f-ը խիստ ուռուցիկ է (գոգավոր է) (a; b)-ի վրա:

Ապացուցում: Եթե $a<x_1<x<x_2<b$, ապա՝

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) + [f(x_1) - f(x)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը՝ կստանանք

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1},$$

որտեղ $x_1<\xi<x<\eta<x_2$:

Նորից կիրառենք Լագրանժի թեորեմը՝

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1},\ \xi < \zeta < \eta:$$

Եթե $\forall x \in (a;b)$: $f''(x)>0$, ապա մասնավորապես $f''(\zeta)>0$ և, ուրեմն՝ $l(x)>f(x)$, այսինքն՝ f ֆունկցիան ուռուցիկ է: Իսկ եթե $\forall x \in (a;b)$: $f''(x)<0 \Rightarrow f''(\zeta)<0$, ապա ստանում ենք, որ $l(x)<f(x)$ և, ուրեմն՝ f ֆունկցիան գոգավոր է: ■

Սահմանում 3: Դիցուք՝ $f:(a;b)\to R$ և f-ը անընդհատ է x_0 կետում ($x_0 \in (a;b)$) : Այդ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի *շրջման կետ*, եթե այն հանդիսանում է խիստ ուռուցիկության և խիստ գոգավորության միջակայքերի ընդհանուր ծայրակետ: Այս դեպքում (x_0; $f(x_0)$) կետը կոչվում է գրաֆիկի շրջման կետ:

Օրինակ: $f(x)=x^3$, $f''(x)=6x$: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում ($-\infty$; 0) միջակայքում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ (0;$+\infty$)-ում՝ խիստ գոգավոր: Ուրեմն՝ x=0 կետը հանդիսանում է ֆունկցիայի շրջման կետ:

Թեորեմ 2 (շրջման կետ լինելու անհրաժեշտ պայմանը):

Եթե $f \in C^2(a;b)$ $(f, f', f'' \in C(a;b))$ և $x_0 \in (a;b)$ շրջման կետ է, ապա $f''(x_0)=0$:

Ապացույց: Եթե $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$, ապա շնորհիվ $f''(x)$-ի անընդհատության x_0 կետում $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ x_0-ի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում: Ուրեմն՝ f-ը կլինի ուռուցիկ (գոգավոր) այդ շրջակայքում, որը հակասում է x_0-ի շրջման կետ լինելուն: ■

Թեորեմ 3 (շրջման կետի բավարար պայմանները): Եթե f ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի ինչ-որ շրջակայքում բացառությամբ գուցե այդ $x_0 \in (a;b)$ կետը, որտեղ ֆունկցիան անընդհատ է և այդ կետով անցնելիս f''-ը փոխում է իր նշանը ($\exists\, U_\delta(x_0) \subset (a;b)$, այնպես որ $\forall x \in (x_0-\delta;x_0)$, $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$), իսկ $\forall x \in (x_0;x_0+\delta)$ $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), ապա x_0-ն կլինի շրջման կետ:

Ապացույց: Թեորեմ 1-ից հետևում է որ ($x_0-\delta$; x_0) միջակայքում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է (գոգավոր է) և (x_0; $x_0+\delta$)-ում՝ խիստ գոգավոր (ուռուցիկ): Ուրեմն՝ x_0-ն շրջման կետ է: ■

26. ԱՍԻՄՊՏՈՏՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք $f:(a;+\infty)\to R$ ($f:(-\infty;a)\to R$) : Եթե $\exists$ k, b$\in$ R այնպիսիք, որ

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+b)]\right)=0:$$

y=kx+b ուղիղը կոչվում է f ֆունկցիայի ասիմպտոտ, երբ $x\to+\infty$ (երբ $x\to-\infty$):

Ասիմպտոտի գոյությունը, երբ $x\to+\infty$ (երբ $x\to-\infty$) նշանակում է որ բավականաչափ մեծ (փոքր) x-ի համար f ֆունկցիայի գրաֆիկը մոտ է որոշակի ուղիղ գծի: y=kx+b տեսքի ասիմպտոտը կոչվում է թեք ասիմպտոտ: Երբ k=0, ապա y=b ուղիղը կոչվում է հորիզոնական ասիմպտոտ:

Դիցուք f ֆունկցիան ունի ասիմպտոտ, երբ $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$ դեպքը ուսումնասիրվում է նմանապես): Ուրեմն՝

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \quad \left(\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0\right): \qquad (1)$$

Բաժանենք (1)-ի երկու կողմը x-ի վրա և անցնենք սահմանի, երբ $x\to+\infty$:

Կստանանք՝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k:$ (2)

Այսպիսով՝ (2)-ը անհրաժեշտ պայման է թեք ասիմպտոտի գոյության համար: Իսկ, եթե նաև՝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$, (3) ապա դա բավարար է թեք ասիմպտոտի գոյության համար:

Սահմանում 2: Դիցուք՝ $f: D\to R$ ($D\subset R$) և x_0-ն D-ի սահմանային կետ է: Եթե այդ կետում միակողմանի սահմաններից գոնե մեկը անվերջ է, ապա $x=x_0$ ուղիղը կոչվում է f ֆունկցիայի ուղղաձիգ ասիմպտոտ:

Օրինակ: Գտնել $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+4}}$ ֆունկցիայի ասիմպտոտները: Այս ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $D_f=(-\infty;-4)\cup[0;+\infty)$: Քանի որ՝ $\lim\limits_{x\to-4-0}f(x)=+\infty$, ապա $x=4$ ուղիղը ուղղաձիգ ասիպտոտ է:

Այժմ գտնենք ֆունկցիայի թեք ասիմպտոտը $x\to+\infty$-ի ձգտելիս, երբ $x\in[0;+\infty)$, ապա $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$: Ըստ (2)-ի

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+4/x}}=1:$$

Ըստ (3)-ի $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}\right)=$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right)} = -4\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+4/x}\left(1+\sqrt{1+4/x}\right)} = -2:$$

Այսպիսով՝ $y = x - 2$ ուղիղը թեք ասիմպտոտ է, երբ $x \to +\infty$ -ի:

Որոնենք ֆունկցիայի ասիմպտոտը $x \to -\infty$-ի ձգտելիս: Երբ $x \in (-\infty; -4)$, ապա՝ $f(x) = -\frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}$:

Ուրեմն՝ $k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4/x}} = -1$:

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{-x\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\sqrt{-4-x}-\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{\sqrt{-4-x}\left(\sqrt{-4-x}+\sqrt{-x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}\left(\sqrt{1+4/x}+1\right)} = 2:$$

Այսպիսով՝ $y = 2 - x$ ուղիղը հանդիսանում է այս ֆունկցիայի թեք ասիմտոտ $x \to -\infty$-ի ձգտելիս :

27. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ

Ֆունկցիայի գրաֆիկ կառուցելու համար նպատակահարմար է հետևյալ սխեման:

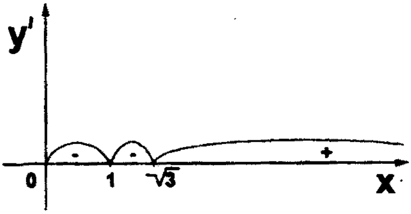
1. Գտնել որոշման տիրույթը, պարզել զույգությունը, կենտությունը, պարբերականությունը, (դրանց առկայությունը թույլ կտա կառուցել գրաֆիկը՝ նախ որոշման տիրույթի մի մասում և հետո համապատասխան ձևով այն շարունակել):
2. Գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները:
3. Ածանցյալների օգնությամբ գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության, ուռուցիկության, գոգավորության միջակայքերը, էքստրեմումները, շրջման կետերը:
4. Գտնել ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերը առանցքների հետ:

Օրինակ: Կառուցել $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$: Ֆունկցիան կենտ է՝ $y(-x)=-y(x)$: Ուրեմն գրաֆիկը համաչափ է (0; 0) կետի նկատմամբ: Նախ կառուցենք այս ֆունկցիայի գրաֆիկը $[0;+\infty)$ միջակայքում: Քանի որ՝ $y(1-0)=-\infty$, $y(1+0)=+\infty$: Դա նշանակում է, որ x=1 ուղիղը ուղղաձիգ ասիմպտոտ է: Այժմ որոնենք թեք ասիմպտոտ $x \to +\infty$-ի ձգտելիս: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0$:

Բայց՝ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-x^{-2}}}=+\infty$: Ուստի ֆունկցիան թեք ասիմպտոտներ չունի:

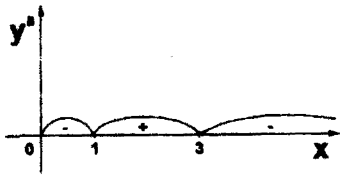
Հաշվենք առաջին կարգի ածանցյալը՝ $y'(x)=\frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{4/3}}$: Այն ցույց է տալիս, որ (տե՛ս նկ. 8) ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է $[0;1)$ և $(1;\sqrt{3}]$ միջակայքերում, մոնոտոն աճող է $[\sqrt{3};+\infty)$ միջակայքում, $x=\sqrt{3}$-ը ($y(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 1,38$) մինիմումի կետ է:



Նկ. 8

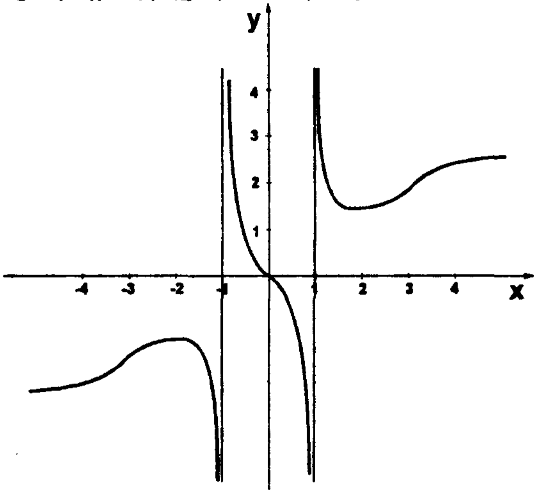
Երկրորդ կարգի ածանցյալը կլինի ՝ $y''(x)=\frac{2}{9}\frac{x(9-x^2)}{(x^2-1)^{7/3}}$:

Այստեղից հետևում է (տե՛ս նկ. 9), որ ֆունկցիան գոգավոր է $(0;1)$, $(3;+\infty)$ միջակայքերում, ուռուցիկ է $(1;3)$ միջակայքում, $x=3$-ը ($y(3)=1,5$) շրջման կետ է:



Նկ. 9

Այժմ կառուցենք գրաֆիկը՝ (տե՛ս նկ. 10)



Նկ. 10

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Գտնել տվյալ A բազմության ճշգրիտ եզրերը՝ sup A և inf A, եթե

ա) $A=\{-1/n;\ n\in N\}$, բ) $A=\{1/n;\ n\in N\}$,

գ) $A=\{1+1/\sqrt{n};\ n\in N\}$, դ) $A=\{1-1/n^2;\ n\in N\}$,

ե) $A=(-\infty, a)$, զ) $A=(a;+\infty)$:

2. Ապացուցել, որ եթե $A\supset B$ և A-ն սահմանափակ է վերևից, ապա B-ն նույնպես սահմանափակ է վերևից և՝ $\sup B\le \sup A$:

3. Ապացուցել որ եթե $A\supset B$ և B-ն սահմանափակ է ներքևից, ապա A-ն նույնպես սահմանափակ է ներքևից և՝ $\inf A\ge \inf B$:

4. Ապացուցել, ելնելով սահմանի սահմանումից, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=0,\ \lim_{n\to\infty}q^n=0\ \left(|q|<1\right),\ \lim_{n\to\infty}5^{-\sqrt{n}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+10^{-n^3}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\lg\left(10+3^{-n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\ln\left(e^2+n^{-2}\right)=2\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(e-e^{-\sqrt{n}}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1,\ \lim_{n\to\infty}2^{-1/\sqrt{n}}=1,\ \lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n}}=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(n^3+1\right)=+\infty,\ \lim_{n\to\infty}(-1)^n\lg\left(1+\sqrt[4]{n}\right)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\cos\pi n\cdot\left(1+\sqrt[5]{n}\right)=\infty$$

5. Օգտվելով սահմանի հատկություններից ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+n+1}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+\sqrt{n}+3}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3^n+n!}{10^n+\sqrt{n}+1}=0\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+\sqrt[n]{n}+1}{\lg n+n!+2^n}=0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+4^n}{n!+\ln n+1}=+\infty\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}+2^n+1}{3^n+\lg(n+1)}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=1:$$

6. Գտնել տվյալ հաջորդականության վերին և ստորին սահմանները:

ա) $x_n=(2n-1)\sin\frac{1}{n}+(-1)^n$, բ) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}\cdot\cos\pi n$

գ) $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}+2(-1)^n$, դ) $x_n=\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$,

ե) $x_n=\sqrt{2n+1}\left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)+5\cos\frac{\pi n}{2}$, զ) $x_n=\left(n^2+n+1\right)\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{n^2}+4\cos\pi n$

7. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականությունները ձգտում են միևնույն (a) սահմանին, ապա՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$:

8. Ապացուցել, որ $\sin n$ $(\cos n)$ հաջորդականությունը չունի սահման (տարամետ է):

9. Ապացուցել, որ՝ $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, $\lg 3$, $\lg 5$ թվերը իռացիոնալ են:

10. Ապացուցել, որ ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի գումարը (տարբերությունը) իռացիոնալ է:

11. Ի՞նչ կարելի է ասել ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի արտադրյալի մասին:

12. Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից ըստ Կոշիի, ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{-3}=\infty$, բ) $\lim\limits_{x\to2+0}\pi^{\sqrt[3]{x-2}}=1$, գ) $\lim\limits_{x\to1-0}e^{\sqrt{1-x}}=1$,

դ) $\lim\limits_{x\to2-0}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right)=+\infty$, ե) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$,

զ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=2$, է) $\lim\limits_{x\to1+0}\lg\left(\sqrt{3+x}-2\right)=-\infty$,

ը) $\lim\limits_{x\to4-0}\pi^{\sqrt[3]{\frac{1}{4-x}}}=+\infty$, թ) $\lim\limits_{x\to2-0}\lg(2-x)=-\infty$, ժ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$,

ի) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{x^2}=+\infty$, լ) $\lim\limits_{x\to2-0}\pi^{\frac{1}{x-2}}=0$, խ) $\lim\limits_{x\to2+0}\pi^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$,

ծ) $\lim\limits_{x\to1+0}\lg\left(\sqrt{x+8}-3\right)=+\infty$:

13. Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից ըստ Հայնեի, ապացուցել որ գոյություն չունի հետևյալ սահմանը:

ա) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$, բ) $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\dfrac{1}{x}$, գ) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$, դ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\sqrt{x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\sqrt[4]{-x}$, զ) $\lim\limits_{x\to1-0}\cos\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, ը) $\lim\limits_{x\to2+0}\sin^3\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$:

14. Օգտվելով անընդհատության սահմանումից, ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $f(x)=\sqrt{2x}$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=0.5$ կետում,

բ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է յուրաքանչյուր $x_0\in R$ կետում,

գ) $f(x)=\sin\pi i$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=0.5$ կետում,

դ) $f(x)=\ln(1+3x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=\dfrac{1}{3}$ կետում:

15. Պարզել, թե պարամետրերի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի՝ ա) անընդհատ x=0 կետում, բ) կունենա առանցյալ x=0 կետում, եթե՝

1) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$, 2) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$,

3) $f(x)=\begin{cases} a+b\,\mathrm{argtg}\,2x, & x\ge 0 \\ c\pi^{x}+d, & x<0 \end{cases}$, 4) $f(x)=\begin{cases} a+b\arcsin 3x, & x\ge 0 \\ c\ln(1+2x)+d, & x<0 \end{cases}$ a

5) $f(x)=\begin{cases} a+b\sqrt[4]{1+2x}, & x>0 \\ c\arccos 2x, & x\le 0 \end{cases}$, 6) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ ax+b, & x\ge 0 \end{cases}$;

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ ԱՇՈՏ ԳՐԻԳՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ
(դասախոսություններ)

Առաջին մաս

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

Հրատ. խմբագիր՝ Մ.Գ.Յավրյան
Տեխ խմբագիր՝ Վ.Զ.Բդոյան
Համակարգչային շարվածք՝ Ա.Գ.Ղալումյան

Պատվեր 174 **Տպաքանակ 200**

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ.Մանուկյան 1

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ.Մանուկյան 1